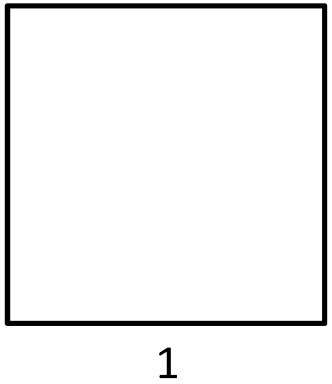
Algebraische und transzendente Zahlen –
- zum Beispiel $\sqrt{2}$ und π
(„Wurzel aus 2“ und „Pi“)

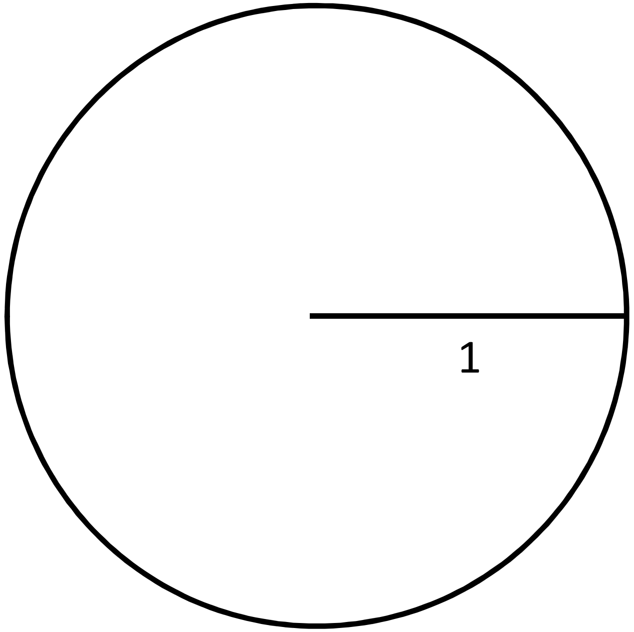
π-Tag Universität Bozen-Bolzano
13. März 2015

Franz Pauer
Universität Innsbruck
Institut für Fachdidaktik und Institut für Mathematik

