Was ist ein Skalarprodukt und wozu wird es verwendet?

FRANZ PAUER UND FLORIAN STAMPFER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

1. Einleitung

Es kommt selten vor, dass ein mathematischer Fachbegriff den Weg in die Tagespresse findet. Dem Begriff Skalarprodukt ist das im Mai 2015 dank des durch die Einführung der Zentralmatura in Österreich gestiegenen Interesses der Öffentlichkeit an der Mathematik gelungen. In der Aufgabe 3 des ersten Termins der standardisierten Reifeprüfung 2015 wurde der Begriff Skalarprodukt (wenn auch nur in Klammern) verwendet und im Mai 2015 wies Rudolf Taschner in einem Artikel in der österreichischen Tageszeitung „Die Presse“ darauf hin, dass das gar kein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 3

Gehälter

Die Gehälter der 8 Mitarbeiter/innen eines Kleinunternehmens sind im Vektor $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_8 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, was der Ausdruck (das Skalarprodukt) $G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesem Kontext bedeutet!

Abb. 1: Aufgabe 3 der standardisierten Reifeprüfung 2015 (BIFIE, 2015).

> Erstens: "Das Beispiel ist zu primitiv", sagt Taschner. Man könne es schon in der ersten oder zweiten Klasse Mittelschule geben. Es gehe nur darum, das erste Gehalt mal die erste Eins zu rechnen, das zweite Gehalt mal die zweite Eins, das dritte Gehalt mal die dritte Eins usw., also müsse man nur einfache Summen bilden.
>
> Außerdem sei es "Nonsens", es handle sich gar nicht um ein Skalarprodukt. Das Wort "Vektor" sei fehl am Platz, es handle sich um eine Spalte von Zahlen, um eine Tabelle. "Die Aufgabensteller haben von dieser Art von Beispiel offenbar keine Ahnung", sagt Taschner. Mathematik sei die Kunst, etwas Kompliziertes einfach zu machen. Hier allerdings sei das Gegenteil gemacht worden. "Hier wird nicht Mathematik gemacht," so das Fazit zum dritten Beispiel.

Abb. 2: Kritik an Aufgabe 3 (Die Presse , 2015).

In diesem Beitrag geben wir zuerst die Definition des Begriffs Skalarprodukt (in der Mathematik) an und zeigen, wie der physikalische Begriff Arbeit damit zusammenhängt. In der Geometrie wird durch die Vorgabe eines Skalarproduktes auf einem endlich-dimensionalen (zumeist 2- oder 3-dimensionalen) reellen Vektorraum der „richtige Rahmen“ für die euklidische Geometrie geschaffen. Viele Sätze der Geometrie können so sehr einfach bewiesen werden. Die Einführung des Begriffs Skalarprodukt ist zu

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 49, 2016, S. 1–10
Version 1 vom 24.10.2016

jener der Begriffe Abstand und rechter Winkel äquivalent. Für den Schulunterricht bedeutet das, dass ein Skalarprodukt auf der Ebene durch die Wahl eines „rechtwinkeligen Koordinatensystems“ festgelegt wird.

Abschließend geben wir eine Anwendung des Skalarproduktes in der Statistik an: Die Regressionsgerade von Datenpaaren kann damit einfach berechnet und die Methode der kleinsten Fehlerquadrate gut begründet werden.

2. Skalarprodukte

2.1. Was ist ein Skalarprodukt?

Im Weiteren bezeichnet V einen reellen Vektorraum. Das ist eine Menge (deren Elemente dann Vektoren heißen) zusammen mit zwei Rechenoperationen: Die eine (Addition genannt) ordnet je zwei Vektoren v und w wieder einen Vektor, ihre *Summe* $v+w$, zu. Die andere ordnet einer reellen Zahl c und einem Vektor v einen Vektor, das *(skalare) Vielfache* cv, zu. Dabei verlangt man, dass einige Rechenregeln, wie zum Beispiel: für alle Vektoren u, v, w in V ist $(u+v)+w=u+(v+w)$; oder: für alle Vektoren u, v in V und alle reellen Zahlen c ist $c(v+w)=cv+cw$ gelten (siehe etwa Jänich, 2011).

