

**Proseminar Algebra und Geometrie in der Schule  
Wintersemester 2011/12**

**13. Dezember 2011**

- 25) Aus: Reichel, H., et al.: Lehrbuch der Mathematik 7.  
öbv hpt Verlagsgesellschaft, Wien, 4. Auflage 1999.  
*Aufgabe 793: Die Differenzengleichung  $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ ;  $x_0$  beschreibt einen dynamischen Prozess.*  
a) Zeige unter Verwendung der Summenformel der endlichen geometrischen Reihe: Für  $a \neq 1$  lautet die (explizite) Lösung dieser Differenzgleichung:

$$x_n = a^n \cdot x_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

- 26) Aus: Schalk, H., Steiner, G.: Mathematik 3.  
Verlag Hölder Pichler Tempsky, Wien, 3. Auflage, Nachdruck 2008.  
*Aufgabe 124: Wir schreiben das Jahr 1201 und schlendern über den Markt des Kleinstädtchens Pisa in Italien. ... Da offeriert unter anderem ein Händler Kaninchenpärchen mit einer ganz besonderen Fortpflanzungseigenschaft an und verspricht: „Jedes Pärchen bekommt schon nach zwei Lebensmonaten - und ab diesem Zeitpunkt sogar monatlich - genau ein Pärchen Junge, die wiederum die Fortpflanzungseigenschaft ihrer Eltern geerbt haben“.*  
*Jemand kauft ein neugeborenes Kaninchenpärchen und überlegt, mit wie vielen Kaninchenpärchen wohl nach einem, zwei, drei ... Monaten zu rechnen sein wird. ...*  
b) Das Bildungsgesetz der Folge  $a_n$ , die die Anzahl der Kaninchenpärchen in expliziter Form beschreibt, lautet:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^{n-1}} \left( (1 + \sqrt{5})^{n-1} - (1 - \sqrt{5})^{n-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$$

Man zeige, dass sie dem impliziten Bildungsgesetz

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  genügt.

Zeigen Sie, wie man die angegebene Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Lösung der Differenzgleichung  $(s^2 - s - 1) * f = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  erhält.

- 27) Aus: Timischl, W., Prugger, E.: Mathematik & Wirtschaft 4. E. Dorner, Wien, 2007.

*Beispiel 7.6: Konjunkturmodell von Samuelson*

*Berechne aus der Differenzgleichung*

$Y_n = a.(b + 1).Y_{n-1} - a.b.Y_{n-2} + A$  mit  $Y_0 = Y_1 = 400$  GE rechnergestützt schrittweise das Volkseinkommen  $Y_n$  bis  $n = 50$  für  $A = 100$  GE, wenn a)  $a = 0,9$  und  $b = 1 \dots$  ist  $\dots$ .

Berechnen Sie eine explizite Form der Lösung dieser Differenzgleichung mit vorgegebenen Anfangswerten  $Y_0$  und  $Y_1$ .

$Y_n$  gibt das Einkommen der privaten Haushalte (Volkseinkommen) in der  $n$ -ten Rechnungsperiode an. Die folgenden Annahmen werden getroffen: Die Konsumausgaben  $C_n$  sind proportional dem Volkseinkommen der Vorperiode, also  $C_n = a.Y_{n-1}$  mit  $0 < a < 1$ . Die privaten Investitionen  $I_n$  sind proportional dem Zuwachs  $C_n - C_{n-1}$  der Konsumausgaben, also  $I_n = b.(C_n - C_{n-1})$  mit  $b > 0$ . Die Regierungsausgaben  $A$  sind in jeder Periode gleich. In jeder Periode ist  $Y_n = C_n + I_n + A$ .

Die Aufgaben sollen nicht nur wie von Schüler/inne/n gelöst werden. Es soll vor allem der mathematische Hintergrund, das nötige Vorwissen und die Strategie zur Lösung dieser Aufgaben erläutert werden. Dabei ist auf einen guten Vortrag zu achten. Im Vortrag soll einfach, aber präzise gesprochen werden, die Argumentation soll lückenlos sein und die Voraussetzungen sollen offengelegt werden. Für jede Aufgabe stehen 15 Minuten zur Verfügung.