$\sqrt{2}$ und π

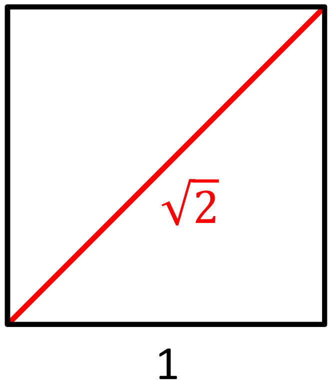


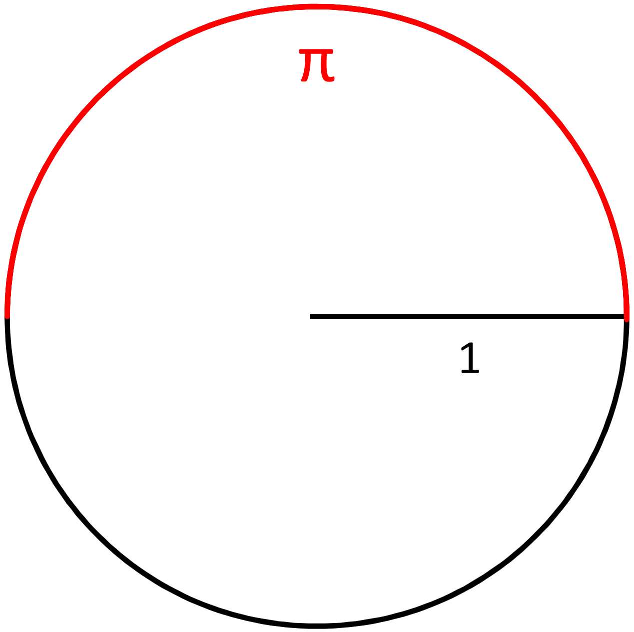
Quadrat



Kreis

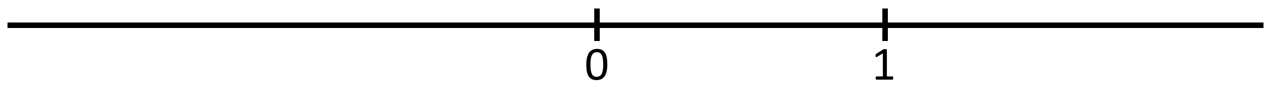
$\sqrt{2}$ und π



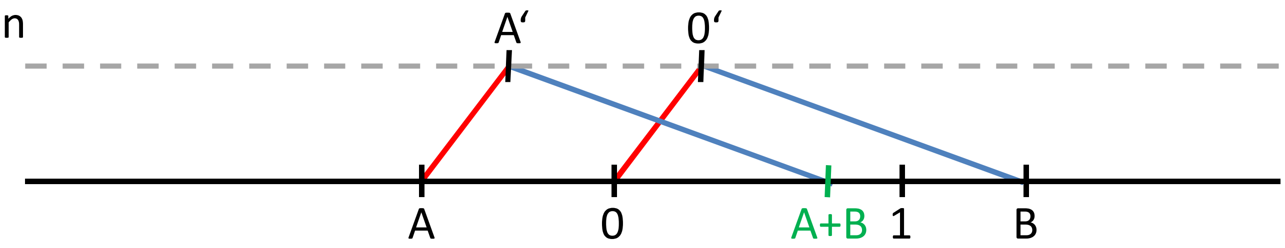