Das Standardbeispiel für einen reellen Vektorraum ist die Menge aller n-Tupel $\mathbb{R}^n$ von reellen Zahlen zusammen mit den *komponentenweise definierten* Rechenoperationen:

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n) &:= (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n),\\ c(a_1,a_2,\ldots,a_n) &:= (ca_1,ca_2,\ldots,ca_n).\end{aligned}$$

Es gibt viele andere reelle Vektorräume, zum Beispiel den Vektorraum aller Kräfte, die in einem Punkt angreifen (die Summe zweier Kräfte ist ihre Resultierende) oder den Vektorraum aller reellwertigen Funktionen mit den punktweise definierten Rechenoperationen (siehe Pauer, 2006; Pauer & Stampfer, 2014).

Addiert man Vielfache von Vektoren, so erhält man eine *Linearkombination* dieser Vektoren:
Sind $v_1,v_2,\ldots,v_n$ Vektoren in V und $c_1,c_2,\ldots,c_n$ reelle Zahlen, so ist der Vektor

$$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n =: \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1,v_2,\ldots,v_n$ mit den *Koeffizienten* $c_1,c_2,\ldots,c_n$.
Wenn man jeden Vektor in V auf genau eine Weise als Linearkombination der Vektoren $v_1,v_2,\ldots,v_n$ schreiben kann, nennt man das n-Tupel $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ von Vektoren eine *Basis* von V. Die Koeffizienten dieser Linearkombination heißen dann die *Koordinaten* des Vektors bezüglich dieser Basis. Je nachdem, ob man die Koordinaten als Zeile oder Spalte anschreibt, spricht man von der Koordinatenzeile oder Koordinatenspalte des Vektors. Zum Beispiel ist

$$((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1))$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, dass jeder Vektorraum (mindestens) eine Basis hat.
Wählt man eine Basis $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ von V, dann ist die Funktion von V nach $\mathbb{R}^n$, die jedem Vektor das n-Tupel seiner Koordinaten zuordnet, bijektiv und linear. Das heißt: Jeder Vektor ist durch seine Koordinatenspalte (oder -zeile) eindeutig bestimmt, die Koordinatenspalte des c-fachen eines Vektors ist das c-fache der Koordinatenspalte dieses Vektors und Koordinatenspalte der Summe von zwei Vektoren ist die (komponentenweise) Summe der Koordinatenspalten dieser zwei Vektoren.

Nach Wahl einer Basis von V kann also jeder Vektor als Spalte (oder Zeile) aufgefasst werden und die Rechenoperationen in V entsprechen genau den komponentenweisen Rechenoperationen im Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist daher nicht nur das einfachste, sondern auch das allgemeinste Beispiel für einen endlich-dimensionalen Vektorraum. Es ist daher für den Unterricht in den Schulen durchaus sinnvoll, Vektoren als n-Tupel von reellen Zahlen – gleich ob in der Schreibweise als Zeilen oder als Spalten – einzuführen. In diesem Punkt stimmen wir Rudolf Taschner nicht zu.

Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V ordnet je zwei Vektoren v, w in V eine reelle Zahl $v \cdot w$ zu, und zwar so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- für alle Vektoren v, w in V ist $v \cdot w = w \cdot v$ („ein Skalarprodukt ist symmetrisch"),
- für alle Vektoren u, v, w in V und alle reellen Zahlen c, d ist $(cu + dv) \cdot w = c(u \cdot w) + d(v \cdot w)$ („ein Skalarprodukt ist bilinear"),
- für alle Vektoren $v \neq 0$ ist $v \cdot v > 0$ („ein Skalarprodukt ist positiv definit").

Ein Skalarprodukt auf V ist also eine Funktion von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$, die symmetrisch, bilinear und positiv definit ist.

Da die zwei Spalten in Aufgabe 3 derstandardisierten Reifeprüfung 2015 nicht im selben Vektorraum liegen (die Einträge der ersten Spalte G sind Geldbeträge, die Einträge der zweiten Spalte sind reelle Zahlen), ist der „Ausdruck" in der Aufgabenstellung kein Skalarprodukt, hier hat Rudolf Taschner recht. Mit diesem „Ausdruck" wird ein Geldbetrag (die „Gehaltssumme" des Kleinunternehmens) und nicht nur eine Zahl dargestellt.

