Mit Funktionen rechnen – ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2

Franz Pauer, Florian Stampfer (Universität Innsbruck)

1. Einleitung

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 lernt man ganze und rationale Zahlen kennen, mit ihnen zu rechnen, ihre Rechenregeln anzuwenden und lineare Gleichungen mit einer Unbekannten zu lösen. Die zentralen Objekte in der Sekundarstufe 2 sind reellwertige Funktionen. Mit reellwertigen Funktionen wird auch gerechnet. Die Rechenregeln dafür sind jenen für ganze Zahlen sehr ähnlich, es gibt aber auch einen wichtigen Unterschied. Das Verständnis wichtiger Themen, wie etwa der Summen- oder Produktregel der Differenzialrechnung, erfordert die ausdrückliche Erklärung dessen, was mit Summe und Produkt von Funktionen gemeint ist.

2. Rechnen mit Zahlen

Im Lauf der Schulzeit lernt man die *Zahlbereiche* der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen (oder Bruchzahlen), der Dezimalzahlen (jene rationalen Zahlen, die als Nenner eine Potenz von 10 zulassen), der reellen Zahlen und manchmal auch der komplexen Zahlen kennen. Mit Zahlbereich meinen wir dann nicht nur die jeweilige Menge von Zahlen, sondern betrachten sie immer zusammen mit den *Rechenoperationen* Addition und Multiplikation. In Zahlbereichen kann man also addieren und multiplizieren. Bezeichnen wir die Menge der ganzen bzw. rationalen bzw. reellen bzw. komplexen Zahlen mit $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und die Menge der Dezimalzahlen mit $\mathbb{D}$, dann ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Menge der irrationalen Zahlen (das Komplement von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) bildet keinen Zahlbereich, weil Summen und Produkte von irrationalen Zahlen nicht wieder irrational sein müssen.

In allen Zahlbereichen gelten für die Addition und die Multiplikation die folgenden grundlegenden *Rechenregeln*:

Für alle Zahlen a, b, c ist

- $a+b = b+a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
  (Kommutativgesetz; die Summanden bzw. die Faktoren dürfen vertauscht werden)
- $(a+b)+c = a+(b+c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  (Assoziativgesetz; beim Addieren und Multiplizieren können Klammern weggelassen werden)
- $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
  (Distributivgesetz; man kann ausmultiplizieren und herausheben)
- $a+0 = a$ und $a \cdot 1 = a$
  (neutrale Elemente; die Zahl 0 addieren oder mit der Zahl 1 multiplizieren verändert nichts)

und zu jeder Zahl a

- gibt es eine Zahl $-a$ mit $a+(-a) = 0$ (bezüglich der Addition gibt es inverse Elemente; die Umkehrung der Addition ist möglich).

Es ist eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe 1, diese Rechenregeln gut einzuüben und sie (zum Beispiel beim Umformen von Gleichungen) anzuwenden.

In der Algebra wird eine Menge zusammen mit zwei Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ ein *kommutativer Ring* genannt, wenn diese grundlegenden Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ gelten. Ein erstes wichtiges Beispiel für kommutative Ringe sind die genannten Zahlbereiche mit ihrer Addition und Multiplikation.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 47, 2014, S. 1–6
Version 1 vom 4.11.2014

In allen diesen Zahlbereichen kann die Subtraktion (als „Umkehrung der Addition“) durch

$$a - b := a + (-b)$$

definiert werden, die Division (als „Umkehrung der Multiplikation“) durch alle von 0 verschiedene Zahlen ist nur in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{D}$ möglich.

Aus den grundlegenden Rechenregeln können viele weitere abgeleitet werden, zum Beispiel
Für alle Zahlen a, b ist

- $-(a+b) = -a-b$
- $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$
- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)^2 = a^2+2a\cdot b+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2a\cdot b+b^2$

Die drei letzteren heißen binomische Formeln. Man erhält sie durch zweifaches Ausmultiplizieren (Anwenden des Distributivgesetzes) und Vertauschen von Faktoren (Verwendung des Kommutativgesetzes der Multiplikation).
Zum Beispiel: $(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) = a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b = a\cdot a-a\cdot b+a\cdot b-b\cdot b = a^2-b^2$. Interessant an dieser Rechenregel ist, dass man zwei Multiplikationen auf eine zurückführen kann. Zum Beispiel kann man so 91^2-89^2 im Kopf berechnen:

$$91^2-89^2 = (91-89)\cdot(91+89) = 2\cdot 180 = 360.$$

3. Rechnen mit Funktionen

3.1. Funktionen

Funktionen sind **das** Thema des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe 2. Während in der Sekundarstufe 1 vor allem Sachverhalte modelliert werden, die mit einer Zahl beschrieben werden können (wie Längen, Zeit, Gewicht, ...), werden in der Sekundarstufe 2 komplexere Sachverhalte, nämlich Zusammenhänge zwischen Mengen, beschrieben.