$\sqrt{2}$ und π

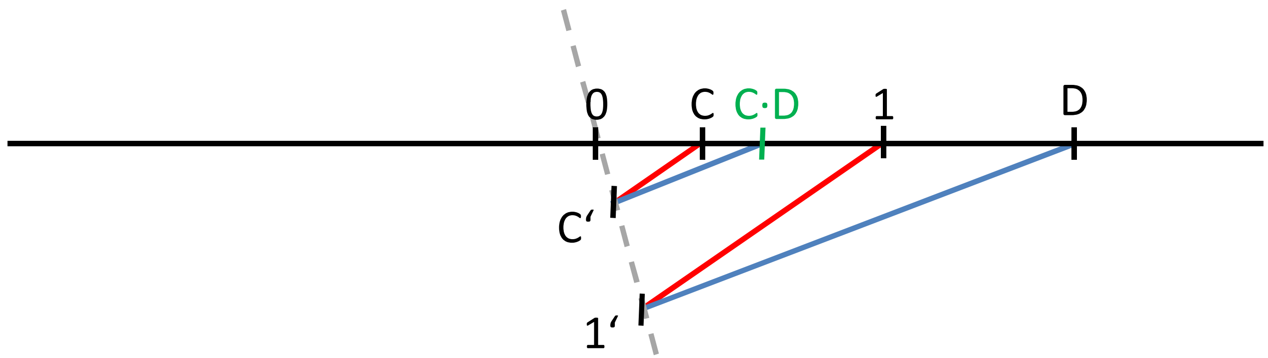
Zahlengerade



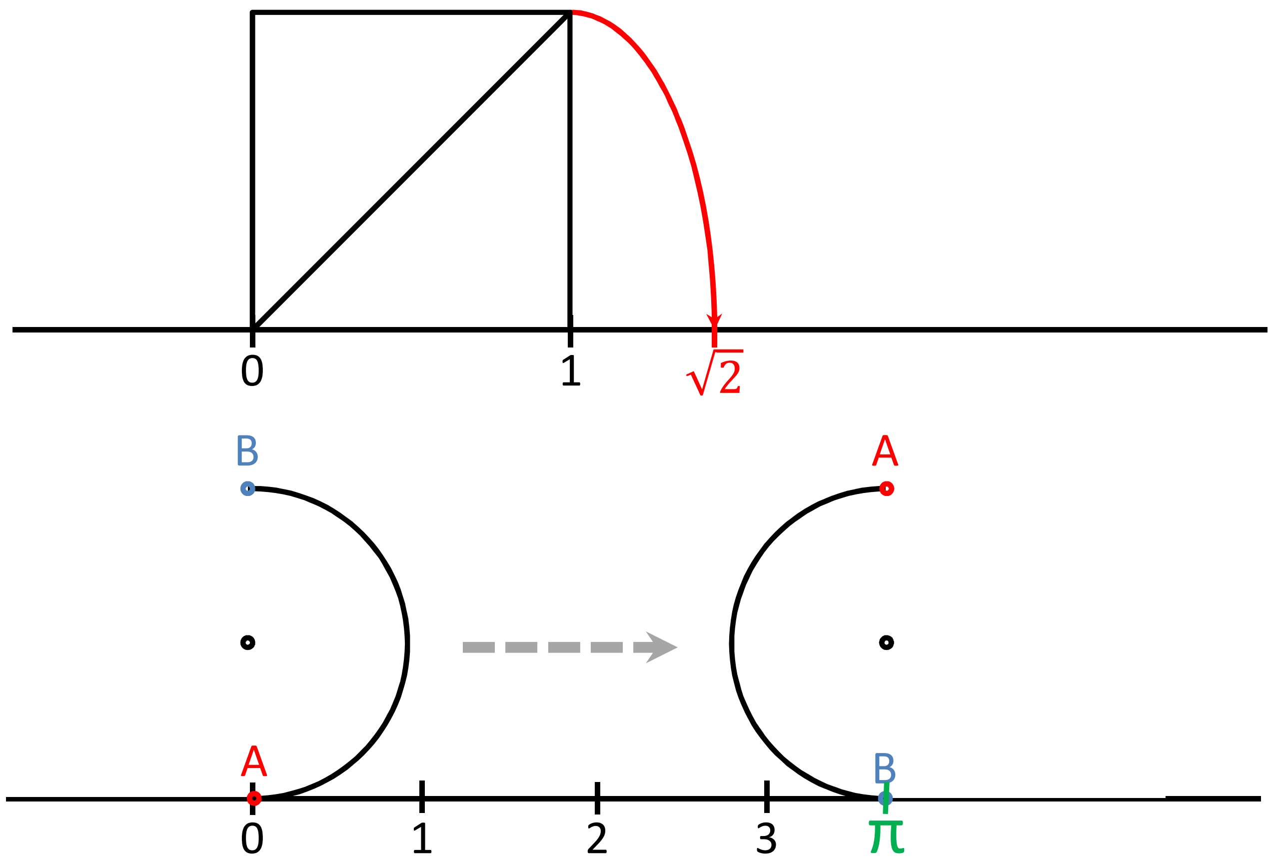
Addieren



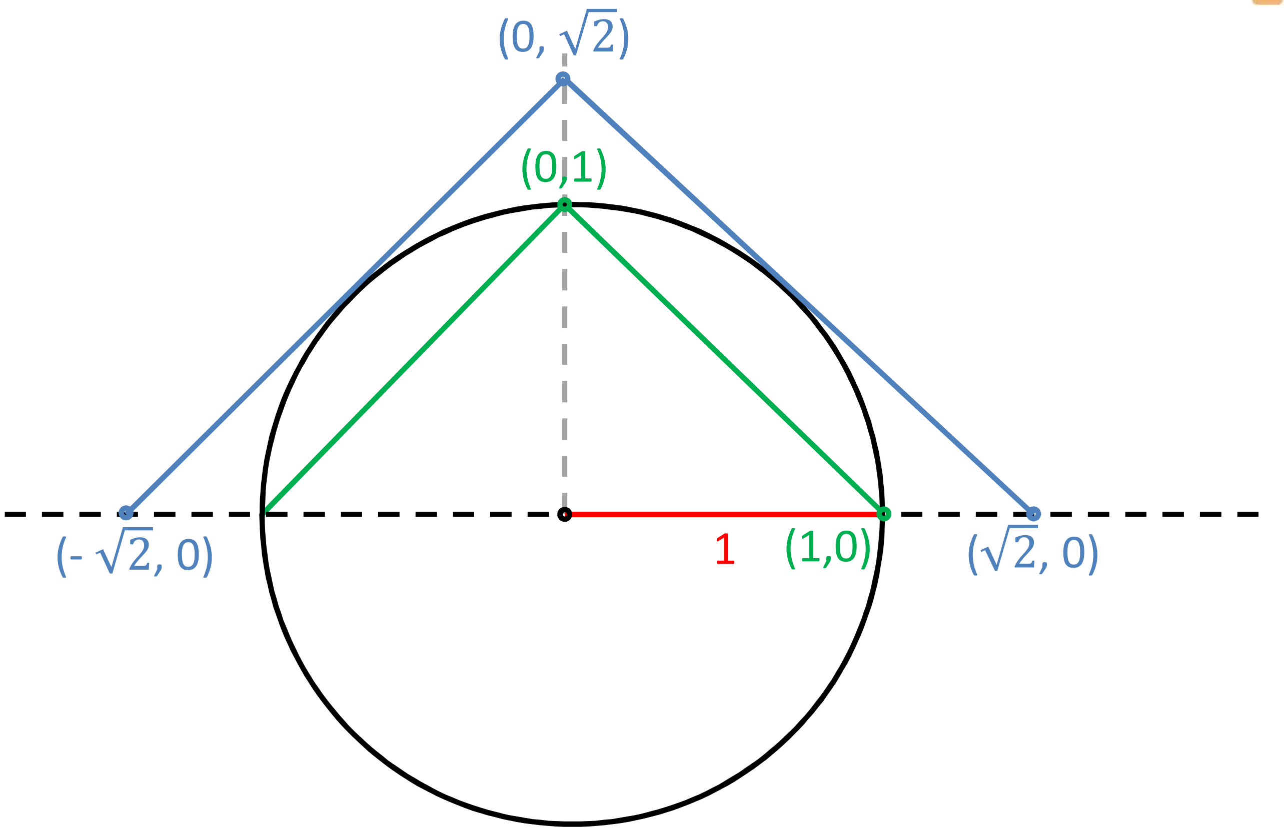
Multiplizieren