Die Funktion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, die jedem Paar (a, b) von n-Tupeln reeller Zahlen die Zahl $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ zuordnet, ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Dieses heißt das *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$. Es gibt aber auch viele andere Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$.

Skalarprodukte spielen auch in der Analysis eine wichtige Rolle, zum Beispiel im Zusammenhang mit Fourierreihen oder numerischen Approximationsverfahren. Ist $\mathcal{C}([0,1])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, dann ist durch

$$f \cdot g := \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

(für alle Funktionen f und g in $\mathcal{C}([0,1])$) ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([0,1])$ definiert.

Wir nehmen nun an, dass auf V ein Skalarprodukt gegeben ist und wählen eine Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von V. Weil das Skalarprodukt bilinear ist, ist das Skalarprodukt der zwei Vektoren $u := \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und $w := \sum_{j=1}^n d_j v_j$ dann

$$u \cdot w = (\sum_{i=1}^n c_i v_i) \cdot (\sum_{j=1}^n d_j v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j v_i \cdot v_j \ .$$

Um das Skalarprodukt zu berechnen, genügt es also, die Skalarprodukte $v_i \cdot v_j$ der Basisvektoren zu kennen.

Die Matrix

$$(v_i \cdot v_j)_{1 \leq i,j \leq n} \, ,$$

deren Koeffizienten diese Zahlen sind, heißt *Gram'sche Matrix* des Skalarproduktes bezüglich der Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Das Skalarprodukt ist durch die Vorgabe dieser n^2 Zahlen eindeutig festgelegt. Umgekehrt definiert aber nicht jede quadratische Matrix ein Skalarprodukt. Dazu muss eine solche Matrix symmetrisch und positiv definit sein. Eine reelle $n \times n$-Matrix A ist positiv definit, wenn für alle n-Spalten $x \neq 0$ die Zahl $x^\mathsf{T} A x$ positiv ist.

Beispiel: Die Gram'sche Matrix des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis $((1,0),(0,1))$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man prüft leicht nach, dass durch die Vorgabe $v_i \cdot v_j = 1$, wenn $i = j$ ist, und $v_i \cdot v_j = 0$, wenn $i \neq j$ ist, auf V ein Skalarprodukt definiert wird. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist dann das Standardskalarprodukt ihrer Koordinaten-n-Tupel bezüglich der Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
Mithilfe eines Skalarproduktes auf V kann man leicht die Begriffe *Abstand* und *rechter Winkel* auf V definieren:

- Der *Abstand* zwischen $v \in V$ und $w \in V$ ist die Zahl

  $$\|v - w\| := \sqrt{(v - w) \cdot (v - w)}\ .$$

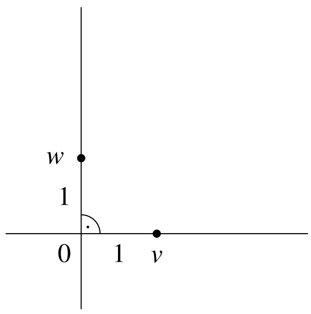
  Da ein Skalarprodukt positiv definit ist, kann $(v - w) \cdot (v - w)$ nicht negativ sein, also kann aus dieser Zahl die Wurzel gezogen werden.

- Statt $\|v - 0\|$ schreiben wir einfach $\|v\|$ und nennen diese nicht-negative reelle Zahl die *Norm* von v.

- Die Geraden in V durch 0 und v und durch 0 und w stehen *zueinander normal (orthogonal)*, wenn $v \cdot w = 0$ ist.

- Zwei Geraden in V stehen *zueinander normal (orthogonal)*, wenn die dazu parallelen Geraden durch 0 zueinander normal stehen.

Auf der Zeichenebene (die man nach Wahl eines Nullpunkts als Vektorraum auffasst) wird ein Skalarprodukt durch die Wahl eines „rechtwinkeligen Koordinatensystems“ festgelegt: Man wählt auf der Ebene ein Koordinatensystem, das sind zwei Zahlengeraden, die einander in ihrem Nullpunkt 0 schneiden. Damit können wir jeden Punkt der Ebene als Zahlenpaar auffassen. Wir wählen die Koordinatenachsen so, dass sie dem entsprechen, was wir uns unter „zueinander normal stehen“ vorstellen. Mit v und w bezeichnen wir die Punkte mit den Koordinaten $(1,0)$ und $(0,1)$. Nun wählen wir das Skalarprodukt so, dass seine Gram'sche Matrix bezüglich der Basis (v, w) die Einheitsmatrix ist.



$$v \cdot v = 1 = w \cdot w$$
$$v \cdot w = 0 = w \cdot v$$

Abb. 3: Wahl eines rechtwinkeligen Koordinatensystems in der Ebene.

