Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

24. April 2017

1) Was ist eine *Basis* eines Moduls? Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Begründen Sie, warum $((x-a)^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis des Polynomringes $\mathbb{Z}[x]$ ist. Wie kann man die Koordinaten eines Polynoms bezüglich dieser Basis berechnen?
Berechnen Sie eine natürliche Zahl n und Elemente $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\text{a) } 3y^3 - y + 2 = \sum_{i=0}^{n} c_i (y-5)^i \in \mathbb{Z}[y]$$

$$\text{b) } 2t^4 + t^2 + 1 = \sum_{i=0}^{n} c_i (t-3)^i \in \mathbb{Z}[t]$$

ist.

2) Was ist eine *Nullstelle* eines Polynoms? Schreiben Sie drei Polynome mit rationalen Koeffizienten an, die Grad 10 und genau 5 verschiedene Nullstellen haben.
Zeigen Sie:
a) Wenn ein Polynom u vom Grad 2 mit rationalen Koeffizienten eine rationale Nullstelle hat, gibt es rationale Zahlen a, b, c so, dass $u = a(x-b)(x-c)$ ist.
b) Ist p eine Primzahl, dann ist $x^p - x = \prod_{z\in\mathbb{Z}_p}(x-z) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

3) Was ist eine *Interpolationsaufgabe*? Erläutern Sie die Methoden von Lagrange und von Newton zur Lösung solcher Aufgaben. Berechnen Sie mit beiden Methoden ein Polynom f vom Grad 2 mit rationalen Koeffizienten so, dass $f(-2) = 4$, $f(1) = -2$ und $f(2) = 5$ ist.

4) Was ist der *größte gemeinsame Teiler* zweier oder mehrerer Polynome? Erläutern Sie den Euklidischen Algorithmus zu seiner Berechnung. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$x^3 + 1 \quad \text{und} \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und

$$x^4 + x^2 + x + \bar{1} \quad \text{und} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x$$

in $\mathbb{Z}_2[x]$.

Was ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier oder mehrerer Polynome?
Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache der Polynome

$$5x^3 + 5 \quad \text{und} \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

in $\mathbb{Q}[x]$.

5) Erklären Sie den *erweiterten Euklidischen Algorithmus* für ganze Zahlen und für Polynome.
Es seien $a := x^4 + x^2 + 1$ und $b := x^3 + x + 1$ Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$.
Berechnen Sie (falls möglich) $u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$ so, dass

$$x + 1 = ua + vb$$

ist.
Berechnen Sie (falls möglich) Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ so, dass

$$(x^4 + x^2 - x + 2)u + (-x^2 + 3x + 1)v = x$$

ist. Verwenden Sie dazu ein Computeralgebra-System.

6) Was ist ein Ideal in einem kommutativen Ring? Zeigen Sie, dass der Durchschnitt von zwei Idealen in einem Ring wieder ein Ideal in diesem Ring ist.
Welche Ideale gibt es in $\mathbb{Z}$? Überprüfen Sie, ob die Mengen

$$I := \{12a + 20b - 8c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$J := \{91a + 143b - 273c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

Ideale sind. Überprüfen Sie, welche der Zahlen $52, 4, -39, 1$ in I, J oder $I \cap J$ enhalten sind.