Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

8. Mai 2017

1) Es sei $0 \neq f$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten mit Grad d. Begründen Sie, dass die Folge von Polynomen

$$(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots, x(x-1)\cdots(x-n), \ldots)$$

eine Basis von $\mathbb{Q}[x]$ ist. Erläutern Sie, welche Bedeutung das für die Lösung der folgenden Aufgabe hat: Berechnen Sie ein Polynom g so, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} i^4$$

ist.

2) Was ist ein *ZPE-Ring*? Was ist ein *invertierbares Element*, was ist ein *irreduzibles Element* in einem Integritätsbereich?
Mit D bezeichnen wir den Ring der Dezimalzahlen, dieser ist kommutativ und (als Teilmenge des Körpers $\mathbb{Q}$) ein Integritätsbereich.
Wir stellen Dezimalzahlen so mit Zähler a und Nenner b dar, dass $ggT(a, b) = 1$ ist. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen an a und b die Dezimalzahl $\frac{a}{b}$ in D invertierbar ist. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen an a und b die Dezimalzahl $\frac{a}{b}$ irreduzibel ist. Ist D ein ZPE-Ring?
Welche der folgenden Dezimalzahlen ist irreduzibel in D, welche in D invertierbar? Wenn die Dezimalzahl nicht invertierbar ist, schreiben Sie sie als Produkt irreduzibler Faktoren an!

$$0,234 \quad 0,125 \quad 2,04 \quad 0,04 \quad 3,1$$

3) Was ist ein *irreduzibles Polynom*? Welche Eigenschaften haben irreduzible Polynome mit Koeffizienten in einem Körper K und Primzahlen gemeinsam? Zeigen Sie: Ein Polynom vom Grad 3 mit Koeffizienten in K hat genau dann keine Nullstellen in K, wenn es irreduzibel ist. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass diese Behauptung mit Grad 4 nicht mehr stimmt. Zerlegen Sie die Polynome

$$x^2 - 4,\ x^3 + 1,\ x^4 - 3x^2,\ x^3 - x^2 - 17x - 15$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und die Polynome

$$x^5 + x^4 + x + 1,\ x^3 + x^2 + 1$$

in $\mathbb{Z}_2[x]$ in irreduzible Faktoren.

4) Es seien $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $ggT(a, b) = 1$ und $f(\frac{a}{b}) = 0$.
Zeigen Sie: a teilt $f(0)$, b teilt $lk(f)$, $a - b$ teilt $f(1)$ und $a + b$ teilt $f(-1)$. Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen von

$$f = 6x^4 + x^3 - 27x^2 - 2x + 30\,.$$

Aus: Götz, S., Reichel, H. (Hrsg.): Mathematik 7. Österreichischer Bundesverlag, Wien 2011.
Aufgabe 69f: Finde eine Lösung, spalte sie ab und ermittle die Lösungsmenge der Gleichung für $G = \mathbb{C}$!
$x^3 - x^2 + 17x + 87 = 0$

5) Aus: Sidlo, E. et al.: Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 1. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 2008.
Aufgabe 3.51: Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung
$\frac{3}{x} + 6 = \frac{3}{4}$ *für $G = \mathbb{R}$.*
Als Lösungsweg wird angegeben:
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *x darf nicht null werden.*
$HN = kgV(x, 4) = 4 \cdot x$ *Der Hauptnenner (HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Gleichung.*
...
Begründen Sie, warum es von zwei rationalen Zahlen ($\neq 0$) kein kleinstes gemeinsames Vielfaches gibt. Erläutern Sie, was in Aufgabe 3.51 „kgV“ bedeuten könnte.
Versuchen Sie, die Aufgabe in der Umgangssprache zu formulieren und möglichst einfach zu lösen.

6) Was ist die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms mit komplexen Koeffizienten? Wie berechnet man die Anzahl der (verschiedenen) komplexen Nullstellen eines solchen Polynoms? Berechnen Sie die Ableitung f' und $ggT(f, f')$ für das Polynom $f := x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$. Wieviele (verschiedene) Nullstellen hat f?
Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n das Polynom $x^n - 1$ n (verschiedene) Nullstellen hat. Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von $x^n - 1$ den Betrag 1 haben.
Aus: Malle, G. et al.: Mathematik verstehen 7. öbv, Wien, 2011.
Aufgabe 10.55: Ermittle alle komplexen Lösungen der Gleichung und mache die Probe!
i) $ix^2 + (1 + i)x + 0,5 = 0$