Eine Funktion ist durch zwei Mengen (Definitionsbereich D und Wertebereich W) und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element von D genau ein Element von W zuordnet, gegeben.

Beispiele für Funktionen findet man überall, auch im Alltag:

- Jede Ware in einem Kaufhaus hat genau einen Preis (in Euro).
  Der Definitionsbereich ist die Menge aller Waren in diesem Kaufhaus, der Wertebereich die Menge der rationalen oder reellen Zahlen. Die Zuordnung wird durch die Leitung des Kaufhauses definiert: Jeder Ware wird genau eine Zahl, ihr Preis in Euro, zugeordnet.
- Bei einer Umfrage nennen die befragten Personen ihre Lieblingsfarbe und zwar genau eine.
  Der Definitionsbereich ist die Menge aller befragten Personen, der Wertebereich ist die Menge aller Farben. Jeder Person wird ihre Lieblingsfarbe zugeordnet. In der beschreibenden Statistik würde man diese Funktion das „Merkmal Lieblingsfarbe“ nennen.
- Jeder reellen Zahl wird das Dreifache ihres Quadrates zugeordnet.
  Die Menge der reellen Zahlen ist Definitions- und Wertebereich. Die Funktion ordnet jeder Zahl z die Zahl $3z^2$ zu.
- Jedem Zeitpunkt wird das Tempo (in km/h) eines bestimmten Autos zu diesem Zeitpunkt zugeordnet.
  Der Definitionsbereich ist ein Zeitintervall, aufgefasst als Menge von Zeitpunkten, der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen.

Es gibt mehrere Schreibweisen für Funktionen, zum Beispiel ist mit

$$f\colon D \longrightarrow W, d \longmapsto f(d)$$

die Funktion mit Definitionsbereich D und Wertebereich W gemeint, die jedem Element d des Definitionsbereiches das Element $f(d)$ des Wertebereiches zuordnet. Dieses Element muss eindeutig bestimmt sein und heißt Funktionswert von f an der Stelle d. Auch die „Familienschreibweise" $(f(x))_{x\in D}$ statt f ist üblich, man muss dazu aber vorher den Wertebereich vereinbart haben. Keineswegs darf diese Schreibweise zu $f(x)$ verkürzt werden, es muss klar zwischen der Funktion f und dem Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x unterschieden werden. Das ist für das Verständnis des Funktionsbegriffes wichtig und wird auch von der ÖNORM A 6406 gefordert: diese schreibt die Bezeichnung f (oder ein anderes Zeichen) für die Funktion und $f(x)$ für ihren Funktionswert an der Stelle x vor.

3.2. Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Reellwertige Funktionen sind Funktionen, deren Bildbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Im weiteren betrachten wir reellwertige Funktionen, die denselben Definitionsbereich D haben. Dieser kann eine beliebige Menge sein, häufig ist er eine Teilmenge der reellen Zahlen. Für Funktionen f,g von D nach $\mathbb{R}$ sind deren Summe $f+g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und deren Produkt $f\cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\text{für alle } z \in D \text{ ist } (f+g)(z) := f(z)+g(z) \text{ und } (f\cdot g)(z) := f(z)\cdot g(z)$$

definiert.
Bei diesen Definitionen werden die Zeichen $+$ und $\cdot$ mit zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet: Das Zeichen $+$ zwischen f und g steht für die neu definierte Summe von Funktionen, das $+$ zwischen $f(z)$ und $g(z)$ steht für die schon bekannte Summe von reellen Zahlen, analog beim Produkt.
Ist c eine reelle Zahl, schreiben wir c auch für die („konstante") Funktion von D nach $\mathbb{R}$, die jedem Element von D die Zahl c zuordnet. Man nennt dann das Produkt der konstanten Funktion c mit einer Funktion f das „c-fache von f".
Für $f\cdot f$ schreiben wir auch f^2.