$\sqrt{2}$ und π

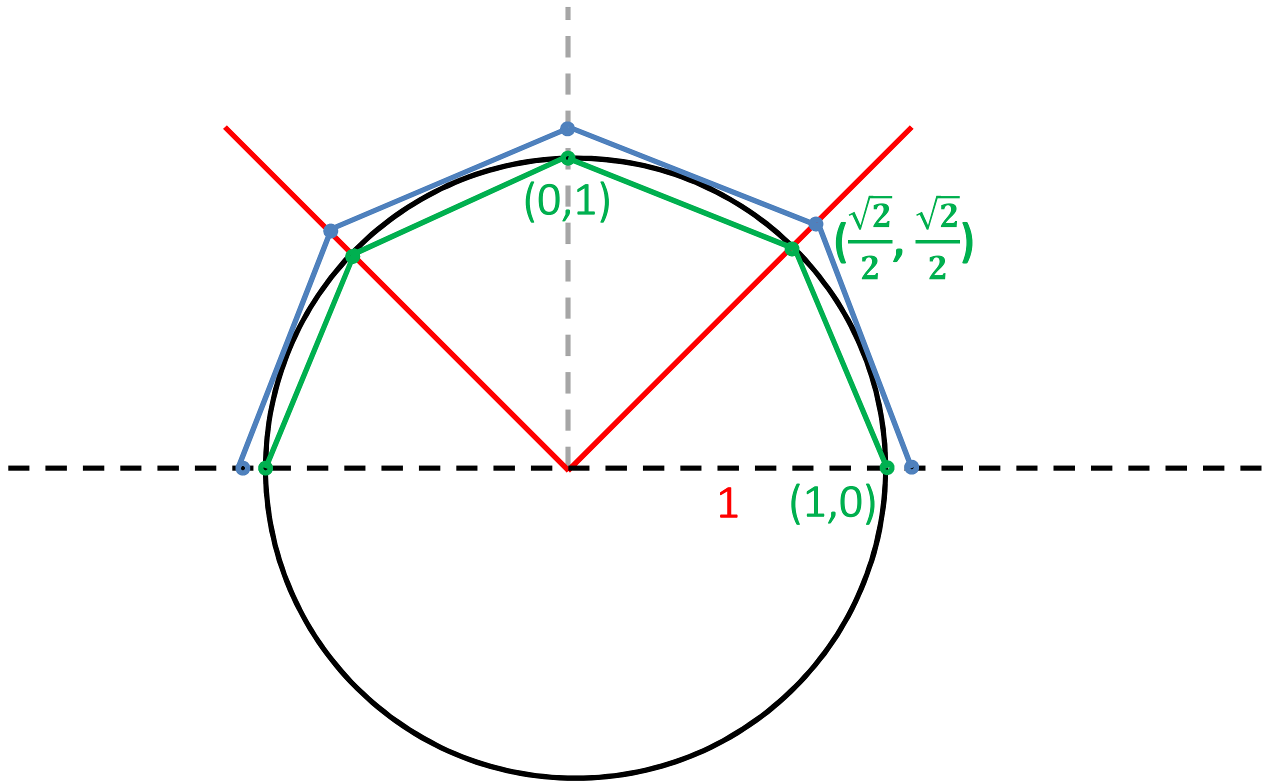


$\sqrt{2}$ und π



$$\sqrt{2} + \sqrt{2} < \pi < 2 + 2 = 4$$

$\sqrt{2}$ und π



Für n=4: 3.061467458 < π < 3.313708500
Für n=1000: 3.141591362 < π < 3.141595238

