

# Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2017

13. März 2016

- 1) Die altrömische Schreibweise für Zahlen verwendet die Buchstaben  $I, V, X, L, C, D, M$  für 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Es ist also  $I < V < X < L < C < D < M$ . Stehen diese Zahlzeichen in (von links nach rechts) absteigender Reihenfolge nebeneinander, ist damit ihre Summe gemeint: zum Beispiel ist  $MMXVI := M + M + X + V + I$ . Es dürfen höchstens vier gleiche Buchstaben nebeneinander stehen. Die Buchstaben  $V, L$  und  $D$  dürfen höchstens einmal in der Summe vorkommen. Die größte so darstellbare Zahl ist

$$z := MMMMDCCCCLXXXVIII$$

die kleinste ist  $I$ .

Nehmen Sie an, Sie haben einen Sack voller Denare. Geben Sie ein Verfahren an, wie die altrömische Schreibweise für die Anzahl dieser Denare ermittelt werden kann. Dabei dürfen Sie, wie die alten Römer, die Darstellung von Zahlen durch Dezimalziffern nicht benutzen.

Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl zwischen 1 und  $z$  durch römische Ziffern dargestellt werden kann.

Wir wissen, dass

$$I + I + I + I + I = V, V + V = X, X + X + X + X + X = L,$$

$$L + L = C, C + C + C + C + C = D, D + D = M$$

ist und kennen die Rechenregeln für natürliche Zahlen (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, ...).

Wie berechnen wir die altrömische Darstellung der Summe

$$MMDCCCLXXXIII + MDCCCLXXVIII$$

und der Differenz

$$MMCCCCLVIII - MDCCCLXI ?$$

Wie wird die altrömische Darstellung des Produktes

$$LXVI \cdot XXVIII$$

berechnet? Welche Rechenregeln verwenden Sie dabei?

- 2) Was ist die *Division mit Rest* von einer ganzen Zahl durch eine von 0 verschiedene ganze Zahl? Berechnen Sie den Rest und den ganzzahligen Quotienten von  $a$  nach Division mit Rest durch  $b$  für die folgenden Zahlenpaare  $(a, b)$  ( $a$  und  $b$  sind durch Dezimalziffern dargestellt):

$(52, 19), (-52, 19), (-52, -19), (52, -19)$ .

Berechnen Sie dann dieselben Daten mit den Maple-Befehlen `irem(a,b)` und `iquo(a,b)`. Lesen Sie in der Beschreibung dieser Befehle nach, wie die Division mit Rest in Maple definiert ist. (Statt Maple können Sie auch Mathematica verwenden). Gibt es einen Unterschied zur Definition im Skriptum?

- 3) Was ist die *Zifferndarstellung* einer Zahl? Berechnen Sie die Zifferndarstellung Ihres Geburtsjahres zur Basis 2, zur Basis 7, zur Basis 11 und zur Basis 60.

Begründen Sie genau, dass die durch Ziffern zur Basis 8 dargestellte Zahl 10000 größer als 7777 ist.

Ordnen Sie die folgenden durch Binärziffern mit 32 bits dargestellten Zahlen der Größe nach an:

100101110111111111111111100000001

00011110101011111001010100101100

00011101111111111111111111111111

10011110101011111001010100101011

10100011101010101010001110100001

- 4) Erklären Sie das Verfahren zur *Addition* von Zahlen, die durch Ziffern zu einer Basis  $b$  gegeben sind. Welche Grundschritte werden dazu verwendet? Berechnen Sie die Ziffern zur Basis 7 der Summe von 6053233564 und 5032034106 (diese Zahlen sind durch Ziffern zur Basis 7 dargestellt).

Erklären Sie das Verfahren zur *Subtraktion* von Zahlen, die durch Ziffern zu einer Basis  $b$  gegeben sind. Welche Grundschritte werden dazu verwendet? Subtrahieren Sie 10010011 von 11001111 (diese Zahlen sind durch Ziffern zur Basis 2 dargestellt).

- 5) Erklären Sie das Verfahren zur *Multiplikation* von Zahlen, die durch Ziffern zu einer Basis  $b$  gegeben sind. Welche Grundschritte werden dazu verwendet? Geben Sie das kleine Einmaleins bezüglich der Basis 5 an. Berechnen Sie die Ziffern zur Basis 5 des Produktes von 32434 und 432 (diese Zahlen sind durch Ziffern zur Basis 7 dargestellt).  
Multiplizieren Sie die durch Binärziffern dargestellten Zahlen 101011 und 101 (ohne diese durch Dezimalziffern darzustellen).
- 6) Erklären Sie das Verfahren zur *Division mit Rest* von Zahlen, die durch Ziffern zu einer Basis  $b$  gegeben sind. Welche Grundschritte werden dazu verwendet? Berechnen Sie den Rest der durch Ziffern zur Basis 2 dargestellten ganzen Zahl 1100110111 nach Division mit Rest durch 1010111 (ohne deren Ziffern bezüglich einer anderen Basis zu berechnen).  
Berechnen Sie die Binärziffern der durch Ziffern zur Basis 7 dargestellten Zahl 546 (ohne deren Ziffern bezüglich einer anderen Basis zu berechnen).