Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

2. Mai 2016

1) Was ist ein *ZPE-Ring*? Was ist ein *invertierbares Element*, was ist ein *irreduzibles Element* in einem Integritätsbereich?
Mit R bezeichnen wir den Ring der Dezimalzahlen, dieser ist kommutativ und (als Teilmenge des Körpers $\mathbb{Q}$) ein Integritätsbereich. Dezimalzahlen können immer mit Zähler a und Nenner b dargestellt werden, so dass $ggT(a,b) = 1$ ist.
Geben Sie an, unter welchen Bedingungen an a und b die Dezimalzahl $\frac{a}{b}$ in R invertierbar ist. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen an a und b die Dezimalzahl $\frac{a}{b}$ irreduzibel ist. Ist R ein ZPE-Ring?
Welche der folgenden Dezimalzahlen ist irreduzibel in R, welche in R invertierbar? Wenn die Dezimalzahl nicht invertierbar ist, schreiben Sie sie als Produkt irreduzibler Faktoren an!

$$0,234 \quad 0,125 \quad 2,04 \quad 0,04 \quad 3,1$$

2) Was ist ein *irreduzibles Polynom*? Welche Eigenschaften haben irreduzible Polynome mit Koeffizienten in einem Körper K und Primzahlen gemeinsam? Zeigen Sie: Ein Polynom vom Grad 3 mit Koeffizienten in K hat genau dann keine Nullstellen in K, wenn es irreduzibel ist. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass diese Behauptung mit Grad 4 nicht mehr stimmt. Zerlegen Sie die Polynome

$$x^2 - 4,\ x^3 + 1,\ x^4 - 3x^2,\ x^3 - x^2 - 17x - 15$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und die Polynome

$$x^5 + x^4 + x + 1,\ x^3 + x^2 + 1$$

in $\mathbb{Z}_2[x]$ in irreduzible Faktoren.

3) Es seien $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$,
$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $ggT(a,b) = 1$ und $f(\frac{a}{b}) = 0$.
Zeigen Sie: a teilt $f(0)$, b teilt $lk(f)$, $a - b$ teilt $f(1)$ und $a + b$ teilt $f(-1)$.
Hinweis: Schreiben Sie f auch als Linearkombination der Potenzen von $x - 1$ und von $x + 1$ an.
Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen von

$$f = 7x^4 - 39x^3 + 27x^2 - 39x + 20\,.$$

4) – Aus: Götz, S., Reichel, H. (Hrsg.): Mathematik 7. Österreichischer Bundesverlag, Wien 2011.
Aufgabe 69f: Finde eine Lösung, spalte sie ab und ermittle die Lösungsmenge der Gleichung für $G = \mathbb{C}$!
$x^3 - x^2 + 17x + 87 = 0$
– Aus: Malle, G. et al.: Mathematik verstehen 7. öbv, Wien, 2011.
Aufgabe 10.55: Ermittle alle komplexen Lösungen der Gleichung und mache die Probe!
i) $ix^2 + (1 + i)x + 0,5 = 0$

5) – Aus: Sidlo, E. et al.: Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 1. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 2008.
Aufgabe 3.51: Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3}{x} + 6 = \frac{3}{4}$ *für* $G = \mathbb{R}$.
Als Lösungsweg wird angegeben:
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ x *darf nicht null werden.*
$HN = kgV(x, 4) = 4 \cdot x$ *Der Hauptnenner (HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Gleichung.*
...
Erläutern Sie, in welchem Ring das kgV gebildet wird.
Versuchen Sie, die Aufgabe in der Umgangssprache zu formulieren.
– Aus: Taschner, R.: Mathematik 3. R. Oldenbourg Verlag Wien 2000.
Aufgabe 817: Es ist zu begründen, dass bei reellen Zahlen w_1 *und* w *die Lösungen der Gleichung* $z^2 + w_1 z = w$ *entweder reell oder zwei konjugiert komplexe Zahlen sind.*