Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

29. Mai 2017

1) Was ist ein über $\mathbb{R}$ algebraisches Element in einer $\mathbb{R}$-Algebra? Was ist das Minimalpolynom eines solchen Elementes? Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

algebraisch über $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie ihr Minimalpolynom. Zeigen Sie, dass für jede reelle 2×2-Matrix A die drei Matrizen I_2, A, A^2 linear abhängig sind. Überprüfen Sie dann durch Rechnung, dass A eine Nullstelle seines charakteristischen Polynoms ist („Satz von Cayley und Hamilton"). Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix A (unterscheiden Sie dabei zwei Fälle).

2) Was ist ein *Algebrenhomomorphismus*? Wie ist der *Kern* einer solchen Funktion definiert? Beschreiben Sie die Kerne (durch Erzeugendensysteme dieser Ideale) und die Bilder (durch eine $\mathbb{Q}$-Basis dieser Vektorräume) der folgenden Algebrenhomomorphismen:

$$\alpha : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f(\sqrt{7})\ ,$$
$$\beta : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x],\ f \longmapsto f(x^2 - 1)\ ,$$
$$\gamma : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C},\ f \longmapsto f(i + 2)\ .$$

Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus, dann ist $g(i)$ eine Nullstelle von $x^2 + 1$. Bestimmen Sie alle $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

3) K sei ein Körper und $\mathcal{F}(K, K)$ die K-Algebra aller Funktionen von K nach K.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : K[x] \longrightarrow \mathcal{F}(K, K)$, die jedem Polynom die entsprechende Polynomfunktion zuordnet, ein K-Algebrenhomomorphismus ist. Welches normierte Polynom erzeugt den Kern von f? Unterscheiden Sie dabei die Fälle, dass K endlich und dass K nicht endlich ist. Kann f ein Isomorphismus sein?

4) Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon,A.: Mathematik 1 HTL. 2. Auflage. öbv, Wien 2013.
Aufgabe 233. Finde rationale Zahlen a, b, c so, dass die Behauptung richtig ist.
c. $(2\sqrt[3]{5}-3)(\sqrt[3]{5}-\frac{2}{3}) = a + b\sqrt[3]{5} + c(\sqrt[3]{5})^2$

Aus: Götz, S., Reichel, H. (Hrsg.) Mathematik 6. 1. Auflage. öbv, Wien 2010.
Aufgabe 378. Berechne !
a. $(\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{27})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
f. $(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{12})\cdot(3\sqrt{3}+\sqrt{5})$
Was bedeutet in dieser Aufgabe „Berechne !"?

5) Aus: Götz, S., Reichel, H. (Hrsg.) Mathematik 6. 1. Auflage. öbv, Wien 2010.

Aufgabe 371. Vereinfache durch partielles Wurzelziehen!
f. $\sqrt{350}$
Aufgabe 409. Befreie den Nenner von den Wurzeln und vereinfache!

$$d.\ \frac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$$

Erläutern Sie möglichst einfach, was bei den Aufgaben 371 und 409 gefragt ist und wie man sie löst. Sind die Antworten $18\sqrt{\frac{175}{162}}$ oder $10\sqrt{\frac{7}{2}}$ auf die Frage in Aufgabe 371 f. richtig?
Gibt es in Aufgabe 409 eigentlich einen (zu befreienden) Nenner? Ist die Antwort

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}\right)}{1}$$

richtig?

6) Berechnen Sie das Minimalpolynom in $\mathbb{Q}[x]$ der positiven reellen Zahl $\sqrt[3]{5}$. Finden sie rationale Zahlen a, b, c so, dass

$$\frac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} = a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$$

ist.

Lösen Sie diese Aufgabe auf zwei Arten: einmal mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus und einmal mithilfe eines Systems linearer Gleichungen mit 3 Unbekannten.