Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

15. Mai 2017

1) Wie ist die *Ableitung* eines Polynoms definiert? Was sind *mehrfache Nullstellen* eines Polynoms?
Zeigen Sie: Das Polynom
$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n \in \mathbb{C}[x]$$
hat keine mehrfachen Nullstellen.
Überprüfen Sie, ob das Polynom
$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$
mehrfache Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ hat.

2) Wie kann die Anzahl der komplexen Nullstellen eines Polynoms berechnet werden? Es sei n eine positive ganze Zahl.
Berechnen Sie die Anzahlen der komplexen Nullstellen der Polynome
$$x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{19}{12}x^2 + \frac{13}{12}x + \frac{1}{4}\,,$$
$$x^{100} + 1\,, x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,.$$
Berechnen Sie dann alle Nullstellen von
$$x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\,.$$

3) Was ist eine *lineare Differenzengleichung der Ordnung* n? Wie kann eine solche gelöst werden?
Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 2 HTL. 2. Auflage, öbv, Wien, 2013.
Beispiel 576 c.: Berechne die ersten 8 Glieder der Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung:
$y_0 = 100$, $y_1 = 90$, $y_{n+2} = 0,2 \cdot y_{n+1} + 0,5 \cdot y_n$

Beispiel 584: Verändertes Kaninchenproblem nach Fibonacci: Wir nehmen an, dass ein Kaninchenpaar ab seinem zweiten Lebensmonat jeden Monat zwei Paar Junge bekommt und dass kein Kaninchen stirbt. Wie viele Kaninchen gibt es n Monate nach der Geburt des ersten Kaninchenpaares?
a. Beschreibe diese Aufgabe durch eine Differenzengleichung.
b. Berechne die Anzahl der Kaninchen nach einem Jahr.

Berechnen Sie das n-te Folgenglied der Lösung von Aufgabe 576.

4) Sei n eine positive ganze Zahl und a eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: Der Rest von x^n nach Division durch $x - a$ ist a^n und das Einsetzen von 1 in den polynomialen Quotienten ergibt
$$\frac{a^n - 1}{a - 1}.$$
Verwenden Sie das und Satz 152, um die folgende Aufgabe zu lösen:
Reichel, H., et al.: Lehrbuch der Mathematik 7. öbv hpt Verlagsgesellschaft, Wien, 4. Auflage 1999.
Aufgabe 793: Die Differenzengleichung $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$; x_0 *beschreibt einen dynamischen Prozess.*
a) Zeige unter Verwendung der Summenformel der endlichen geometrischen Reihe: Für $a \neq 1$ *lautet die (explizite) Lösung dieser Differenzengleichung:*
$$x_n = a^n \cdot x_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

5) Berechnen Sie die Lösung g der durch das Polynom $x^2 - 3x - 10$ gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung mit $g(1) = 1, g(2) = 2$.

6) Aus: Timischl, W., Prugger, E.: Mathematik & Wirtschaft 4. E. Dorner, Wien, 2007.
Beispiel 7.6: Konjunkturmodell von Samuelson
Berechne aus der Differenzengleichung
$Y_n = a.(b + 1) \cdot Y_{n-1} - a \cdot b \cdot Y_{n-2} + A$ *mit* $Y_0 = Y_1 = 400$ *GE rechnergestützt schrittweise das Volkseinkommen* Y_n *bis* $n = 50$ *für* $A = 100$ *GE, wenn a)* $a = 0,9$ *und* $b = 1$ *… ist … .*

Berechnen Sie eine explizite Form der Lösung dieser Differenzengleichung $Y_n = \frac{9}{5} Y_{n-1} - \frac{9}{10} Y_{n-2} + 100$ mit $Y_0 = Y_1 = 400$.

(Erläuterung: Y_n gibt das Einkommen der privaten Haushalte (Volkseinkommen) in der n-ten Rechnungsperiode an. Die folgenden Annahmen werden getroffen: Die Konsumausgaben C_n sind proportional dem Volkseinkommen der Vorperiode, also $C_n = a.Y_{n-1}$ mit $0 < a < 1$. Die privaten Investitionen I_n sind proportional dem Zuwachs $C_n - C_{n-1}$ der Konsumausgaben, also $I_n = b.(C_n - C_{n-1})$ mit $b > 0$. Die Regierungsausgaben A sind in jeder Periode gleich. In jeder Periode ist $Y_n = C_n + I_n + A$.)