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2 kommen Summe und Produkt von reellwertigen Funktionen häufig vor, wir nennen einige der bekanntesten Beispiele dafür:

- Summenregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f,g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihre Summe $f+g$. Es ist $(f+g)' = f'+g'$.
- Produktregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f,g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihr Produkt $f\cdot g$. Es ist $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$.
- Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, so ist jede Stammfunktion dieser Funktion die Summe $F+c$ von F und einer konstanten Funktion.
- Die Summe und das Produkt von zwei konvergenten Folgen sind wieder konvergent. (Reelle Folgen sind reellwertige Funktionen, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist).
- Die Summe und das Produkt von zwei stetigen Funktionen ist wieder stetig.
- Sind X und Y reelle Zufallsvariable (das sind gewisse reellwertige Funktionen, deren Definitionsbereich ein Wahrscheinlichkeitsraum ist), dann auch ihre Summe $X+Y$. Der Erwartungswert von $X+Y$ ist die Summe der Erwartungswerte von X und von Y.
- Ist X eine reelle Zufallsvariable und $E(X)$ ihr Erwartungswert, dann ist ihre Varianz $Var(X)$ als Erwartungswert der Zufallsvariablen $(X-E(X))^2$ definiert. Diese ist das Quadrat der Differenz der Zufallsvariablen X und der konstanten Funktion $E(X)$.
- $sin^2 + cos^2 = 1$ (hier wird 1 als konstante Funktion betrachtet).
- Summen und Vielfache von Lösungen von homogenen linearen Differenzialgleichungen sind wieder Lösungen.

3.3. Regeln für das Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Für reellwertigen Funktionen gelten die gleichen grundlegenden Rechenregeln wie für das Rechnen in Zahlbereichen:

Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h mit demselben Definitionsbereich ist

- $f + g = g + f$ und $f \cdot g = g \cdot f$
  (Kommutativgesetz; die Summanden bzw. die Faktoren dürfen vertauscht werden)
- $(f + g) + h = f + (g + h)$ und $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
  (Assoziativgesetz; beim Addieren und Multiplizieren können Klammern weggelassen werden)
- $(f + g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$
  (Distributivgesetz; man kann ausmultiplizieren und herausheben)
- $f + 0 = f$ und $f \cdot 1 = f$
  (neutrale Elemente; die konstante Funktion 0 addieren oder mit der konstanten Funktion 1 multiplizieren verändert nichts)

und zu jeder reellwertigen Funktion f

- gibt es eine Funktion $-f$ mit $f + (-f) = 0$ (bezüglich der Addition gibt es inverse Elemente; die Umkehrung der Addition ist möglich).

Diese Rechenregeln müssen nicht mehr eingeübt werden, da sie vom Rechnen mit Zahlen schon bekannt sind. Man prüft sie nach, indem man die entsprechenden Rechenregeln für Zahlen verwendet, zum Beispiel: $f \cdot g = g \cdot f$ genau dann, wenn für alle Elemente z des Definitionsbereichs $(f \cdot g)(z) = (g \cdot f)(z)$ ist. Das ist aber wegen $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = g(z) \cdot f(z) = (g \cdot f)(z)$ immer der Fall.
In der Sprechweise der Algebra: Die Menge aller reellwertigen Funktionen mit einem vorgegebenen Definitionsbereich ist zusammen mit der (oben definierten) Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring. Die Menge der reellwertigen Funktionen mit $+$ und $\cdot$ ist also das zweite wichtige Beispiel für kommutative Ringe im Schulunterricht. Ein weiteres Beispiel ist uns nicht bekannt. (Dabei sehen wir vom Rechnen mit Restklassen ab, das nur noch selten besprochen wird). In manchen Schultypen werden zwar noch andere Multiplikationen betrachtet (Multiplikation von Matrizen oder das vektorielle Produkt im $\mathbb{R}^3$), aber diese sind nicht kommutativ (und beim vektoriellen Produkt dürfen Klammern nicht einfach weggelassen werden).

