Algebra und Geometrie in der Schule, Wintersemester 2015/16

Kap. 2: Variable, Gleichungen, Formeln, Terme, Funktionen

Variable, Gleichungen, Formeln, Terme, Funktionen im Lehrplan der Sekundarstufe 1 (2000):

1.-4. Klasse: „Arbeiten mit Variablen"

1. Klasse:
„Mit Variablen allgemeine Sachverhalte beschreiben können, … , insbesondere Formeln bzw. Gleichungen aufstellen, Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können, Formeln anwenden und interpretieren können."

2. Klasse:
„Gleichungen und Formeln aufstellen", „einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen und Formeln umformen"

3. Klasse:
„Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können", „Formeln in Sachsituationen und in der Geometrie aufstellen können"

4. Klasse:
„Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern, Arbeiten mit einfachen Bruchtermen", „Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können", „durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten einen intuitiven Funktionsbegriff erarbeiten"

Inhalt

Zu 2.1 „Gleichungen“, „Variable“ (bzw. „Platzhalter“) und „Formeln“

Gleichung
Eine *Gleichung* ist eine Aufgabe, bei der eine Funktion f und ein Element b des Bildbereiches gegeben sind. Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ (durch endlich viele Daten) der Menge aller Elemente des Definitionsbereichs, deren Bild b ist (also die Menge aller x im Definitionsbereich mit $f(x)=b$). Diese Menge heißt *Lösungsmenge* der Gleichung, ihre Elemente heißen *Lösungen*. Die Gleichung *lösen* heißt, diese Beschreibung zu ermitteln.

Wenn die Funktion f linear, polynomial, ein Differentialoperator, … ist, heißt die Gleichung linear, polynomial, Differentialgleichung, … .

Beispiel (Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten): Gegeben sind eine lineare bzw. affine Funktion f von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$ (oder von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$) und eine rationale (oder reelle) Zahl c. Gesucht sind alle Zahlen x mit $f(x)= c$.
Da solche affine Funktionen durch zwei Zahlen a und b gegeben sind (für alle x ist $f(x) = ax+b$), kann das ohne Verwendung des Begriffs „Funktion“ so formuliert werden: Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten ist durch drei Zahlen a, b, c mit $a\neq 0$ gegeben. Gesucht sind alle Zahlen x mit $ax+b=c$.

Beispiel (Quadratische Gleichungen): Gegeben ist eine quadratische Funktion f von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ (oder von $\mathbf{C}$ nach $\mathbf{C}$). Gesucht sind alle Zahlen x mit $f(x)=0$.
Formulierung ohne Funktionsbegriff: Gegeben sind drei Zahlen a, b, c mit $a\neq 0$, gesucht sind alle reellen (bzw. komplexen Zahlen) mit $ax^2+bx+c=0$.

Strategie zum Lösen von Gleichungen: Ersetze die Gleichung durch eine „einfachere“ Gleichung mit derselben Lösungsmenge („*erlaubtes Umformen*“). Wiederhole das solange, bis man bei einer Gleichung angelangt ist, deren Lösung „unmittelbar ersichtlich“ ist.

Beispiel: Die Menge aller Zahlen x mit $ax+b = c$ ist dieselbe wie die mit $ax = c-b$ und die mit $x =(c-b)/a$.

Beispiel: Die Menge aller Zahlen x mit $ax^2+bx+c=0$ ist dieselbe wie die Menge aller Zahlen x mit $(x+b/(2a))^2 = (b^2/(4a) – c)/a$.

Formel
Eine *Formel* ist eine Aussage, die behauptet, dass zwei Funktionen gleich sind.

Vorsicht: Das Gleichheitszeichen wird in mehreren Bedeutungen verwendet.
Für Gleichungen: Finde x mit $f(x)=c$. Erwartete Antwort: Beschreibung der Lösungsmenge.

Für Behauptungen, dass zwei Objekte gleich sind: z. B. Formeln, $1+1=2$ oder $1+1=3$.
Erwartete Antwort: „richtig“ oder „falsch“.

Für Definitionen (zumeist mit Doppelpunkt verbunden): $f(x):=x^2+1$, Schimmel: = weißes Pferd. Erwartete Antwort: Das merke ich mir.

Zu 2.2 „Terme“

Was bedeutet das Wort „Term“ im Schulunterricht?

