Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

9. Mai 2016

1) Wie ist die *Ableitung* eines Polynoms definiert? Was sind *mehrfache Nullstellen* eines Polynoms? Überprüfen Sie, ob das Polynom
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^5 \in \mathbb{Q}[x]$$
mehrfache Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Verwenden Sie dazu Maple (oder ein anderes CAS).
Zeigen Sie: Das Polynom
$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n \in \mathbb{C}[x]$$
hat keine mehrfachen Nullstellen. Überprüfen Sie, ob das Polynom
$$x^{13} + x^9 + x^7 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$
mehrfache Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ hat.

2) Wie kann die Anzahl der komplexen Nullstellen eines Polynoms berechnet werden? Es sei n eine positive ganze Zahl.
Berechnen Sie die Anzahlen der komplexen Nullstellen der Polynome
$$x^5 - x^4 - \frac{17}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{81}x + \frac{4}{81}\,,\ x^{10} - 1\,,$$
$$x^{10} + 1\,, x^4 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1\,.$$

3) Was ist eine *lineare Differenzengleichung der Ordnung* n?
Sei n eine positive ganze Zahl und a eine komplexe Zahl.
Zeigen Sie: Der Rest von x^n nach Division durch $x - a$ ist a^n und das Einsetzen von 1 in den polynomialen Quotienten ergibt
$$\frac{a^n - 1}{a - 1}\,.$$
Verwenden Sie das und Satz 63, um die folgende Aufgabe zu lösen:

Reichel, H., et al.: Lehrbuch der Mathematik 7. öbv hpt Verlagsgesellschaft, Wien, 4. Auflage 1999.
Aufgabe 793: Die Differenzengleichung $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$; x_0 *beschreibt einen dynamischen Prozess.*
a) Zeige unter Verwendung der Summenformel der endlichen geometrischen Reihe: Für $a \neq 1$ *lautet die (explizite) Lösung dieser Differenzengleichung:*

$$x_n = a^n \cdot x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

4) Berechnen Sie die Lösung g der durch $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung mit $g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2$.

5) Aus: Timischl, W., Prugger, E.: Mathematik & Wirtschaft 4. E. Dorner, Wien, 2007.
Beispiel 7.6: Konjunkturmodell von Samuelson
Berechne aus der Differenzengleichung
$Y_n = a.(b+1).Y_{n-1} - a.b.Y_{n-2} + A$ *mit* $Y_0 = Y_1 = 400$ *GE rechnergestützt schrittweise das Volkseinkommen* Y_n *bis* $n = 50$ *für* $A = 100$ *GE, wenn a)* $a = 0,9$ *und* $b = 1$ *... ist ... .*

Berechnen Sie eine explizite Form der Lösung dieser Differenzengleichung $Y_n = \frac{9}{5}Y_{n-1} - \frac{9}{10}Y_{n-2} + 100$ mit $Y_0 = Y_1 = 400$.

(Erläuterung: Y_n gibt das Einkommen der privaten Haushalte (Volkseinkommen) in der n-ten Rechnungsperiode an. Die folgenden Annahmen werden getroffen: Die Konsumausgaben C_n sind proportional dem Volkseinkommen der Vorperiode, also $C_n = a.Y_{n-1}$ mit $0 < a < 1$. Die privaten Investitionen I_n sind proportional dem Zuwachs $C_n - C_{n-1}$ der Konsumausgaben, also $I_n = b.(C_n - C_{n-1})$ mit $b > 0$. Die Regierungsausgaben A sind in jeder Periode gleich. In jeder Periode ist $Y_n = C_n + I_n + A$.)

6) Wie kann man die Anzahl der Nullstellen eines reellen Polynoms in einem gegebenen Intervall bestimmen? Berechnen Sie mit Satz 65 die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $x^5 - x^4 - 5x + 1$ in den Intervallen $[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2]$.