Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

7. und 8. Jänner 2013

58) Es sei I das von $x^3 - 3$ in $\mathbb{Q}[x]$ erzeugte Ideal. Berechnen Sie a, b, $c \in \mathbb{Q}$ so, dass

$$\overline{(3+2x+x^2)}.\overline{(a+bx+cx^2)} = \overline{1} \in \mathbb{Q}[x]/I$$

ist. Schreiben Sie dann $\sqrt[3]{3}$ für $\bar{x}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

59) Berechnen Sie die Minimalpolynome in $\mathbb{Q}[x]$ von $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{5}+1$. Finden sie $a \in \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so, dass

$$\frac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} = \frac{a}{b}$$

ist.

60) Erklären Sie, was „den Nenner wurzelfrei machen“ für die algebraische Zahl

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}}$$

bedeutet und führen Sie das dann aus.

61) Es sei $\sqrt[3]{7}$ die positive reelle Zahl, deren dritte Potenz 7 ist. Zeigen Sie, dass $x^3 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Entscheiden Sie, ob die Zahlen

$$2,71 \cdot (\sqrt[3]{7})^2 - 3,14 \cdot \sqrt[3]{7}$$

und

$$3.9011530462817070310949254533282$$

gleich sind oder nicht.

62) Berechnen Sie das Minimalpolynom der rationalen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Jede Matrix ist Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms.

63) Zeigen Sie: $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel, aber für alle positiven Primzahlen p ist $x^4 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ reduzibel.

FROHE WEIHNACHTEN UND ALLES GUTE FÜR DAS NEUE JAHR!