Dann ist das Skalarprodukt auf der Zeichenebene eindeutig festgelegt und ist das Standardskalarprodukt, falls wir die Zeichenebene mit dem gewählten Koordinatensystem als Vektorraum $\mathbb{R}^2$ auffassen:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (av + bw) \cdot (cv + dw) = ac + bd.$$

Die Koordinatenachsen stehen dann auch in dem oben definierten Sinn zueinander normal.

2.2. Ein Skalarprodukt in der Physik

In der Physik wird manchmal vom „Skalarprodukt“ von Vektoren verschiedener Vektorräume gesprochen. Wir zeigen an Hand eines Beispiels, was damit gemeint ist.

Wir betrachten ein Schiff, das von einem Auto auf der zum Ufer parallelen Straße flußaufwärts gezogen wird. Entlang des vom Schiff zurückgelegten Weges in Richtung s wirkt konstant die gerichtete Kraft F.

Wir möchten jedem Paar (Weg, Kraft) die „Arbeit“ zuordnen, die verrichtet wird, wenn die Kraft entlang des vorgegebenen Weges wirkt. Diese Zuordnung soll bilinear sein und 0 Nm betragen, wenn Kraft und

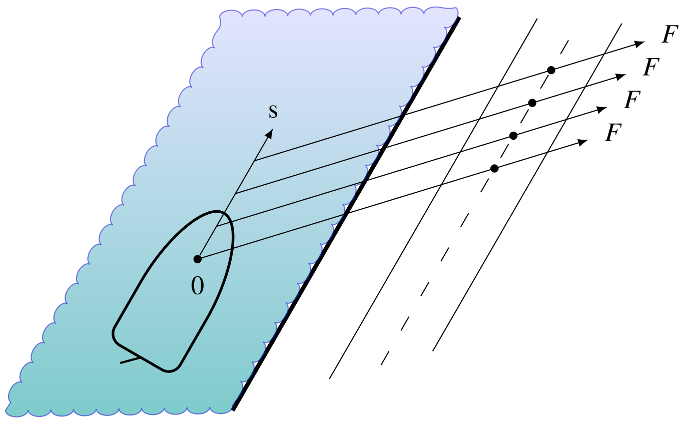


Abb. 4: Ein Schiff, das von einer zum Ufer parallelen Straße aus flußaufwärts gezogen wird.

Weg zueinander normal stehen und 1 Nm, wenn die Kraft 1 N parallel zum Ufer 1 m lang wirkt. Wir betrachten dazu die zwei Vektorräume der Wege und der (konstanten) Kräfte und wählen jeweils eine Basis:

- $\mathcal{W}$ sei der „Vektorraum der Wege“, in dem wir die folgende Basis (s_1, s_2) wählen:

  s_1 Weg 1 m parallel zum Ufer,

  s_2 Weg 1 m normal zum Ufer.

- $\mathcal{F}$ sei der „Vektorraum der (konstanten) Kräfte“, in dem wir die folgende Basis (F_1, F_2) wählen:

  F_1 Kraft 1 N parallel zum Ufer,

  F_2 Kraft 1 N normal zum Ufer.

- Die „Arbeit“ in Nm wird dann durch die durch

$$A(F_1, s_1) = 1\,,\ A(F_1, s_2) = 0\,,\ A(F_2, s_1) = 0\,,\ A(F_2, s_2) = 1\,,$$

  eindeutig festgelegte bilineare Funktion $A : \mathcal{F} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben.

Wenn wir sowohl die Wege als auch die Kräfte durch Koordinatenspalten bezüglich der gegebenen Basen darstellen, wird die Arbeit durch das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Um vom „Skalarprodukt eines Weges mit einer Kraft“ sprechen zu können, müssen wir aber erst in beiden Vektorräumen eine Basis auswählen. Ohne den Bezug auf diese Basen hat die Sprechweise vom „Skalarprodukt eines Weges mit einer Kraft“ keinen Sinn.

