Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

18. April 2016

1) Was ist eine *Polynomfunktion*? Was heißt *eine Polynomfunktion in einem Element des Definitionsbereichs auswerten*? Werten Sie die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto -2 + 5z + 3z^2 + z^4 - 2z^6 + z^7$$

in $\frac{3}{4}$ aus.
Werten Sie die Polynomfunktion

$$g : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_7,\ z \longmapsto \bar{2} + \bar{3}z + \bar{5}z^6 - \bar{2}z^{345} + z^{2016}$$

in $\bar{4}$ aus. Wieviele Multiplikationen sind dazu jeweils mindestens nötig?

2) Wann sind zwei Funktionen *gleich*? Überprüfen Sie, ob $f = g$, $f = h$ und $h = g$ ist.

$$f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3,\ z \longmapsto \bar{2} + z + \bar{2}z^2 - z^4$$
$$g : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3,\ t \longmapsto \bar{2} + t^2 + t^3$$
$$h : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3,\ x \longmapsto \bar{1} + \bar{2}(x - \bar{1}) + (x - \bar{1})^2 + (x - \bar{1})^3$$

Zeigen Sie, dass zwei Polynomfunktionen von $\mathbb{Z}_3$ nach $\mathbb{Z}_3$ mit den Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_0, b_1, b_2 genau dann gleich sind, wenn $(a_0, a_1, a_2) = (b_0, b_1, b_2)$ ist. Wieviele solche Polynomfunktionen gibt es? Zeigen Sie dann, dass jede Funktion von $\mathbb{Z}_3$ nach $\mathbb{Z}_3$ eine Polynomfunktion ist.

3) Was ist ein *Modul* über einem Ring R, was ist eine *Basis* eines Moduls? Es sei M der von $(2,0), (1,1)$ und $(0,2)$ erzeugte Untermodul von $\mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass M ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist und geben Sie drei verschiedene Basen davon an. Überprüfen Sie, ob $((2,0),(0,2))$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von M ist. Überprüfen Sie, ob $(17,-3) \in M$ und ob $(18,-3) \in M$ ist.

4) Was ist ein *freier Modul*? Betrachten Sie $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ einmal als Modul über $\mathbb{Z}$ und einmal als Modul über $\mathbb{Z}_4$. Bestimmen Sie für beide Fälle fünf Untermoduln. Ist einer dieser zwei Moduln frei? Geben Sie in diesem Fall fünf Basen an.

5) Was ist ein *Polynom*? Was ist der *Grad* eines Polynoms? Berechnen Sie den Rest von $f \in R[x]$ nach Division durch $g \in R[x]$, dabei sei
a) $R = \mathbb{Z},\ f = x^4 - 2x^2 - 3x + 5,\ g = x^2 + x + 4,$
b) $R = \mathbb{Z}_{11},\ f = x^4 - \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{3},\ g = \bar{5}x^2 - x + \bar{2},$
c) $R = \mathbb{Q},\ f = x^4 - 3x^2 + 3x + 1,\ g = 3x^2 + x - 2.$

6) Was ist eine *Basis* eines Moduls? Es sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$. Begründen Sie, warum $((x-a)^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine R-Basis des Polynomringes $R[x]$ ist. Wie kann man die Koordinaten eines Polynoms bezüglich dieser Basis berechnen?
Berechnen Sie eine natürliche Zahl n und Elemente $c_0, \ldots, c_n \in R$ so, dass

$$\text{a) } R := \mathbb{Q},\ 3y^3 - y + 2 = \sum_{i=0}^{n} c_i (y - \frac{1}{2})^i \in \mathbb{Q}[y]$$

$$\text{b) } R := \mathbb{Z}_3,\ \bar{2}t^3 + t^2 + \bar{1} = \sum_{i=0}^{n} c_i (t - \bar{2})^i \in \mathbb{Z}_3[t]$$

ist.