Proseminar Stochastik 2
7. Blatt

25. Situation und Bezeichnungen sind wie in Aufgabe 19.

    (a) Bestimmen Sie die marginalen Dichten der gemeinsamen Dichte $f_{R,\Phi}(r,\varphi) = \frac{r}{\pi} \cdot 1_{]0,1[}(r) \cdot 1_{]0,2\pi[}(\varphi)$ des Zufallsvektors (R,Φ) und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Φ.

    (b) Zeigen Sie, dass R und Φ unabhängig sind.

26. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ seien beliebige Zufallsvariable (sie müssen nicht diskret sein oder eine Dichte besitzen). Zeigen Sie: X, Y sind genau dann unabhängig, wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ von X und Y das Produkt ihrer marginalen Verteilungsfunktionen $F_X(x)$ und $F_Y(y)$ ist. Verwenden Sie dabei die Formel

    $$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2)$$

    und beschränken Sie sich auf offen-abgeschlossene Intervalle.

27. Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $]0,1[$. Ermitteln Sie die Verteilungsdichten von $X^3, 1/X$ und $\sqrt{X}$.

28. Die positive Zufallsvariable Y heißt log-normalverteilt, wenn die Zufallsvariable $\log Y$ N(0,1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Dichte einer log-normalverteilten Zufallsvariablen.

29. X sei eine symmetrische Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Dichte f. "Symmetrisch" bedeutet in diesem Fall: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(-t) = f(t)$. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Zufallsvariablen $|X|$. (Ergebnis: $f_{|X|}(t) = 2f(t)1_{[0,\infty[}(t)$.)

30. Die Zufallsvariablen X und Y seien exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und unabhängig.

    (a) Bestimmen Sie die Dichte, die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $|Y - X|$. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse der Aufgaben 23 und 29.

    (b) Bestimmen Sie die Dichte, die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X + Y$.

31. Als Brenndauern von 10 Glühlampen sind 1872, 2009, 1884, 1910, 2001, 2024, 1892, 1924, 1938, 1865 Stunden gemessen worden. Der Hersteller gibt einen Erwartungswert von 2000 Stunden an. Kann man ihm glauben? (Einseitiger t-Test für den Erwartungswert zum Niveau $0,05$, $\mathrm{t}_{9;1-0,05} = 1,83$.) Anleitung: Schreiben Sie den rechtsseitigen Test um oder verwenden Sie die negativen Werte der Brenndauern, welche auch normalverteilt sind.

32. Die Zufallsvariablen X und Y seien exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und unabhängig.

    (a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $(X, \frac{Y}{X})$ und die Dichte von $\frac{Y}{X}$.

    (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens dreimal so groß ist wie Y, das heißt: $P(\frac{Y}{X} < \frac{1}{3})$. Berechnen Sie auch den Erwartungswert $E(\frac{Y}{X})$. (Man kann X und Y als Wartezeiten zweier Personen in zwei verschiedenen Warteschlangen vor einem Amt oder einer Kassa auffassen. Der Umstand, dass die oben erwähnte Wahrscheinlichkeit recht groß und sowohl $E(\frac{Y}{X})$ als auch $E(\frac{X}{Y})$ gar ∞ sind, heißt Warteschlangenparadoxon. Man hat häufig den Eindruck, in der falschen Warteschlange zu stehen.)