Auf ähnliche Weise kann Aufgabe 3 der standardisierten Reifeprüfung 2015 „gerettet“ werden. Nach Wahl einer Geldeinheit kann G als Spalte von Zahlen aufgefasst werden

3. Skalarprodukt und Geometrie

3.1. Vom Skalarprodukt zum Satz von Pythagoras

Wenn auf einem reellen Vektorraum ein Skalarprodukt gegeben ist, können die meisten Sätze der euklidischen Geometrie sehr einfach bewiesen werden. Man nennt daher einen endlich-dimensionalen reellen Vektorraum mit Skalarprodukt auch einen *euklidischen Raum*. Das ist der „richtige Rahmen“, in dem euklidische Geometrie betrieben werden kann.
Um den Satz von Pythagoras herzuleiten, wählen wir zwei Punkte v und w auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Dann ist $v \cdot w = 0$.

Wir berechnen nun einfach das Quadrat des Abstandes von v zu w

$$\|v-w\|^2 = (v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - w\cdot v - v\cdot w + w\cdot w = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

und haben den Satz von Pythagoras bewiesen.

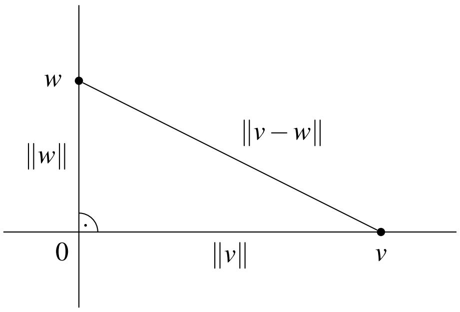


Abb. 5: Satz von Pythagoras.

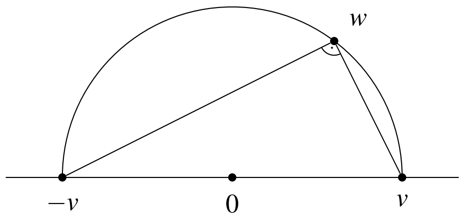


Abb. 6: Satz von Thales.

Um den Satz von Thales herzuleiten, wählen wir zwei Punkte v und w, die denselben Abstand zu 0 haben. Die Gerade durch v und w und die Gerade durch $-v$ und w stehen genau dann zueinander normal, wenn die dazu parallelen Geraden durch 0 zueinander normal stehen. Diese sind die Geraden durch 0 und $w-v$ und durch 0 und $w+v$.

Wegen

$$(w-v)\cdot(w-(-v)) = (w-v)\cdot(w+v) = w\cdot w - v\cdot v = \|w\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

stehen diese Geraden zueinander normal.

3.2. Vom Satz von Pythagoras zum Skalarprodukt

Anstatt die Begriffe Abstand und rechter Winkel mithilfe eines Skalarproduktes zu definieren und dann damit den Satz von Pythagoras zu beweisen, kann man auch umgekehrt vorgehen: Wir nehmen nun an, dass wir die Begriffe Abstand und rechter Winkel und den Satz von Pythagoras schon kennen (zum Beispiel aus der Elementargeometrie).
Der Abstand $\overline{AB}$ zweier Punkte A und B im $\mathbb{R}^2$ ist dann nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2},$$

das ist dieselbe Zahl wie der oben definierte Abstand $\|A-B\|$.

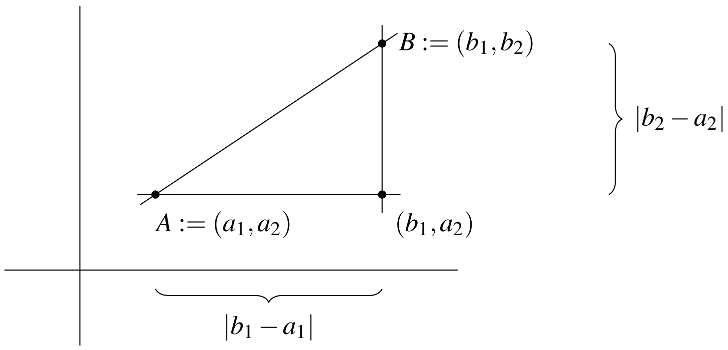


Abb. 7: Entfernungen in Richtung der Koordinatenachsen.

