Proseminar Stochastik 2
6. Blatt

21. Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreieck $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x, y < 1, x + y < 1\}$.

    (a) Berechnen Sie die marginalen Dichten f_X und f_Y sowie die Verteilungsfunktionen von X und Y.

    (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Z := \frac{Y}{X}$.

22. Die unabhängigen Zufallsvariablen X und Y seien beide N(0,1)-verteilt. Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Dichte des Zufallsvektors $(X, \frac{Y}{X})$ und daraus die Dichte von $\frac{Y}{X}$.

23. Die unabhängigen Zufallsvariablen X und Y seien beide exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 1$. Berechnen Sie die Dichten von $-Y$ und von $X - Y$. Berechnen Sie die Dichte von $X - Y$ auch, indem Sie zuerst die gemeinsame Dichte von $(X-Y, Y)$ bestimmen und dann die erste marginale Dichte, das heißt: die Dichte von $X - Y$ berechnen.

24. Beweisen Sie die mehrdimensionale Transformationsformel für den Erwartungswert
$$E(u(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) f(x, y) dx dy$$
im Falle $u(x, y) := x$.

25. Die Zufallsvariablen X und Y seien gleichverteilt auf $[0, 1]$ und unabhängig. Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$ nach der Faltungsformel.

26. Situation und Bezeichnungen sind wie in Aufgabe 19.

    (a) Bestimmen Sie die marginalen Dichten der gemeinsamen Dichte $f_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{\pi} \cdot 1_{]0,1[}(r) \cdot 1_{]0,2\pi[}(\varphi)$ des Zufallsvektors (R, Φ) und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Φ.

    (b) Zeigen Sie, dass R und Φ unabhängig sind.

27. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ seien beliebige Zufallsvariable (sie müssen nicht diskret sein oder eine Dichte besitzen). Zeigen Sie: X, Y sind genau dann unabhängig, wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ von X und Y das Produkt ihrer marginalen Verteilungsfunktionen $F_X(x)$ und $F_Y(y)$ ist. Verwenden Sie dabei die Formel
$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$
und beschränken Sie sich auf offen-abgeschlossene Intervalle.

28. Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $]0,1[$. Ermitteln Sie die Verteilungsdichten von $X^3, 1/X$ und $\sqrt{X}$.

29. Die positive Zufallsvariable Y heißt log-normalverteilt, wenn die Zufallsvariable $\log Y$ N(0,1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Dichte einer log-normalverteilten Zufallsvariablen.