1995 Bailey- Borwein- Plouffe:

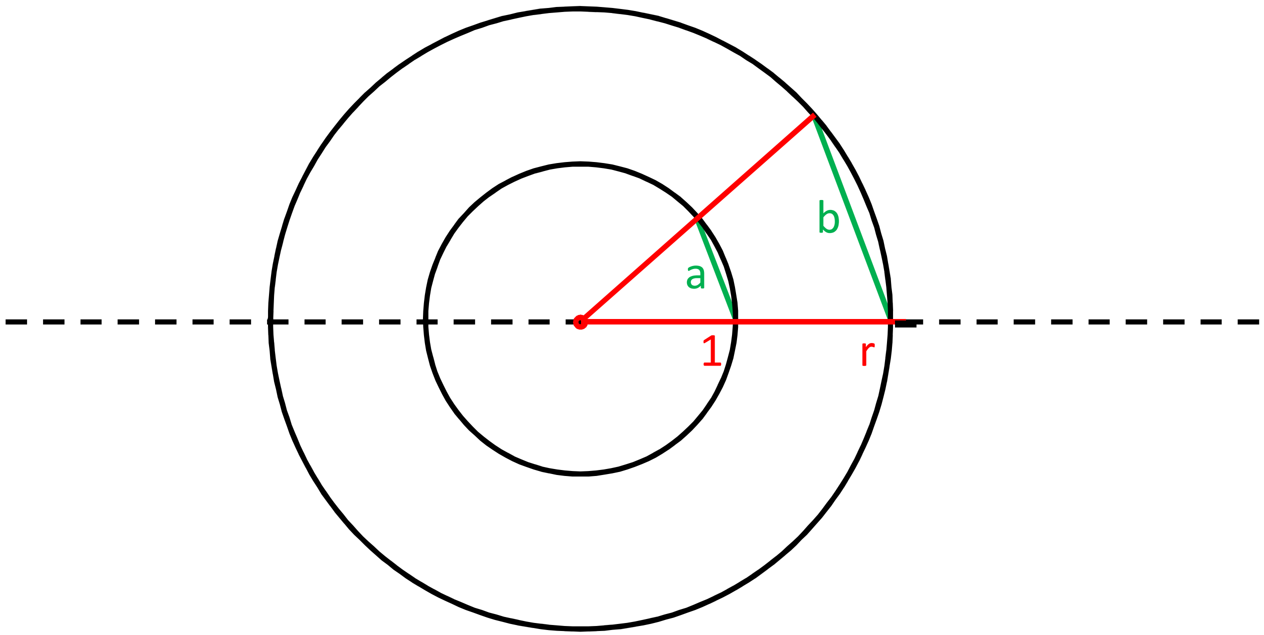
$$\pi = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} \cdot \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

