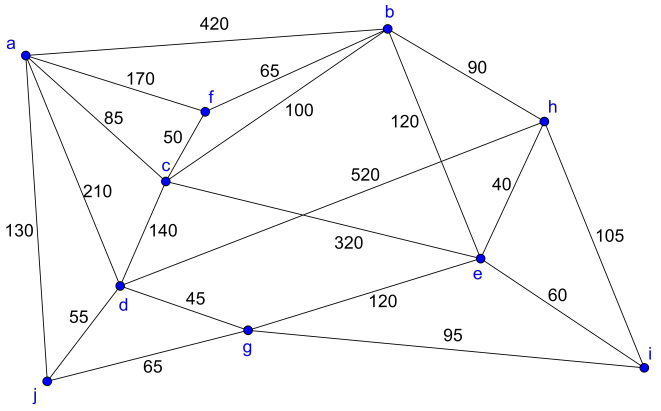
Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

19. Juni 2017

1) Was ist der *Abstand* zwischen zwei Ecken in einem bewerteten Graphen bzw. Digraphen? Erläutern Sie den Algorithmus von Dijkstra zur Berechnung dieses Abstandes.
$G := (E, K)$ sei ein Graph. Durch $w : K \longrightarrow \mathbb{R},\ k \longmapsto 1$, fassen wir G als bewerteten Graphen auf. Schreiben Sie den Algorithmus von Dijkstra zur Berechnung des Abstandes zwischen zwei Ecken für diesen Spezialfall vereinfacht an.

2) Was ist ein *kürzester Weg* zwischen zwei Ecken in einem Digraphen? Wie kann ein solcher berechnet werden?
Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon,A.: Mathematik 4/5 HTL. 1. Auflage. öbv, Wien 2014.
Aufgabe 1067. Im abgebildeten Graphen sind die Ecken a, b, c, d, e, f, g, h, i, j Flughäfen und die Kanten stehen für Direktflüge zwischen den Flughäfen, die ihren Eckpunkten entsprechen. Die Bewertung der Kanten gibt die Flugpreise in Euro an. Ermittle mit dem Algorithmus von Dijkstra zunächst den Baum der kürzesten Wege mit Ausgangsflughafen c und anschließend daraus die günstigste Flugverbindung von c nach i.



3) Es seien m, n positive ganze Zahlen,

$$E := \{(i,j) \,|\, 0 \le i \le m, 0 \le j \le n\} \ ,$$

$$K := \{\{(i,j),(i,j+1)\} \,|\, 0 \le i \le m, 0 \le j < n\} \cup$$

$$\cup \{\{(i,j),(i+1,j)\} \,|\, 0 \le i < m, 0 \le j \le n\}\}$$

$$R := \{\{(i,j),(i,j+1)\} \,|\, i \in \{0,m\}, j \in \{0,2,\ldots,2n\} \cup$$

$$\cup \{\{(i,j),(i+1,j)\} \,|\, i \in \{0,2,\ldots,2m\}, j \in \{0,n\}\}$$

und $L := K \setminus R$. Für welche m, n ist einer der zwei Graphen $(E,K), (E \setminus \{(0,0),(m,0),(0,n),(m,n)\}, L)$ Eulersch? Finden Sie für diese Graphen eine Eulersche Tour.

4) Was ist eine *Eulersche Tour*? Was ist ein *Eulerscher Graph*? Erläutern Sie das Verfahren zum Auffinden einer Eulerschen Tour in einem Eulerschen Graphen. Überprüfe, ob die Graphen mit den Nachbarmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eulersch sind. Wenn ja, bestimmen Sie eine Eulersche Tour.

5) Es seien E die Menge der Wörter (mit jeweils 9 Buchstaben)

$$TATGCCACA, TGCCAATTG, CCGATATTG,$$

$$TACCGATTG, TGGACATCC,$$

$$GCGCAATTC, TGCCTAGTG$$

und K die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E. Die Bewertung einer Kante $\{U,V\} \in K$ ist die Anzahl der Indizes i mit der Eigenschaft, dass die i-ten Buchstaben von U und V verschieden sind (die Bewertung einer Kante ist also eine Zahl in $\{0,1,\ldots,9\}$). Stellen Sie diesen bewerteten Graphen zeichnerisch dar und ermittlen Sie mit dem Algorithmus von Prim ein Minimalgerüst in diesem bewerteten Graphen. Ist dieses das einzige Minimalgerüst?

Interpretieren Sie die Aufgabe, falls die Buchstaben A, C, G, T für Adenin, Cytosin, Guanin und Thymin in einer DNS-Sequenz stehen.

6) Was ist eine *Tour*, was ist eine *optimale Tour*? Erläutern Sie das Verfahren zur Berechnung einer optimalen Tour in einem bewerteten Graphen. Es sei G der Graph mit Eckenmenge $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ und Kantenmenge

$$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\},$$
$$\{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\} \ .$$

Die Kanten von G seien (in der angegebenen Reihenfolge) mit

$$3, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 4, 3$$

bewertet. Berechnen Sie eine optimale Tour in diesem bewerteten Graphen!