

Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2018

6. und 7. März 2018

- 1) Es seien M und N Mengen. Was ist eine *Funktion* von M nach N ? Was ist der *Graph* einer Funktion? Was ist das *Urbild* eines Elementes des Bildbereichs einer Funktion?

a) Wir betrachten die Funktion, die jedem Punkt des Stadtbereichs von Innsbruck die Seehöhe (in Metern) zuordnet. Was ist der Graph dieser Funktion? Wodurch wird diese Funktion auf einer Wanderkarte von Innsbruck beschrieben?

- b) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (a, b) \longmapsto a + b,$$

geometrisch. Skizzieren Sie die Urbilder von 2, -3 und 0.

- 2) Es seien n eine positive ganze Zahl, a_1, a_2, \dots, a_n ganze Zahlen, I eine endliche Menge und $(b_j)_{j \in I}$ eine Familie von ganzen Zahlen. Was bedeuten

$$\sum_{j=1}^n a_j \quad \text{und} \quad \sum_{z \in I} b_z ?$$

Schreiben Sie in Kurzform an: „Die Summe aller ungeraden positiven ganzen Zahlen, die kleiner oder gleich 29 sind.“

Zeigen Sie: Ist n eine ungerade Zahl, dann ist die Summe aller ungeraden positiven Zahlen, die kleiner oder gleich n sind, eine Quadratzahl.

- 3) Was ist ein *kommutativer Ring*? Welche der folgenden Mengen mit Addition und Multiplikation sind kommutative Ringe?

- Die Menge aller ganzen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation (von ganzen Zahlen).
- Die Menge aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} mit der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation.
- Die Menge aller reellen 3×3 -Matrizen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen.
- Die Menge aller Tripel reeller Zahlen mit der komponentenweisen Addition und dem Vektorprodukt.

- 4) [Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 2. HTL. 2. Auflage, Österreichischer Bundesverlag, Wien 2013.]

Aufgabe 1128: Ein Händler verkauft vier Produkte an drei Vertriebspartner. Die Anzahl der jeweils verkauften Stück im vergangenen Monat kann der 3×4 -Matrix V entnommen werden. Den Verkaufspreis pro Stück der Produkte kann man in der Spalte P ablesen.

$$V := \begin{pmatrix} 200 & 600 & 100 & 300 \\ 50 & 250 & 100 & 100 \\ 300 & 800 & 200 & 450 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix},$$

- Ermittle, an welchen Händler die meisten Stück von Produkt 1 verkauft wurden.*
- Gib an, von welchem Produkt insgesamt die geringste Stückzahl verkauft wurde.*
- Berechne das Produkt $V \cdot P$. Welche Bedeutung hat diese Spalte für den Händler?*
- Berechne, wie viel der Händler insgesamt eingenommen hat.*

- 5) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Wie kann entschieden werden, ob eine Matrix invertierbar ist und zugleich die Inverse der Matrix berechnet werden? Wie kann mit der Determinante einer Matrix überprüft werden, ob diese invertierbar ist?

Zeigen Sie: Wenn eine reelle $n \times n$ -Matrix A invertierbar ist, dann ist der Spaltenraum von A gleich $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

- 6) Lösen Sie die folgenden Gleichungen (mit zwei Unbekannten), ohne dabei eine Rechenoperation auszuführen.

- $3,23 u + 5,41 w = 0$
- $3,23 u + 5,41 w = 3,23$
- $-1,11 x + 2,56 y = 0$
- $-1,11 x + 2,56 y = 2,56$
- $y = 11,8907$

Was ist eine *implizite Form* einer Geraden? Finden Sie eine implizite Form der Geraden durch $(3, 3)$ und $(3, 5)$ in \mathbb{R}^2 .

Finden Sie eine implizite Form der Geraden, die den Punkt $(1, 1)$ enthält und parallel zur Geraden $\{c \cdot (2, -3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ ist.