Vermutung 1: „Term“ ist ein Wort wie „Gegenstand“ oder „Ding“, dessen Bedeutung nur im Zusammenhang mit einer Zeigehandlung („dieser Term“, „der Term, den ich gerade auf die Tafel geschrieben habe“, wie „dieses Ding da“) klar wird.

Vermutung 2: Auf das Wort „Term“ kann in der Sekundarstufe 1 verzichtet werden, da es sich beim „Rechnen mit Termen“ immer um Rechnen mit (ganzen, rationalen, algebraischen, reellen) Zahlen handelt.
Beispiel: Für je zwei Zahlen a und b ist $(a+b)(a-b) = a^2- b^2$. Aus dem Distributivgesetz und dem Kommutativgesetz für die Multiplikation von Zahlen folgt nämlich
$(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2- b^2$.

Vermutung 3: „Terme“ sind Polynome (in einer oder mehreren Variablen) bzw. Polynomfunktionen,„Bruchterme“ sind rationale Funktionen (siehe z.B. Reichel, H., Litschauer, D., Groß, H.: Das ist Mathematik 4, 2. Aufl. , öbv-hpt Verlag, Wien 2005, Seite 32).
Die „Variable x“ ist die identische Funktion x: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $x(t)=t$. Potenzfunktionen sind dann Potenzen von x, Polynomfunktionen sind Linearkombinationen von Potenzfunktionen.

Vermutung 4: „Term“ wird im Sinn der mathematischen Logik als n-Tupel von Elementen einer vorgegebenen Menge (von „Zeichen“) verstanden, das nach gewissen Regeln gebildet wurde. Die Bedeutung dieser „Zeichenkette“ muss zusätzlich angegeben werden.

Vermutung 5: „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Es geht dabei um die Einübung der Rechenregeln in kommutativen Ringen (z.B. Ableitung der „binomischen Formeln“). Im Schulunterricht gibt es zwei wichtige Beispiele für kommutative Ringe: Zahlbereiche und reellwertige Funktionen (mit den punktweisen Rechenoperationen). „Termrechnung“ ist der allgemeine Überbau für diese zwei Beispiele.

Zu 2.3 Funktionen

Funktion
Eine *Funktion* von einer Menge M nach einer Menge N ist eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet. M heißt dann der *Definitionsbereich* der Funktion, N der *Bildbereich*.
Mit Funktionen werden Zusammenhänge zwischen Mengen beschrieben.
Der *Graph* einer Funktion f von M nach N ist die Menge aller Paare (m, f(m)), wobei m ein Element von M ist. Der Graph ist eine Teilmenge von MxN.

Darstellung von Funktionen
- Tabelle
- Graph (Diagramm)
- Streifenschaubild (Histogramm)
- Streckenschaubild (Stabdiagramm)
- Piktogramm
- Liste oder n-Tupel (falls der Definitionsbereich die Menge der Zahlen 1,2,…, n ist)
- Familie
- …

Schreibweise nach ÖNORM A 6406
f (oder ein anderes Symbol) für eine Funktion,
f(x) (Sprechweise: f von x) für den Funktionswert an der Stelle x
(Beachte: Wenn f reellwertig ist, dann ist f(x) eine reelle Zahl).

Funktionen im Lehrplan der Sekundarstufe 1
1. Klasse: „direkte Proportionalitäten erkennen (zB Warenmenge-Geld, Zeit-Weg)“, „Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können“.

2. Klasse: „charakteristische Kennzeichen von indirekten und direkten Proportionalitäten an Beispielen angeben können“.

3. Klasse: „lineare Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können (zB Zinssätze)“, „funktionale Abhängigkeiten erkennen, formelmäßig und graphisch darstellen“.

4. Klasse: „durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten einen intuitiven Funktionsbegriff erarbeiten“, „funktionale Abhängigkeiten untersuchen und darstellen“.

Zu 2.4 Modellbildung mit Funktionen
Pauer, F.: Schlussrechnung, Modellbildung und Interpolation.
Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 40 (2008), Seiten 91-98.

Zu 2.5 Prozentrechnung
Sei p eine nicht negative rationale Zahl und z ein Element, das mit nicht negativen rationalen Zahlen (skalar) multipliziert werden kann (zum Beispiel eine rationale Zahl oder ein Element eines rationalen Vektorraums). .
p Prozent von z: = (p/100).z , Schreibweise: p% von z