Proseminar Stochastik 2
9. Blatt

38. Die Situation ist dieselbe wie in Aufgabe 33. Der Bäcker behauptet, der Erwartungswert des Gewichts seines Kleingebäcks sei mindestens 50 Gramm. Testen Sie diese Behauptung zum Niveau 0,5. ($t_{9;1-0{,}05} = 1,83$.)

39. *Bertrand'sches Paradoxon*:
In der Einheitskreis-Scheibe $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ wird zufällig eine Sehne gezogen. Bestimmen Sie die Verteilung der Länge L dieser Sehne und insbesondere die Wahrscheinlichkeit dafür, dass L größer ist als $\sqrt{3}$. Das ist nämlich die Seitenlänge des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Berechnen Sie die Verteilung unter folgenden *verschiedenen* Modellannahmen:

    (a) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt M bestimmt (bis auf den Fall eines Durchmessers, dieser Fall bekommt aber die Wahrscheinlichkeit 0); der Mittelpunkt M der Sehne ist gleichverteilt in K. (Tipp: L ist eine Funktion der Zufallsvariablen R allein.)

    (b) Die Sehne wird durch ihre Endpunkte A und B bestimmt; die Endpunkte werden unabhängig voneinander auf dem Rand von K gewählt. Tipp: Sie können zur Vereinfachung $A = (1, 0)$ wählen.

    (c) Die Sehne wird bestimmt durch ihren Abstand D vom Punkt $(0, 0)$; der Abstand D ist gleichverteilt im Intervall $[0, 1]$.

    Die Tatsache, dass diese "geometrischen" Wahrscheinlichkeiten nicht eindeutig bestimmt sind, wird als Bertrand'sches Paradoxon bezeichnet.

40. Sei $n = 4$, $r = 3$ und
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
die Designatrix des linearen Modells von Aufgabe 36. Die Fehlergrößen $\xi_1, \ldots, \xi_4$ seien unkorreliert. Für den Beobachtungsvektor Y gilt die Gleichung
$$Y = Ac + \sigma^2 \xi.$$
$Y = (2, 4, -2, -4)^t$ sei ein Beobachtungsvektor. Berechnen Sie eine Schätzung für den unbekannten Skalenparameter σ^2 nach Satz 14.1.2.

41. $Y = (0, 40, -36, 0)^t$ sei ein anderer Beobachtungsvektor des linearen Modells der vorigen Aufgabe. Berechnen Sie Schätzungen für den Verschiebungsparameter c und den Skalenparameter σ^2.

42. Die Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{(1+x)^3} & \text{falls } 0 \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante k und wenn möglich Erwartungswert und Varianz von X.

43. Die Anzahl der Kinder in einer Familie sei Poisson-verteilt mit dem Parameter λ. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind ein Mädchen oder ein Bub ist, sei jeweils 1/2.

    (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y, welche die Anzahlen der Mädchen bzw. der Buben in der Familie angeben.

    (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

    (c) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

    Anleitung: Berechnen Sie zuerst die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = x|\text{Gesamtzahl der Kinder} = z)$ (Binomialverteilung).