Wie prüft man nach, ob für zwei Punkte C und D in $\mathbb{R}^2$ die Gerade durch 0 und C und die Gerade durch 0 und D zueinander normal stehen? Nach dem Satz von Pythagoras ist

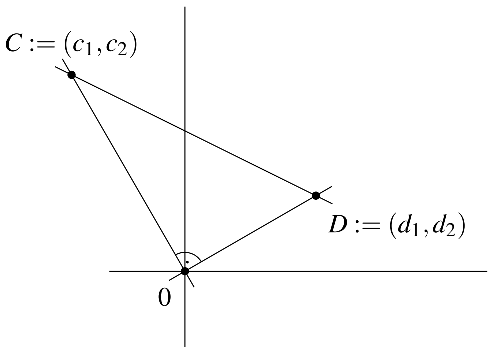


Abb. 8: Vom Satz von Pythagoras zum Skalarprodukt.

$$\angle C0D \text{ rechter Winkel} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = \overline{0C}^2 + \overline{0D}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 = (c_1^2 + c_2^2) + (d_1^2 + d_2^2) \Leftrightarrow c_1 d_1 + c_2 d_2 = 0$$

Diese zwei Geraden stehen also genau dann zueinander normal, wenn

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 = 0$$

ist. Das motiviert die Definition des Skalarproduktes von C und D durch

$$C \cdot D := c_1 d_1 + c_2 d_2.$$

3.3. Fußpunkt des Lotes und Winkel

Sind v und w zwei Vektoren eines euklidischen Raumes V, so nennt man den Schnittpunkt der Geraden g durch 0 und v mit der dazu normal stehenden Geraden durch w den *Fußpunkt des Lotes von w auf die Gerade g*. Dieser Punkt von g muss ein Vielfaches cv von v sein. Die Zahl c kann leicht berechnet werden, denn es muss $v \cdot (w - cv) = 0$ sein. Daraus folgt $v \cdot w = c(v \cdot v)$. Der Fußpunkt des Lotes von w auf die Gerade g ist also $\frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$.

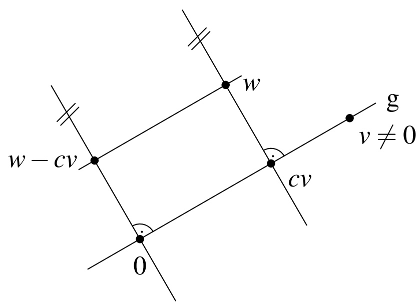


Abb. 9: Fußpunkt des Lotes.

Ist nun z irgendein anderer Punkt von g, dann bilden die drei Punkte z, w und der Fußpunkt des Lotes $\frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$ ein rechtwinkeliges Dreieck. Der Abstand von w zu z ist die Länge der Hypothenuse dieses Dreiecks, also größer oder gleich dem Abstand von w zum Fußpunkt des Lotes.

Der Fußpunkt des Lotes von w auf die Gerade g ist daher der eindeutig bestimmte Punkt von g, der den kleinsten Abstand zu w hat.

Wir haben bisher nur rechte Winkel betrachtet, der Fußpunkt des Lotes ermöglicht nun die Berechnung beliebiger (nicht-orientierter) Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes:

Der Winkel zwischen zwei Halbgeraden (mit Anfangspunkt 0) $\mathbb{R}_{\geq 0} v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} w$ ist die Länge des kürzeren der zwei Kreisbögen, in die der Einheitskreis (mit Mittelpunkt 0) durch diese zwei Halbgeraden

unterteilt wird.
Es ist $0 \leq \alpha \leq \pi$ bzw. $0° \leq \alpha \leq 180°$. Mit v' bzw. w' bezeichnen wir die Schnittpunkte von $\mathbb{R}_{\geq 0}v$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}w$ mit dem Einheitskreis.

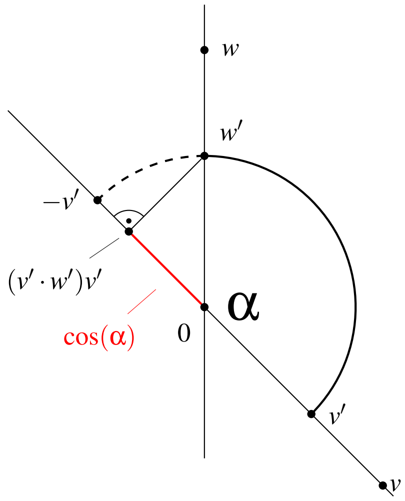


Abb. 10: Berechnung beliebiger (nicht-orientierter) Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes.

