Algebra und Geometrie in der Schule,
Wintersemester 2016/17

Kap. 4: Systeme linearer Gleichungen und Vektoren

Lehrplan Oberstufe AHS:

5. Klasse
Gleichungen und Gleichungssysteme
- Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation

Vektoren und analytische Geometrie der Ebene
- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden

6. Klasse
- Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen

Nicht explizit erwähnt: Rechnen mit Funktionen (insbesondere mit Folgen)

Lehrplan der HTL:

1. Jahrgang:
Lineare Gleichungssysteme: Lösbarkeit; Lösungsmethoden.
Vektoren: Darstellung, Ortsvektor, Multiplikation mit einem Skalar, Addition und Subtraktion.

2. Jahrgang:
Vektoren: Skalarprodukt, Betrag, Orthogonalität, vektorielles Produkt
Matrizen: … , lineare Gleichungssysteme in Matrizenform

5. Jahrgang (Informationstechnologie; Informatik):
Lineare Optimierung: Anwendungsbeispiele, Lineare Ungleichungen, Lösungsmöglichkeiten.

Lehrplan der HUM

II. Jahrgang:
Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen.
Lineare Optimierung mit zwei Variablen.

Inhalt
4.1 Was sind Vektoren?
Pauer, F.: Was sind Vektoren? Wozu braucht man sie?
Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 38 (2006), Seiten 87-98.
4.2 Lineare Gleichungen
Pauer, F.: Gleichungen - Aufgabenstellung und Lösungsstrategien.
Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 39 (2007), Seiten 81-91.
4.3 Geraden und Ebenen
4.4 Geometrisches Lösen von Linearen Programmen
Pauer, F.: Lineare (Un-)Gleichungen und lineare Optimierung.
Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 43 (2011), Seiten 102-114.

4.1 Was sind Vektoren?

Wiederholung:

- Rechnen mit n-Tupeln, Vektorräume, Vektoren, Linearkombinationen, Basis
- Lösungsmengen homogener Systeme linearer Gleichungen als Vektorräume
- Rechnen mit Punkten, reellwertigen Funktionen, „Größen“, Translationen

Zweidimensionale reelle Vektorräume, die im Schulunterricht vorkommen: $\mathbf{R}^2$, Zeichenebene E nach Wahl eines Nullpunktes 0, Vektorraum der Ortsvektoren in E: {0}xE , Vektorraum der Translationen in E, zweidimensionale Funktionenräume (z.B. $\{ a.\sin+b.\cos \mid a, b \in \mathbf{R} \}$, **C**.

„Gerichtete Größen“ sind Elemente eines normierten (z. B. euklidischen) Raumes.

Es gibt Pfeile, die Vektoren sind und solche, die keine Vektoren sind.

4.2 Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* (oder ein System linearer Gleichungen) *in koordinatenfreier Form* ist eine Aufgabe, bei der eine lineare Funktion f und ein Element b des Bildbereiches gegeben sind. Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ (durch endlich viele Daten) der Menge aller Elemente des Definitionsbereichs, deren Bild b ist (also die Menge aller x im Definitionsbereich mit f(x)=b).

Eine *lineare Gleichung* (oder ein System linearer Gleichungen) *(in Koordinatenform)* ist eine Aufgabe, bei der eine mxn-Matrix A und ein eine Spalte mit m Zeilen gegeben sind. Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ (durch endlich viele Daten) der Menge aller Spalten x mit n Zeilen so, dass A.x=b ist.
m heißt „Anzahl der Gleichungen“, n „Anzahl der Unbekannten“.

Beispiele:

- Finde alle Zahlenpaare (u,v) so, dass 3u+2v = 10 und 2u-v = 2 ist.
- Finde alle zweimal differenzierbaren Funktionen f von **R** nach **R** so, dass f‘‘-5f‘+6 f = 0 ist.

Wiederholung:

- Die Lösungsmenge einer homogenen Systems linearer Gleichungen ist ein Vektorraum und wird durch eine Basis davon beschrieben.
- Die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen ist ein affiner Unterraum und wird durch eine Lösung und eine Basis des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen beschrieben.
- Die Dimension des Lösungsraums ist die Anzahl der Unbekannten minus der Anzahl der „linear unabhängigen Gleichungen“.
- Das Produkt A.x ist eine Linearkombination der Spalten von A (mit Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$).

Strategie zur Lösung: „erlaubtes Umformen“ bis Gleichung so einfach ist, dass die Lösungsmenge ohne Rechnung angegeben werden kann (z. B. Umformen in Dreiecksform oder Stufenform).
Werkzeug zur Lösung: Elementare Umformungen.

Beispiel: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten.
Gegeben sind (rationale, reelle, komplexe) Zahlen a, b, c, d, e, f. Finde alle Zahlenpaare (x,y) so, dass ax+by=c und dx+ey=f !
Die elementaren Umformungen „vertausche die zwei Gleichungen“, „multipliziere eine Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$“, „ersetze eine Gleichung durch die Summe oder Differenz dieser und der anderen Gleichung“ verändern die Lösungsmenge nicht.
Lösungsweg: Versuche durch elementare Umformungen zu einem der folgenden Systeme von zwei linearen Gleichungen zu kommen (das ist immer möglich):

- x = c‘, y = d‘ (Lösungsmenge: {(c‘, d‘)})
- a’x+b’y = c‘, 0 = 1 (keine Lösung)
- a’x+b’y = c‘, 0 = 0 (Lösungsmenge: $\{(p,q) + t.(-b', a') \mid t \in \mathbf{R} \}$, dabei ist (p,q) irgendein Zahlenpaar mit a’p+b’q = c‘).

Die nötigen elementaren Umformungen sind nicht eindeutig bestimmt, es ist nicht sinnvoll, einen bestimmten Lösungsweg vorzuschreiben („Einsetzungsmethode“, „Gleichsetzungsmethode“, …).

4.3 Geraden und Ebenen

Wiederholung:

- Eine Gerade bzw. eine Ebene in einem Vektorraum ist ein eindimensionaler bzw. zweidimensionaler affiner Unterraum (dh. durch einen Aufpunkt und den parallelen Untervektorraum gegeben).
- Darstellung von Geraden bzw. Ebenen in Parameterform, in impliziter Form, als affine Hülle.
- Geometrische Interpretation des Lösens einer linearen Gleichung: Übergang von der impliziten Form in die Parameterform eines affinen Unterraums.

Beispiele:

- Darstellung von Geraden in der Ebene in Parameterform, in impliziter Form, als affine Hülle.
- Darstellung von Geraden im Raum in Parameterform, in impliziter Form, als affine Hülle.
- Darstellung von Ebenen im Raum in Parameterform, in impliziter Form, als affine Hülle.
- Berechnung des Durchschnitts von Geraden in der Ebene.
- Berechnung des Durchschnitts von zwei oder drei Ebenen im Raum.

Die Ebene und der Raum als affine Räume. Was bedeutet „Punkt-Pfeil-Addition"?

Darstellung gewisser Geraden in der Ebene und gewisser Ebenen im Raum als Funktionsgraphen.

4.4 Geometrisches Lösen von Linearen Programmen

Siehe [Pauer, F.: Lineare (Un-)Gleichungen und lineare Optimierung.
Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 43 (2011), Seiten 102-114].