Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

20. März 2017

1) Was ist ein *rationale* Zahl? Wie entscheidet man, ob zwei durch Zähler und Nenner gegebene rationale Zahlen *gleich* sind? Entscheiden Sie, ob die rationalen Zahlen

$$\frac{6649244}{5327121275} \text{ und } \frac{61032}{48896516}$$

(die Ziffern beziehen sich auf die Basis zehn) gleich sind und ob die rationalen Zahlen

$$\frac{1100111011}{110110011} \text{ und } \frac{11001}{1101}$$

(die Ziffern beziehen sich auf die Basis zwei) gleich sind. Wie vergleicht man zwei rationale Zahlen der Größe nach?

Was sind *Maschinenzahlen*, wie können sie dargestellt werden? Stellen Sie die Bruchzahl

$$\frac{48}{193}$$

(Zähler und Nenner durch Ziffern zur Basis zehn dargestellt) in Exponentialform zur Basis 2 mit 8 Ziffern nach dem Komma dar.

2) Was ist der *größte gemeinsame Teiler* von zwei positiven ganzen Zahlen? Erläutern Sie den *euklidischen Algorithmus* zu seiner Berechnung. Was bedeutet es, eine Bruchzahl zu *kürzen*?
Die Zahlen c, d sind durch Ziffern zur Basis b gegeben. Berechnen Sie (ohne Hilfe eines Computers) positive ganze Zahlen e, f so, dass $ggT(e, f) = 1$ und $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$ ist. Dabei seien

$$b = 10, \quad c = 4171, \quad d = 5141$$

bzw.

$$b = 2, \quad c = 1110010100, \quad d = 11010101010\ .$$

Was bedeutet „der Bruch $\frac{c}{d}$ wurde bestmöglich gekürzt“?

3) Was ist eine *ganzzahlige lineare Gleichung mit* 2 *Unbekannten*, wie entscheidet man, ob sie eine Lösung hat und - wenn ja - wie berechnet man diese?
Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 3 HAK. öbv Wien 2012, 1. Auflage
Aufgabe 808: Gegeben sind die Zahlen a *und* b. *Berechne mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus Zahlen* u *und* v *so, dass* $ggT(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$ *ist.*
c. $a = 711$, $b = 339$ *d.* $a = 395$, $b = 1005$
Zeigen Sie, dass es bei dieser Aufgabe mehrere Lösungen gibt. Gibt es auch ein Paar natürlicher Zahlen als Lösung?

4) Wie löst man eine ganzzahlige lineare Gleichung mit 3 oder mehr Unbekannten? Berechnen Sie - falls das möglich ist - ein Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen mit der Eigenschaft
$$182 \cdot x + 221 \cdot y + 156 \cdot z = 273\,.$$

5) Berechnen Sie ganze Zahlen x und y so, dass
$$\frac{31}{77} = \frac{x}{7} + \frac{y}{11}$$
ist.
Berechnen Sie ganze Zahlen x, y und z so, dass
$$\frac{1}{1001} = \frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13}$$
ist.

6) Aus: Reichel, H., Humenberger, H. (Hrsg.): Das ist Mathematik 2. öbv Wien 2008, 1. Auflage
Aufgabe 98: Der Boden eines 4,80 m langen und 3,30 m breiten Zimmers soll mit quadratischen Teppichfliesen ausgelegt werden. Die Seitenlänge einer Teppichfliese soll möglichst groß sein.
1) Wie groß ist die Seitenlänge einer Fliese?
2) Wie viele derartige Fliesen werden benötigt?
Zeigen Sie: Wäre das Zimmer 2 m lang und $\sqrt{2}$ m breit, dann wäre die Aufgabe nicht lösbar. Sie können dabei als bekannt voraussetzen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Unter welchen Bedingungen an die reellen Zahlen x und y ist die Aufgabe für ein Zimmer, das x m breit und y m lang ist, lösbar?
Ändert sich die Lösung, wenn die Längen anstatt in m in Yards (1 m = 1,0936 Yards) angegeben werden?
Erläutern Sie genau, wie man diese Aufgabe löst und welches Vorwissen dazu erforderlich ist.
Wie realitätsbezogen ist die Aufgabe? Ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe für 12-jährige Schüler/innen passend?