n = 2 : 3.141587390

n = 5 : 3.141592653

n = 6 : 3.141592654

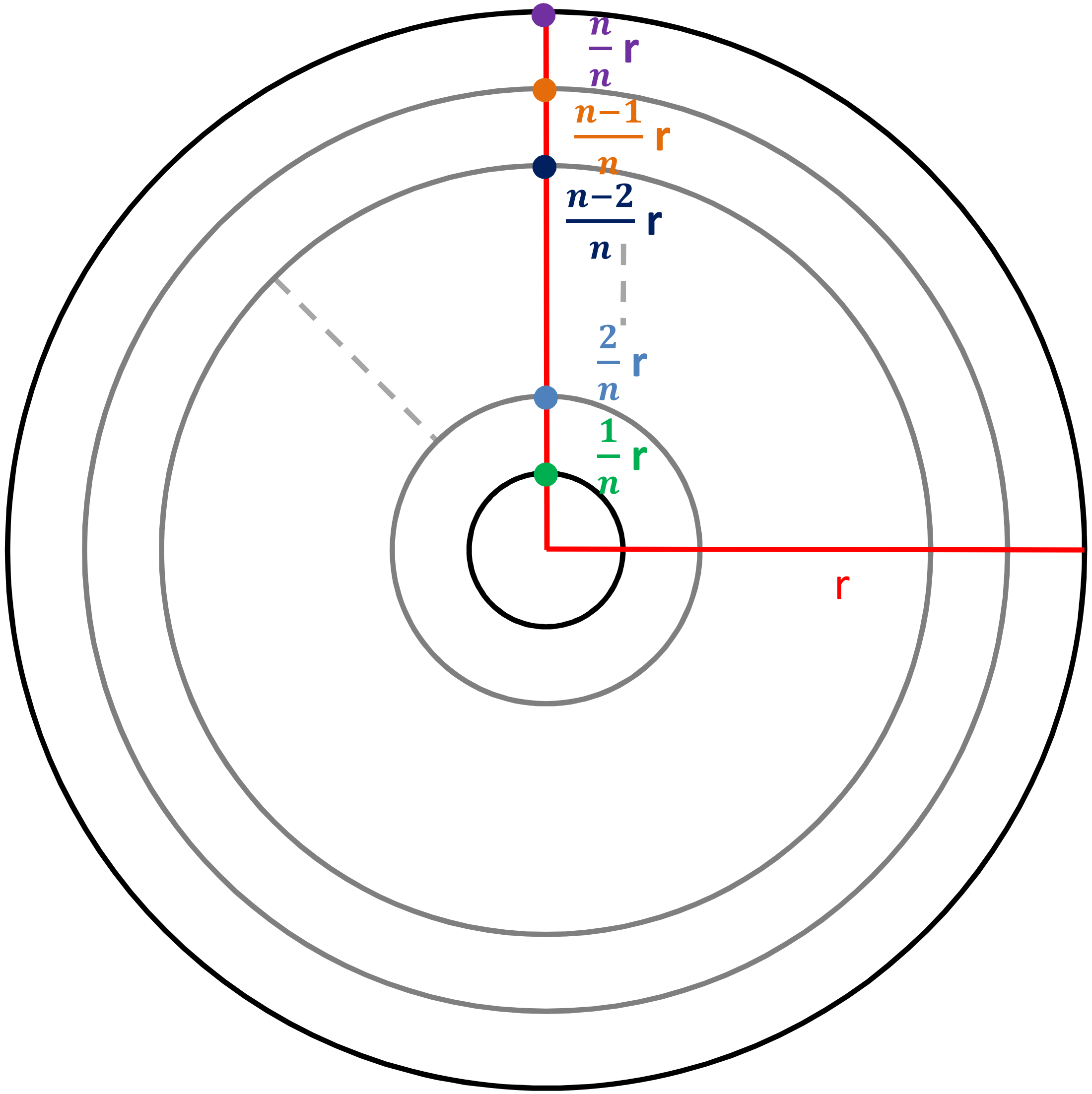
n = 100 : 3.141592654



$\frac{b}{a} = \frac{r}{1}$, also b = a.r

Der Umfang des Kreises mit Radius r ist das r-fache des Umfangs des Kreises mit Radius 1, also **2rπ.**

$\sqrt{2}$ und π



Gauss: $1 + 2 + \ldots\ldots + 100 = ?$

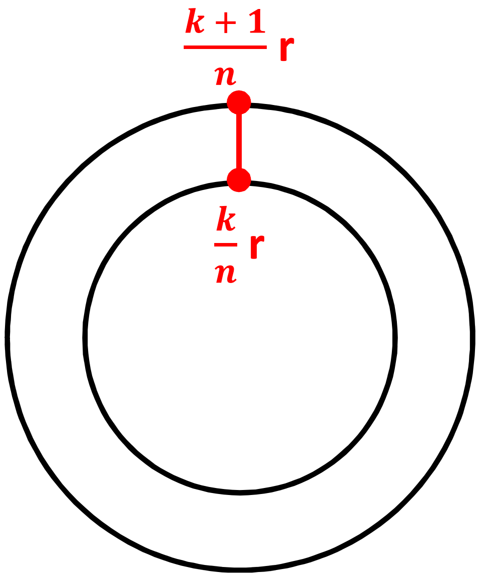
Kurzschreibweise: $\sum_{k=1}^{100} k = ?$

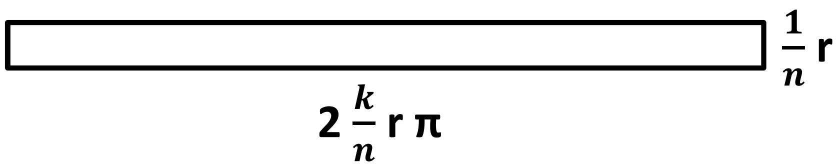
$$\sum_{k=1}^{100} k = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) =$$
$$= 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) =$$

$$= [1+(n-1)] + [2+(n-2)] + \ldots + [(\frac{[n-1]}{2} + \frac{[n+1]}{2})] =$$

$$= \frac{[n-1]}{2} \cdot n$$





$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}\, 2r^2\pi = \frac{2\,r^2\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{2r^2\pi}{n^2} \cdot \frac{(n\,(n-1))}{2} = r^2\pi\,(1 - \frac{1}{n})$$

Fläche eines Kreises mit Radius r: $\lim_{n \to \infty} r^2\,\pi\,(1 - \frac{1}{n}) = \mathbf{r^2\,\pi}$

Bruchzahlen (rationale Zahlen): Quotienten von ganzen Zahlen;
zum Beispiel: $\frac{3}{4}$, $\frac{-7}{13}$, $7{,}18 = \frac{718}{100}$, $93{,}995 = \frac{93995}{1000}$, …

Alle Zahlen, die durch Ziffern dargestellt werden können, sind Bruchzahlen (rationale Zahlen).

