Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

14. und 15. Jänner 2013

64) Was ist eine *formale Potenzreihe*? Wann kann eine Potenzreihe invertiert werden? Berechnen Sie die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe

$$(1-2x+3x^2-4x^3)(1+x-x^2-3x^3)^{-1} \in \mathbb{Q}[[x]] \quad .$$

Berechnen Sie die ersten zehn Koeffizienten der zu

$$1-x^2+x^4$$

inversen Potenzreihe.

65) Für $f := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i x^i \in \mathbb{R}[[x]]$ sei $f' := \sum_{i\in\mathbb{N}} i c_i x^{i-1}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$D : \mathbb{R}[[x]] \longrightarrow \mathbf{R}[[\mathbf{x}]],\ \mathbf{f} \longmapsto \mathbf{f}'$$

$\mathbb{R}$-linear ist und dass für alle $f, g \in \mathbb{R}[[x]]$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

ist.
Berechnen Sie alle Potenzreihen $f \in \mathbb{R}[[x]]$ so, dass

$$xf'' + (x-1)f' - 2f = 0$$

ist.

66) Welche Ideale gibt es in $\mathbb{Q}[[x]]$?
Es sei I das von den formalen Potenzreihen $f := x^4 + x^5 - 2x^6$ und $g := x^5 - x^9 + x^{11} \in \mathbb{Q}[[x]]$ erzeugte Ideal. Berechnen Sie Potenzreihen h, u, v so, dass h das Ideal I erzeugt und $h = uf + vg$ ist.
Sind die von $\{x^2+x^3\,,\ x^3+2x^4\}$ und von $\{x^2-x^4\,,\ x^3+2x^4+x^5\}$ in
   a) $\mathbb{Q}[x]$
   b) $\mathbb{Q}[[x]]$
erzeugten Ideale gleich?