Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

21. und 22. Jänner 2013

67) Was ist ein *Polynom in n Variablen*? Wie ist das Produkt von zwei solchen Polynomen definiert?
Es seien $f := x_1^2x_2^3 + x_1^2 - x_2 + 1$, $g := 3x_1x_2^2 - 5x_1x_2 - 2$ und $h := x_1^2x^2 + x_2 - 1$ Polynome in $\mathbb{R}[x_1, x_2]$. Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms $f \cdot g \cdot h$ bei $x_1x_2^3$ und bei $x_1^2x_2$.

68) Wie ist die *Nullstellenmenge* einer Menge von Polynomen in n Variablen definiert? Es seien $f := x_1^2 - 2x_2$, $g := 3x_1 - 5x_2$ und $h := x_1 + x_2 - 1$ Polynome in $\mathbb{R}[x_1, x_2]$. Skizzieren Sie die Nullstellenmengen (in $\mathbb{R}^2$) der Polynome $f, g, h, f \cdot g, f \cdot g \cdot h$ und der Mengen

$$\{f, g\}, \{f, h\}, \{f, g, h\}, \{f \cdot g, h\} \ .$$

69) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{R}[x_1, x_2]$, dessen Nullstellenmenge die Vereinigung der folgenden drei Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist: der Kreis mit Mittelpunkt $(0, -1)$ und Radius 2, der Kreis mit Mittelpunkt $(2, 0)$ und Radius 1, die Gerade durch $(1, 1)$ und $(2, 0)$.

70) Es seien

$$\alpha : \mathbb{Q}[x, y] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt[3]{5}] \, , \, f \longmapsto f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$$

und I das von den Polynomen $x^3 - 2$ und $y^3 - 5$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Q}$-Algebren $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt[3]{5}]$ und $\mathbb{Q}[x, y]/I$ isomorph sind (Verwenden Sie den Homomorphiesatz).

71) Es seien K ein Körper und f ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad d in $K[x_1, \dots, x_n]$. Das Polynom

$$f_h := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

heißt *Homogenisierung von f*.
Berechnen Sie die Homogenisierung der Polynome $x_1^2 + x_2^2 - 1$ und $3x^4 - x^2 + 1$.
Zeigen Sie: f_h ist homogen vom Grad d, $f_h(1, x_1, \dots, x_n) = f$ und die Nullstellenmenge von f_h in K^{n+1} ist

$$\{(c, cz) \mid c \in K,\ z \in K^n,\ f(z) = 0\} \cup$$
$$\cup \{(0, z) \mid z \in K^n, f_h(0, z) = 0\}\,.$$

72) Es seien K ein Körper und g ein nicht konstantes Polynom in $K[x_1, \dots, x_n]$.
Zeigen Sie:
Wenn g homogen vom Grad d ist, gilt für alle $c \in K$, $z \in K^n$: $g(cz) = c^d g(z)$.
Wenn K unendlich ist und für alle $c \in K$, $z \in K^n$ gilt: $g(cz) = c^d g(z)$, dann ist g homogen vom Grad d.