$\sqrt{2}$ ist keine Bruchzahl:

Wäre $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen sind und nicht beide durch 2 teilbar, dann:

$2 = \frac{a^2}{b^2}$, $a^2 = 2b^2$

a^2 durch 2 teilbar, also $a = 2c$

$4c^2 = 2b^2$, $2c^2 = b^2$

b^2 durch 2 teilbar, also auch b. Widerspruch!

π ist keine Bruchzahl: Beweis viel schwieriger (Lambert, 1761)

$\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **kann nicht durch Ziffern dargestellt werden** (nur Bruchzahlen können durch Ziffern dargestellt werden), wie dann?

a, b, c, d Bruchzahlen

$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$
$a - c = (d - b)\sqrt{2}$
Wäre $d - b \neq 0$, wäre $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$ eine Bruchzahl (Widerspruch).

Also: $d = b$ und $a = c$.
„Die Bruchzahlen a, b sind durch die reelle Zahl a + b $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ eindeutig bestimmt.“

$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a + c) \pm (b + d)\sqrt{2}$
$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$

Wenn $(a, b) \neq (0, 0)$:
$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \neq 0$
Denn:
Wenn $b = 0$: $a^2 - 2b^2 = a^2 \neq 0$
Wenn $b \neq 0$: Wäre $a^2 - 2b^2 = 0$, wäre $(\frac{a}{b})^2 = 2$, also $\sqrt{2} = (\frac{a}{b})$ eine Bruchzahl.
Also: $1/(a + b\sqrt{2}) = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$

„Addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert (außer durch 0) man Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$, erhält man wieder solche.“

Darstellung am Computer:

$a + b\sqrt{2}$ durch (a, b)

z.B.: $-2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$ durch $(-2, \frac{5}{2})$

$(a, b) \pm (c, d) := (a \pm c, b \pm d)$

$(a, b) \cdot (c, d) := (ac + 2bd, ad + bc)$

$1/(a, b) := (\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2})$

Rechnen mit $\sqrt{2}$ im Computeralgebrasystem MAPLE

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+2\cdot \mathrm{sqrt}(2)\right)^3\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{2}\cdot \mathrm{sqrt}(2)\right)^2}{\left(11-\frac{4}{7}.\mathrm{sqrt}(2)\right)};$$

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+2\sqrt{2}\right)^3\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}{11-\frac{4}{7}\sqrt{2}}$$

Rechnen mit $\sqrt{2}$ im Computeralgebrasystem MAPLE

$$evala\left(\frac{\left(\frac{3}{4}+2\cdot \mathrm{sqrt}(2)\right)^3\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{2}\cdot \mathrm{sqrt}(2)\right)^2}{\left(11-\frac{4}{7}.\mathrm{sqrt}(2)\right)}\right);$$

$$\frac{28382719}{5283712}+\frac{4566119}{660464}\sqrt{2}$$

Reelle (bzw. komplexe) Zahlen, die Nullstellen von Polynomfunktionen mit rationalen Koeffizienten sind, heißen **algebraische Zahlen**. Reelle (bzw. komplexe Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendente Zahlen**.

Das heißt: für eine algebraische Zahl a gibt es Bruchzahlen (rationale Zahlen)

$$c_0, c_1, c_2, \ldots , c_n$$

so, dass nicht alle = 0 sind und

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n = 0$$

ist.

Beispiel: $2 - \sqrt{2}^2 = 0$ ($c_0 = 2, c_1=0, c_2=-1$), $\sqrt{2}$ ist eine algebraische Zahl.

Beispiel: $\sqrt[3]{5}$ ist eine algebraische Zahl.

Beispiel: Jede Bruchzahl ist eine rationale Zahl.

Carl Lindemann (1882): **π ist eine transzendente Zahl**.
Das heißt: Für alle natürlichen Zahlen n und alle rationalen Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ mit

$$c_0 + c_1 \pi + c_2 \pi^2 + \ldots + c_n \pi^n = 0$$

folgt,
dass $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ ist.

Charles Hermite (1873): Die Eulersche Zahl e ist eine transzendente Zahl.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$