

Kap. 3: Polynome, Polynomfunktionen und algebraische Zahlen

Algebraische Zahlen im Lehrplan der AHS-Unterstufe (2000):

4. Klasse:

„Arbeiten mit Zahlen und Maßen“

- durch zusammenfassendes Betrachten das Zahlenverständnis vertiefen,
- anhand einfacher Beispiele erkennen, dass es Rechensituationen gibt, die nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen lösbar sind

Polynome, Polynomfunktionen und algebraische Zahlen im Lehrplan der AHS-Oberstufe (2016):

5. Klasse:

„Gleichungen und Gleichungssysteme“

Lineare und quadratische Gleichungen in einer Variablen lösen können; Lösungsfälle untersuchen können

„Funktionen“

Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschreiben und untersuchen können
Einige weitere nichtlineare Funktionen beschreiben und untersuchen können, zB $f(x) = a/x$,
 $f(x) = a/x^2$

6. Klasse:

„Reelle Funktionen“

Funktionen folgender Arten definieren und darstellen können; typische Formen ihrer Graphen skizzieren können; charakteristische Eigenschaften angeben und im Kontext deuten können

- Potenzfunktionen: $f(x) = a \cdot x^q$ ($q \in \mathbf{Q}$)
- Polynomfunktionen $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

7. Klasse:

„Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen“

Einfache Polynomgleichungen vom Grad ≤ 4 im Bereich der reellen Zahlen lösen können (sofern sie in der Differentialrechnung verwendet werden)

Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können
Untersuchungen von Polynomfunktionen in inner- und außermathematischen Bereichen durchführen können; einfache Extremwertaufgaben lösen können (Ermittlung von Extremstellen in einem Intervall)

„Komplexe Zahlen“

Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung der reellen Zahlen erkennen

Komplexe Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ kennen; mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können

Den Fundamentalsatz der Algebra kennen

Komplexe Zahlen in Polarform kennen

8. Klasse:

„Differenzen- und Differentialgleichungen; Grundlagen der Systemdynamik“

Diskrete Veränderungen von Größen durch Differenzgleichungen beschreiben und diese im Kontext deuten können

Einfache dynamische Systeme mit Hilfe von Diagrammen oder Differenzgleichungen beschreiben und untersuchen können

Polynome, Polynomfunktionen und algebraische Zahlen im Lehrplan der HTL (2015):

II. Jahrgang:

Bereich Zahlen und Funktionen

Die Gleichungen und Eigenschaften der elementaren Funktionen (lineare Funktionen, Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, ...) verstehen, die Funktionsparameter interpretieren und die Funktionsgraphen skizzieren;

Polynomfunktionen aufstellen und zur Interpolation verwenden;

quadratische Gleichungen lösen und die verschiedenen Lösungsfälle unterscheiden

Bereich Komplexe Zahlen und Geometrie

Die Grundrechnungsarten mit komplexen Zahlen ausführen und die Ergebnisse in der Gauß'schen Zahlenebene interpretieren [Anm. FP: im Lehrstoff auch Polarkoordinaten]

Inhalt

3.1 Wurzeln und quadratische Funktionen

3.2 Division mit Rest von Polynomen und algebraische Zahlen

3.3 Komplexe Zahlen

3.4 Differenzgleichungen

3.1 Wurzeln und quadratische Funktionen

K Zahlbereich, $a \in K$

x ist Wurzel (Quadratwurzel) von a in K genau dann, wenn $x^2=a$ ist.

Eine ganze Zahl a hat genau dann eine rationale Wurzel, wenn a das Quadrat einer ganzen Zahl ist. (Beweis mit Primfaktorzerlegung oder Kriterium von Eisenstein)

Eine reelle Zahl hat genau dann eine reelle Wurzel, wenn sie nicht negativ ist. (Beweis mit Zwischenwertsatz). Ist x eine reelle Wurzel von a , dann ist $\{x, -x\}$ die Menge aller reellen Wurzeln von a .

Wiederholung: Quadratische Funktionen (Scheitelform, Folgerungen aus Scheitelform: der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel, jede quadratische Funktion hat genau eine Extremstelle und zwar die erste Komponente des Scheitels, „Lösungsformel“)

3.2 Division mit Rest von Polynomen und algebraische Zahlen

Wiederholung: Division mit Rest von Polynomen (Vergleich mit Division mit Rest von ganzen Zahlen) und Folgerungen (Euklidischer Algorithmus und Erweiterter Euklidischer Algorithmus für Polynome; Charakterisierung von Nullstellen durch Teilbarkeitseigenschaft; Anzahl der komplexen Nullstellen eines Polynoms)

Wiederholung: Rundungsfreies Rechnen mit Wurzeln, Vergleich der Konstruktion von \mathbf{C} und $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$

Differentialrechnung für Polynomfunktionen

3.3 Komplexe Zahlen

Weitere Konstruktionen von \mathbf{C} (\mathbf{R}^2 mit komponentenweiser Addition aber nicht komponentenweiser Multiplikation, Restklassen modulo x^2+1 , Drehstreckungen)

Polardarstellung

Regelmäßige n -Ecke und Einheitswurzeln

3.4 Differenzgleichungen

Pauer, F.: Lineare Differenzgleichungen und Polynome.

Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 42 (2010), Seiten 78-91.

(<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2009%20Band%2042/VortragPauer.pdf>)