Dann ist

$$\|w'\| = 1 = \|v'\|, \; w = \|w\|\, w' \text{ und } v = \|v\|\, v'$$

und $(v' \cdot w')v'$ ist der Fußpunkt des Lotes von w' auf die Gerade durch 0 und v. Die Zahl $(v' \cdot w')$ ist durch α eindeutig bestimmt, wir nennen sie $\cos(\alpha)$, den Cosinus von α. Aus $\cos(\alpha) = (v' \cdot w') = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$ erhalten wir

$$v \cdot w = \cos(\alpha)\|v\|\,\|w\|.$$

Diese Beziehung wird manchmal auch verwendet, um das Skalarprodukt zu definieren.

4. Eine Anwendung des Skalarproduktes in der Statistik

Für die *(homogene) lineare Regression* ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir nehmen dabei an, dass die Einträge in der ersten Zeile zunächst paarweise verschieden sind und schreiben x für die erste und y für die zweite Zeile. Man sucht eine reelle Zahl k so, dass gilt:

$$y = kx, \text{ also: } y_i = kx_i\,, \; 1 \leq i \leq n.$$

Im oberen Beispiel von Abbildung 11 existiert eine solche Zahl k, im unteren nicht.

Die gegebene Matrix kann man geometrisch auf zwei Arten interpretieren:

- Entweder betrachtet man ihre n Spalten (mit je zwei Einträgen) und stellt diese durch n Punkte im $\mathbb{R}^2$ dar (siehe dazu die Bilder in der linken Hälfte von Abbildung 11),
- oder man betrachtet ihre 2 Zeilen und stellt diese durch 2 Punkte im $\mathbb{R}^n$ dar (siehe dazu die Bilder in der rechten Hälfte von Abbildung 11).

Die Idee der *Methode der kleinsten Quadrate*, die für diese Aufgabe eine möglichst gute Näherungslösung findet, ist: Wenn y nicht auf der Geraden durch 0 und x liegt, dann gibt es keine exakte Lösung. Ersetze

Die n Spalten als Punkte im $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Die 2 Zeilen als Punkte im $\mathbb{R}^n$ dargestellt.

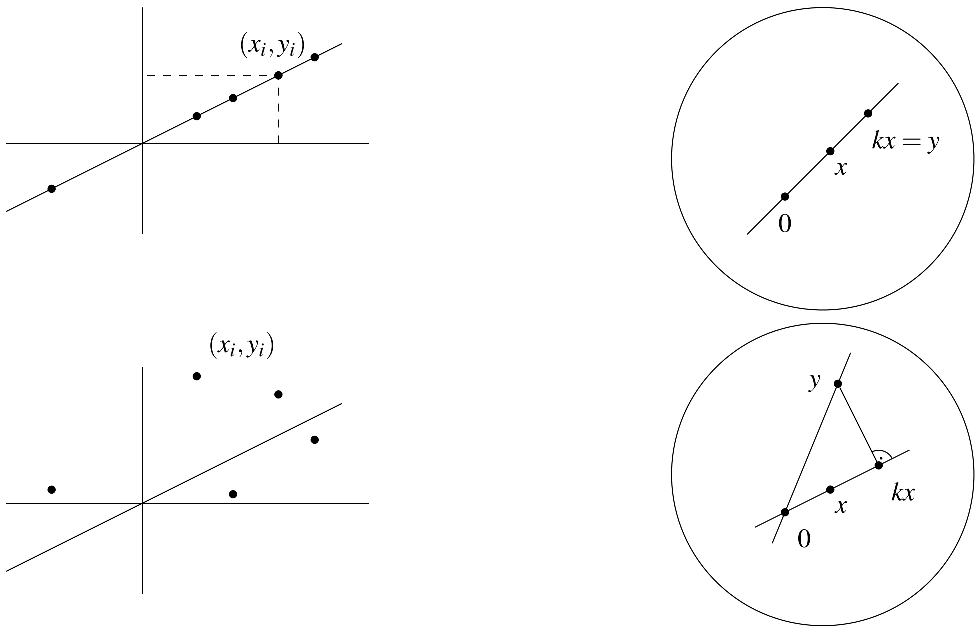


Abb. 11: Zwei Arten der geometrischen Interpretation der Daten x und y.

