Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

22. Mai 2017

1) Was ist eine Äquivalenzrelation? Was sind Äquivalenzklassen bezüglich einer Äquivalenzrelation?
Zeigen Sie, dass durch $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a+d=b+c$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert wird.
Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse genau ein Element von $\{(a,0)|a \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,a)|a \in \mathbb{N}\}$ enthält.
Es sei Z die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$+ : Z \times Z \longmapsto Z, (\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \longmapsto \overline{(a+c,b+d)}$$
wohldefiniert ist und die Rechenregeln einer Addition erfüllt.
Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen $(Z,+)$ und $(\mathbb{Z},+)$?
Definieren Sie eine Multiplikation $\cdot$ auf Z so, dass Z mit der Addition $+$ und dieser Multiplikation ein kommutativer Ring ist und für alle $a,b \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\overline{(a,0)} \cdot \overline{(b,0)} = \overline{(ab,0)}\,.$$

2) Was ist eine *rationale Funktion* mit Koeffizienten in einem Körper K? Was heißt es, eine rationale Funktion zu kürzen? Kürzen Sie die rationalen Funktionen
$$\frac{x^4-8x^2+x^3-9x-9}{2x^4+5x^2+2x^3+3x+3} \in \mathbb{Q}(x)$$
und
$$\frac{x^4-x^2+x-2}{x^3-x^2-4x+1} \in \mathbb{Q}(x)$$
bestmöglich.

3) Was ist die *Partialbruchzerlegung* einer rationalen Funktion? Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung in $\mathbb{Q}(x)$ von
$$\frac{x^3+x+1}{(x-2)\cdot(x^2-3x+1)^2}\,, \qquad \frac{x+2}{x^8-x^7+x^6-x^2+x-1}$$
und
$$\frac{x+1}{x^5-3x^4-x^3+11x^2-12x+4}\,.$$

(In Maple kann ein rationales Polynom f mit dem Befehl factor(f) in irreduzible Faktoren zerlegt werden).

4) Wie können rationale Funktionen als Funktionen aufgefasst werden?

Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon,A.: Mathematik 1 HTL. 2. Auflage. öbv, Wien 2013.*Aufgabe 965. Berechne die Summe bzw. Differenz der rationalen Funktionen. Gib den Definitionsbereich der zwei rationalen Funktionen und ihrer Summe bzw. Differenz an. Kürze, wenn möglich.*

b. $\dfrac{3x}{8x^2+4x} + \dfrac{x-2}{2x+1}$ c. $\dfrac{1}{8x^2+4x} - \dfrac{1}{x^2-5^2}$.

5) Aus: Götz, S., Reichel, H. (Hrsg.) Mathematik 5. 1. Auflage. öbv, Wien 2010.*Aufgabe 273. Gib die Definitions- und Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ an! Achte auf Sonderfälle!*

$$\text{g. } \frac{x+2}{2x-1} - \frac{1-3x}{2x+3} = \frac{8x^2+2x+7}{4x^2+4x-3}$$

$$\text{h. } \frac{2x+3}{2x+5} - \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{9x^2-12x+20}{4x^2+4x-15} .$$

Erläutern Sie möglichst einfach, was bei dieser Aufgabe gefragt ist und wie man sie löst. Was bedeutet x in dieser Aufgabe?

6) Was ist die *quadratfreie Zerlegung* eines Polynoms? Wie kann man sie berechnen? Was ist die quadratfreie Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion? Berechnen Sie die quadratfreien Faktoren des Polynoms

$$g := x^5 + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} \in \mathbb{Q}[x] .$$

Berechnen Sie die quadratfreie Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{x^4+1}{g} .$$