Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

27. Juni 2016

1) Es seien K ein Körper und f ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad d in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Das Polynom
$$f_h := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$
heißt *Homogenisierung von f*.
Berechnen Sie die Homogenisierung der Polynome $x_1^2 + x_2^2 - 1$ und $3x^4 - x^2 + 1$.
Zeigen Sie: f_h ist homogen vom Grad d, $f_h(1, x_1, \ldots, x_n) = f$ und die Nullstellenmenge von f_h in K^{n+1} ist
$$\{(c, cz) \mid c \in K,\, z \in K^n,\, f(z) = 0\} \cup$$
$$\cup \{(0, z) \mid z \in K^n, f_h(0, z) = 0\}\,.$$

2) Aus: Malle et al.: Mathematik verstehen 5. öbv , Wien 2010.
Aufgabe 4.22 Ermittle alle Lösungen der Gleichung!
b) $15 \cdot (x + 4)^2 = (5x + 27)^2 - (3x + 19)^2$

Aufgabe 4.23 Bei einer Veranstaltung stößt jeder Gast mit jedem anderen Gast an. Insgesamt hört man 105-mal die Gläser klingen. Wie viele Gäste sind insgesamt bei der Veranstaltung?

Aufgabe 4.32 Von einem kreisförmigen Blumenbeet mit dem Radius 5m soll rundherum ein gleich breiter Rand abgetrennt und beschottert werden. Wie breit darf dieser Rand höchstens gewählt werden, damit noch 81% des Blumenbeets übrig bleiben?

3) Aus: Malle et al.: Mathematik verstehen 5. öbv , Wien 2010.
Aufgabe 4.84 Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks hat die Länge a. Eine Kathete ist um 2 länger als die andere. Für welche $a \in \mathbb{R}^+$ *gibt es ein solches Dreieck?*

Aufgabe 4.85 Die Gleichung $ax^2 + 36x + 81 = 0$ *mit* $a \neq 0$ *besitzt genau eine Lösung. Diese ist auch Lösung der Gleichung* $2x^2 + bx - 18 = 0$. *Ermittle a und b und löse beide Gleichungen!*

4) Aus: Malle et al.: Mathematik verstehen 7. öbv , Wien 2011.
Aufgabe 3.114 Die zwei Kathetenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks ergeben zusammen a cm. Wie lang sind die Katheten zu wählen, damit der Flächeninhalt möglichst groß ist?

Aufgabe 3.119 Zeige: Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein gleichschenkeliges Dreieck so einzuschreiben, dass seine Spitze in einer Ecke des Quadrats liegt. Wie sind die Seitenlängen des Dreiecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt maximal wird?

5) Es sei f die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \longmapsto 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 4y - 3\,.$$

Berechnen Sie eine bijektive affine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und eine quadratische Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in Normalform so, dass $g \circ h = f$ ist. Berechnen Sie dann 5 Nullstellen von f.

6) (Lineare Regression ohne Skalarprodukt) Es seien $x := (0,1,2,3,4)$ und $y := (-1,1,1,2,2)$. Berechnen Sie Zahlen k und d so, dass der Abstand zwischen y und $kx + d(1,1,1,1,1)$, also

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i - (kx_i + d))^2}$$

möglichst klein wird.
Zeigen Sie zuerst: Sind a und b positive reelle Zahlen und c eine reelle Zahl, dann wird der der kleinste Funktionswert von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \longmapsto ax^2 + by^2 + c\,,$ an der Stelle $(0,0)$ angenommen.

E N D E