dann y durch jenen Punkt kx auf der Geraden durch 0 und x, der y am nächsten liegt. Also durch den Punkt kx mit der Eigenschaft, dass

$$\|y - kx\| = \sqrt{(y_1 - kx_1)^2 + \ldots + (y_n - kx_n)^2}$$

minimal ist (dabei haben wir das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ gewählt). Da die Wurzelfunktion monoton wachsend ist, ist $\sqrt{(y_1 - kx_1)^2 + \ldots + (y_n - kx_n)^2}$ genau dann minimal, wenn die Summe der „Fehlerquadrate“ $(y_1 - kx_1)^2 + \ldots + (y_n - kx_n)^2$ minimal ist.
Der Punkt kx ist der Fußpunkt des Lotes von y auf die Gerade durch 0 und x, daher ist

$$k = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Im linken Bild bedeutet $(y_1 - kx_1)^2 + \ldots + (y_n - kx_n)^2$ die Summe der Quadrate der „Vertikalabstände“ $|y_i - kx_i|$.

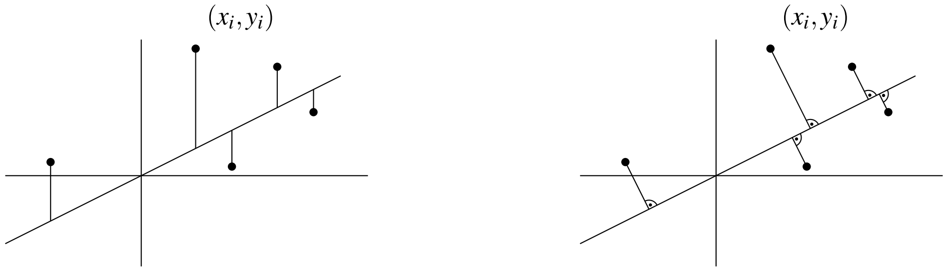


Abb. 12: Vertikalabstände (links) und Normalabstände (rechts).

Es kann aber dort geometrisch nicht erklärt werden, warum *diese* Summe minimal werden soll und nicht zum Beispiel die Summe der Normalabstände (siehe rechtes Bild in Abbildung 12) oder von deren Quadraten.

Für eine ausführlichere Darstellung der linearen Regression und weiterer Querverbindungen zwischen Stochastik und Linearer Algebra siehe Göbels (1996), Meyer (2004), Schulte-Mattler & Tysiak (2003) und Pauer (2012).

Wir danken Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen unseres Manuskripts und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

Literatur

BIFIE (2015): Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung, AHS, 11. Mai 2015, Mathematik. Aufgabenheft Teil 1. Haupttermin 2014/15 – Mathematik (AHS). Materialien und Publikationen. Online: `www.bifie.at/node/3014`.

Die Presse (2015): Mathematik-Zentralmatura: „Aufgaben sind sehr textlastig“. 12. Mai 2015. Online: `http://diepresse.com/home/bildung/schule/4729653/MathematikMatura_Aufgaben-sehr-textlastig`.

Göbels, W. (1996): Darstellung fairer Spiele mittels Linearer Geometrie. *Praxis der Mathematik* 38(3), 112–113.

Jänich, K. (2011): *Lineare Algebra*. 11. Auflage. Heidelberg: Springer.

Meyer, J. (2004): Vernetzungen zwischen Vektorgeometrie und Beschreibender Statistik. *Stochastik in der Schule* 24(1), 24–29.

Pauer, F. (2006): Was sind Vektoren? Wozu braucht man sie 2? *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 38, 87–98.

Pauer, F. (2012): Interpolation, lineare Gleichungen (mit und ohne Lösungen) und lineare Regression. *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 44, 59–68.

Pauer, F. und Stampfer, F. (2014): Mit Funktionen rechnen – ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 47, 62–67.

Schulte-Mattler, H. und Tysiak, W. (2003): Risikomanagement und Vektorrechnung *MNU, Der mathematische und naturwissenschaftliche* Unterricht 56(4), 198–201.