

**Proseminar Algebra und Geometrie in der Schule
Wintersemester 2014/15**

**15. bzw. 16. Dezember 2014,
HS F bzw. HS B7**

29) Aus: Timischl, W., Prugger, E.: Mathematik & Wirtschaft 4. E. Dorner, Wien, 2007.

Beispiel 7.6: Konjunkturmodell von Samuelson

Berechne aus der Differenzgleichung

$Y_n = a \cdot (b + 1) \cdot Y_{n-1} - a \cdot b \cdot Y_{n-2} + A$ mit $Y_0 = Y_1 = 400$ GE rechnergestützt schrittweise das Volkseinkommen Y_n bis $n = 50$ für $A = 100$ GE, wenn a) $a = 0,9$ und $b = 1 \dots$ ist \dots .

Berechnen Sie eine explizite Form der Lösung dieser Differenzgleichung mit vorgegebenen Anfangswerten Y_0 und Y_1 .

Y_n gibt das Einkommen der privaten Haushalte (Volkseinkommen) in der n -ten Rechnungsperiode an. Die folgenden Annahmen werden getroffen: Die Konsumausgaben C_n sind proportional dem Volkseinkommen der Vorperiode, also $C_n = a \cdot Y_{n-1}$ mit $0 < a < 1$. Die privaten Investitionen I_n sind proportional dem Zuwachs $C_n - C_{n-1}$ der Konsumausgaben, also $I_n = b \cdot (C_n - C_{n-1})$ mit $b > 0$. Die Regierungsausgaben A sind in jeder Periode gleich. In jeder Periode ist $Y_n = C_n + I_n + A$.

Lösung: Die Differenzgleichung

$$Y_n - 1,8Y_{n-1} + 0,9Y_{n-2} = 100$$

mit $Y_0 = Y_1 = 400$ wird durch den Shiftoperator

$$p := s^2 - 1,8s + 0,9,$$

die konstante Folge $h = (100, 100, \dots, 100, \dots)$ und die Anfangswerte $Y_0 = Y_1 = 400$ beschrieben:

$$p * Y = h.$$

Die Nullstellen von p sind $u := 0,9 + 0,3i$ und $v := 0,9 - 0,3i$. Division mit Rest von s^n durch p ergibt

$$s^n = m_n \cdot p + c_n \cdot s + d_n,$$

wobei c und d aus

$$u^n = m_n(u) \cdot p(u) + c_n \cdot u + d_n = c_n \cdot u + d_n$$

und

$$v^n = m_n(v) \cdot p(v) + c_n \cdot v + d_n = c_n \cdot v + d_n$$

berechnet werden. Also:

$$c_n = \frac{u^n - v^n}{u - v} \quad \text{und} \quad d_n = u^n - \frac{u^n - v^n}{u - v} \cdot u.$$

Wegen

$$1 = m_n(1) \cdot p(1) + c_n + d_n = 0,1 \cdot m_n(1) + c_n + d_n$$

ist

$$m_n(1) = 10 \left(1 - \frac{u^n - v^n}{u - v} - u^n + \frac{u^n - v^n}{u - v} \cdot u \right).$$

Daher ist

$$Y_n = (s^n * Y)(0) = (m_n * h)(0) + c_n \cdot Y_1 + d_n \cdot Y_0 = m_n(1) \cdot 100 + 400 \cdot (c_n + d_n).$$