Proseminar Stochastik 2
8. Blatt

31. Als Brenndauern von 10 Glühlampen sind 1872, 2009, 1884, 1910, 2001, 2024, 1892, 1924, 1938, 1865 Stunden gemessen worden. Der Hersteller gibt einen Erwartungswert von 2000 Stunden an. Kann man ihm glauben? (Einseitiger t-Test für den Erwartungswert zum Niveau $0,05$, $t_{9;1-0,05} = 1,83$.) Anleitung: Schreiben Sie den rechtsseitigen Test um oder verwenden Sie die negativen Werte der Brenndauern, welche auch normalverteilt sind.

32. Die Zufallsvariablen X und Y seien exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und unabhängig.

    (a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $(X, \frac{Y}{X})$ und die Dichte von $\frac{Y}{X}$.

    (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens dreimal so groß ist wie Y, das heißt: $P(\frac{Y}{X} < \frac{1}{3})$. Berechnen Sie auch den Erwartungswert $E(\frac{Y}{X})$. (Man kann X und Y als Wartezeiten zweier Personen in zwei verschiedenen Warteschlangen vor einem Amt oder einer Kassa auffassen. Der Umstand, dass die oben erwähnte Wahrscheinlichkeit recht groß und sowohl $E(\frac{Y}{X})$ als auch $E(\frac{X}{Y})$ gar ∞ sind, heißt Warteschlangenparadoxon. Man hat häufig den Eindruck, in der falschen Warteschlange zu stehen.)

33. Eine Stichprobe von 10 Stück einer bestimmten Kleingebäcksorte eines Bäckers erbrachte folgende Gewichte: 48,2, 50,5, 51,1, 47,4, 46,8, 50,3, 49,0, 47,8, 50,9 und 48,7 Gramm. Bestimmen Sie ein 0,95-Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Gewichtes. ($t_{9;1-0,025} = 2,26$.)

34. $X : \Omega \to]0, \infty[$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ seien Zufallsvariable, z eine reelle Zahl. Zeigen Sie:
$$f(r) := P\left(\frac{Y + r}{X} \geq z\right)$$
ist monoton nicht abnehmend.

35. Zeigen Sie, dass im n-dimensionalen gaußschen Produktmodell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (P_{(\mu,\sigma^2)})_{(\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times]0,\infty[})$ für alle $\mu \leq \mu_0 \in \mathbb{R}$, für jedes $\sigma^2 \in]0, \infty[$ und für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt:
$$P_{(\mu,\sigma^2)}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s_X} \geq z\right) \leq P_{(\mu_0,\sigma^2)}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s_X} \geq z\right).$$
Tipp: Verwenden Sie die Gleichung $\bar{X} - \mu_0 = \bar{X} - \mu - (\mu_0 - \mu)$ und *nicht* die vorige Aufgabe.

36. Sei $n = 4$, $r = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix eines linearen Modells. $Y = (2, 4, -2, -4)^t$ sei ein Beobachtungsvektor. Berechnen Sie $\hat{c}$ nach Satz 14.1.1.

37. Die monatlichen Lebenshaltungskosten (in Euro) von Studenten sind N(μ,900)-verteilt. Bei 36 ausgewählten Mathematikstudenten wurden durchschnittliche monatliche Lebenshaltungskosten von 590 Euro festgestellt.

    (a) Sind die monatlichen Lebenshaltungskosten signifikant niedriger als das Höchststipendium von 600 Euro? Beantworten Sie diese Frage anhand eines geeigneten Tests φ über die Erwartung bei bekannter Varianz zu den Niveaus $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$.

    (b) Bestimmen Sie den Funktionswert der jeweiligen Gütefunktion $\beta_\varphi(\mu)$ für $\mu = 600$.

    (Die α-Quantile z_α der Standardnormalverteilung betragen: $z_{0,95} = 1,645$, $z_{0,99} = 2,326$.)

38. Die Situation ist dieselbe wie in Aufgabe 33. Der Bäcker behauptet, der Erwartungswert des Gewichts seines Kleingebäcks sei mindestens 50 Gramm. Testen Sie diese Behauptung zum Niveau 0,5. ($t_{9;1-0,05} = 1,83$.)