

Algebra und Diskrete Mathematik, PS3

Sommersemester 2016

6. Juni 2016

- 1) Was ist ein *Graph*? Was ist der *Grad* einer Ecke eines Graphen?
Es seien n eine positive ganze Zahl, $E_n := \{0, 1\}^n$ die Menge aller n -Tupel in $\{0, 1\}$ und

$$K_n := \{ \{a, b\} \subseteq E_n \mid a \text{ und } b \text{ unterscheiden sich} \\ \text{in genau einer Komponente} \}.$$

Zeichnen Sie die Graphen (E_1, K_1) , (E_2, K_2) , (E_3, K_3) und (E_4, K_4) .
Welchen Grad haben die Ecken in E_n ? Wieviele Elemente hat K_n ?

- 2) Was ist die *Nachbarmatrix* eines Graphen? Zeichnen Sie je einen Graphen mit Nachbarmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) Was ist eine *Kantenfolge*, was ist ein *Weg* und was ist ein *Kreis* in einem Graphen? Es seien E_5 und K_5 wie in Aufgabe 1 definiert. Bestimmen Sie alle Zahlen n mit der Eigenschaft, dass es einen Weg der Länge n von $(0, 0, 0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1, 1, 1)$ bzw. nach $(1, 0, 1, 1, 1)$ im Graphen (E_5, K_5) gibt. Welche Länge kann ein Kreis in diesem Graphen maximal haben?

- 4) Wann ist ein Graph *zusammenhängend*? Ein Graph sei durch seine Adjazenzliste gegeben. Beschreiben Sie ein Verfahren, um zu überprüfen, ob der Graph zusammenhängend ist oder nicht.
- 5) Erläutern Sie den *Algorithmus von Prim* für bewertete Graphen, die durch ihre Bewertungsmatrix gegeben sind. Acht Orte A_1, \dots, A_8 sollen durch ein Eisenbahnnetz verbunden werden. Verzweigungspunkte sollen sich nur in den Orten befinden. Wenn eine Direktverbindung von A_i nach A_j möglich ist, wird in der folgenden Matrix in der i -ten Zeile und j -ten Spalte deren Länge angegeben (wenn nicht, dann das Symbol ∞):

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty & 8 & \infty & 6 & 4 & \infty \\ 5 & \infty & 7 & \infty & 5 & 6 & \infty & 5 \\ \infty & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty & 6 & \infty \\ 8 & \infty & 8 & \infty & 4 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 5 & \infty & 4 & \infty & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & 8 \\ 4 & \infty & 6 & \infty & 5 & \infty & \infty & 6 \\ \infty & 5 & \infty & 5 & 6 & 8 & 6 & \infty \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Eisenbahnnetz kürzester Länge!

- 6) Es seien E die Menge der Wörter (mit jeweils 9 Buchstaben)

$TATGCCACA, TGCCAATTG, CCGATATTG,$
 $TACCGATTG, TGGACATCC,$
 $GCGCAATTC, TGCCTAGTG$

und K die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E . Die Bewertung einer Kante $\{U, V\} \in K$ ist die Anzahl der Indizes i mit der Eigenschaft, dass die i -ten Buchstaben von U und V verschieden sind (die Bewertung einer Kante ist also eine Zahl in $\{0, 1, \dots, 9\}$). Stellen Sie diesen bewerteten Graphen zeichnerisch dar und ermitteln Sie mit dem Algorithmus von Prim ein Minimalgerüst in diesem bewerteten Graphen. Ist dieses das einzige Minimalgerüst?