Aus den grundlegenden Rechenregeln können auch für Funktionen viele weitere abgeleitet werden, zum Beispiel die binomischen Formeln:
Für alle Funktionen f, g ist

- $(f + g) \cdot (f - g) = f^2 - g^2$
- $(f + g)^2 = f^2 + 2f \cdot g + g^2$
- $(f - g)^2 = f^2 - 2f \cdot g + g^2$

Da wir beim Beweis der binomischen Formeln nur das Distributivgesetz und das Kommutativgesetz verwendet haben, ist es klar, dass sie in jedem kommutativen Ring gelten, insbesondere auch für das Rechnen mit reellwertigen Funktionen. Für die Varianz einer reellen Zufallsvariablen X folgt daraus:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Beim Rechnen mit Matrizen hingegen dürfen die binomischen Formeln nicht verwendet werden, weil die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

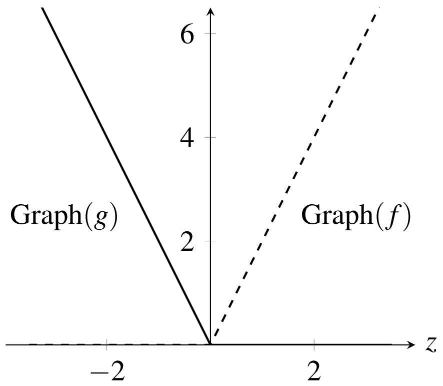
Es gibt aber einen wichtigen Unterschied zwischen dem Rechnen mit Zahlen und dem Rechnen mit Funktionen:
Das Produkt von zwei Funktionen, die beide nicht die Nullfunktion sind, kann die Nullfunktion sein!

In der Sprechweise der Algebra: Die Menge aller reellwertigen Funktionen mit $+$ und $\cdot$ ist zwar ein kommutativer Ring, aber kein Integritätsbereich.

Wir betrachten dazu die reellwertigen Funktionen f, g mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$, die durch $f(z) := |z| + z$ und $g(z) := |z| - z$ definiert sind. Beide Funktionen sind nicht die konstante Funktion 0, weil zum Beispiel $f(1) = 2$ und $g(-1) = 2$ ist. Für alle reellen Zahlen z ist aber

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = (|z| + z) \cdot (|z| - z) = |z|^2 - z^2 = 0,$$

daher ist $f \cdot g = 0$, obwohl $f \neq 0$ und $g \neq 0$ ist.



Aus $f \cdot g = 0 = f \cdot 0$ und $f \neq 0$ folgt also nicht $g = 0$! Somit ist Kürzen (durch Funktionen $\neq 0$) beim Rechnen mit Funktionen nicht immer erlaubt!

3.4. Polynomfunktionen

Ein einfacher und zugleich bedeutsamer Typ von Funktionen sind die Polynomfunktionen. Hat man das Rechnen mit Funktionen zur Verfügung, dann können Polynomfunktionen sehr einfach eingeführt werden und ihre Eigenschaften gut verstanden werden. Wir bezeichnen mit x die identische Funktion

$$x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto z.$$

Häufig wird diese Funktion auch die „Variable x“ genannt. Die k-te Potenzfunktion x^k ($k \in \mathbb{N}$) ist dann einfach das k-fache Produkt von x, also

$$x^k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto z^k.$$

Es ist nun wichtig, die Elemente des Definitionsbereiches mit einem anderen Buchstaben (hier z) zu bezeichnen, damit keine Verwechslung von Zahl und Funktion geschieht. Eine Polynomfunktion ist dann eine Summe von Vielfachen von Potenzfunktionen:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k z^k.$$

Nun sieht man sofort, dass alle Eigenschaften der identischen Funktion x, die unter Addition und Multiplikation von Funktionen erhalten bleiben, auch für alle Polynomfunktionen gelten. Zum Beispiel ist die identische Funktion x stetig und differenzierbar ($x' = 1$), dasselbe gilt daher für jede Polynomfunktion.
Da Produkte von Potenzfunktionen wieder Potenzfunktionen sind, prüft man leicht nach, dass Summen und Produkte von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind. Die Menge aller Polynomfunktionen ist daher mit $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Ring. Dieser Ring liegt näher bei den Zahlbereichen als der Ring aller reellwertigen Funktionen, er ist auch ein Integritätsbereich. Ist das Produkt zweier Polynomfunktionen die Nullfunktion, dann muss einer der Faktoren auch die Nullfunktion sein. Denn: Eine Polynomfunktion, die nicht die Nullfunktion ist, hat immer nur endlich viele Nullstellen. Die Nullstellenmenge des Produktes von zwei Funktionen ist die Vereinigung von deren Nullstellenmengen. Wenn beide endliche Mengen sind, dann auch ihre Vereinigung. Also hat das Produkt von zwei Polynomfunktionen,

die nicht die Nullfunktion sind, nur endlich viele Nullstellen und kann daher nicht die Nullfunktion sein. Diese Eigenschaft ermöglicht es, den Ring der Polynomfunktionen zum „Körper der rationalen Funktionen“ zu erweitern, analog der Erweiterung des Ringes der ganzen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen.

