Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2019

4., 5. und 6. März 2019

Die folgenden Aufgaben können mit Kenntnissen aus der Vorlesung Lineare Algebra gelöst werden.

1) Lösen Sie die folgenden Gleichungen (mit zwei Unbekannten u, w), ohne dabei irgendeine Rechenoperation auszuführen.
   a. 17.29u - 5.41w = 0
   b. 17.29u - 5.41w = 17.29
   c. u= 23.67
   d. w= 23.67
   Eine *implizite Form einer Geraden in* $\mathbb{R}^2$ ist eine Gleichung, deren Lösungsmenge diese Gerade ist. Finden Sie (ohne eine Rechenoperation auszuführen) eine implizite Form der Geraden durch $(0.345, 3.987)$ und $(0.345, 5.654)$ in $\mathbb{R}^2$.
   Finden Sie eine implizite Form der Geraden in $\mathbb{R}^2$, die den Punkt $(2, -3)$ enthält und parallel zur Geraden $\{c \cdot (4, 5) \mid c \in \mathbb{R}\}$ ist. Zeichnen Sie diese Gerade in ein Koordinatensystem.

2) Es seien M und N Mengen. Was ist eine *Funktion* von M nach N ? Was ist der *Graph* einer Funktion? Was ist das *Urbild* eines Elementes des Bildbereichs einer Funktion?
   a) Wir betrachten die Funktion, die jedem Punkt des Stadtbereichs von Innsbruck die Seehöhe (in Metern) zuordnet. Was ist der Graph dieser Funktion? Wodurch wird diese Funktion auf einer Wanderkarte von Innsbruck beschrieben?
   b) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion
   $$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (a, b) \longmapsto a - b,$$
   geometrisch. Skizzieren Sie die Urbilder von 1, -2 und 0.

3) Es seien n eine positive ganze Zahl, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, I eine endliche Menge und $(b_j)_{j\in I}$ eine Familie von ganzen Zahlen. Was bedeuten

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{und} \quad \sum_{z\in I} b_z \ ?$$

Schreiben Sie in Kurzform an: „Die Summe aller ungeraden positiven ganzen Zahlen, die kleiner oder gleich 100 sind."
Zeigen Sie: Ist n eine ungerade Zahl, dann ist die Summe aller ungeraden positiven Zahlen, die kleiner oder gleich n sind, eine Quadratzahl.

4) Was ist ein *kommutativer Ring* ? Welche der folgenden Mengen mit Addition und Multiplikation sind kommutative Ringe? Falls es sich nicht um einen kommutativen Ring handelt, geben Sie alle Rechenregeln an, die nicht gelten.
   - Die Menge aller ganzen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation (von ganzen Zahlen).
   - Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation.
   - Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderausführung von Funktionen.
   - Die Menge aller reellen 3×3-Matrizen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen.
   - Die Menge aller Tripel reeller Zahlen mit der komponentenweisen Addition und dem Vektorprodukt.

5) Beweisen Sie: Wenn a, b und c reelle Zahlen sind, dann ist

$$a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)\,.$$

Geben Sie an, welche Rechenregeln Sie dazu verwendet haben.
Geben Sie zwei 2×2 - Matrizen a und b so an, dass
$a^2 - b^2 \neq (a+b)(a-b)$ ist.

6) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Wie kann entschieden werden, ob eine Matrix invertierbar ist und zugleich die Inverse der Matrix berechnet werden? Wie kann mit der Determinante einer Matrix überprüft werden, ob diese invertierbar ist?
Zeigen Sie: Wenn eine reelle $n \times n$-Matrix A invertierbar ist, dann ist der Spaltenraum von A gleich $\mathbb{R}^{n\times 1}$.