3.5. Hintereinanderausführung (Verkettung) von Funktionen

Für reellwertige Funktionen, deren Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist, gibt es noch eine Rechenoperation: die Hintereinanderausführung oder Verkettung von Funktionen. Für zwei solche Funktionen f,g ist die Hintereinanderausführung $f \circ g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

für alle reelle Zahlen z ist $(f \circ g)(z) := f(g(z))$

definiert. Aber Vorsicht: wir können die Verkettung nicht als Multiplikation auffassen, weil man nicht immer ausmultiplizieren darf: Es gibt Funktionen f,g,h mit $f \circ (g+h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)$! Darüber hinaus ist im allgemeinen auch $f \circ g \neq g \circ f$. In der Kettenregel der Differenzialrechnung spielt aber das in Abschnitt 3.2 definierte Produkt von Funktionen wieder eine Rolle: Sind die reellwertigen Funktionen f,g mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch deren Verkettung $f \circ g$ und

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

In Worten: Die Ableitung der Verkettung von f und g ist das Produkt der Ableitung von g mit der Verkettung von der Ableitung von f mit g.

4. Schlussbemerkungen

Das Rechnen mit reellwertigen Funktionen ist in der Sekundarstufe 2 fast omnipräsent, wird aber in den Lehrplänen nicht ausdrücklich erwähnt. Da das Wiedererkennen von Strukturen das Lernen erleichtert und das Erkennen von Gemeinsamkeiten das Verständnis vertieft, plädieren wir dafür, dieses Thema im Unterricht der Sekundarstufe 2 explizit anzusprechen. Insbesondere wäre es gut, Summe und Produkt von Funktionen nicht nur zu verwenden, sondern auch ausdrücklich einzuführen. Viele Aussagen über Funktionen und das Modellieren mit Funktionen könnten dadurch besser verstanden werden. Durch die Erkenntnis, dass das Rechnen mit Zahlen und das Rechnen mit Funktionen viele gemeinsame Regeln haben, kann auch das Verständnis für Rechenregeln vertieft und der Umgang damit erleichtert werden.

Ein Grund für Probleme im Umgang mit den Rechenoperationen für Funktionen könnte in der weit verbreiteten Praxis, die Schreibweisen für Funktion und Funktionswert nicht sauber zu trennen, liegen. Wenn man von „der Funktion $f(x)$“ und „der Funktion $g(x)$“ spricht, ist es natürlich schwer, die Addition von zwei Funktionen von der von Zahlen zu unterscheiden.

In den meisten Schulbüchern wird nach dem Rechnen mit Zahlen (samt Einüben der Rechenregeln) die sogenannte Termrechnung eingeführt. Gleich, was in einem Buch unter Term verstanden wird, in jedem Fall werden Terme addiert und multipliziert und es gelten beim Rechnen mit Termen die binomischen Formeln. Damit ist ziemlich klar, dass mit „Termrechnung“ in den Schulbüchern das verstanden wird, was in der Algebra „Rechnen in kommutativen Ringen“ genannt wird. Matrizenrechnung gehört nicht dazu. Im Schulunterricht gibt es im wesentlichen nur zwei Beispiele für kommutative Ringe: Rechnen in Zahlbereichen und Rechnen mit reellwertigen Funktionen. Wir stellen daher die folgenden didaktischen Fragen zur Diskussion:

- Ist es didaktisch sinnvoll, zu nur zwei Beispielen als „Überbau“ in den Unterricht eine allgemeine Theorie (gleich, ob man sie Rechnen in kommutativen Ringen oder Termrechnung nennt) einzubauen?
- Wenn ja, soll dann die allgemeine Theorie zwischen den zwei Beispielen platziert werden?