Proseminar Stochastik 2
4. Blatt

17. Der Zufallsvektor (X_1, X_2) besitze die Gleichverteilung über $[0,1]^2$. Wir setzen $X_{(1)} := \min\{X_1, X_2\}, X_{(2)} := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X_{(1)}, X_{(2)}$ und ihre Dichte.

18. Bei einem Schilanglauf-Bewerb stellen sich vier Betreuer rein zufällig entlang des 1 km langen Zieleinlaufs auf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass der Abstand zwischen irgend zwei der Betreuer größer als
a) 600 m   b) 300 m   c) 150 m   ist.
Anleitung: Die Standpunkte der vier Betreuer sind vier Zufallsvariable X_1, X_2, X_3, X_4, deren gemeinsame Verteilung die Gleichverteilung auf $[0,1]^4$ ist. Das Ereignis A ist gegeben durch $A = \{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in A'\}$ mit $A' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : \exists\, i, j \in \{1,2,3,4\}, \text{sodass}\, |x_j - x_i| > a\}$. Teilen Sie A' in Bereiche $A' \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 < x_2 < x_3 < x_4\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \text{ und } x_4 > x_1 + a\}$, $A' \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 < x_2 < x_4 < x_3\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : x_1 < x_2 < x_4 < x_3 \text{ und } x_3 > x_1 + a\}$ und so weiter und berechnen Sie die Inhalte dieser Bereiche. Verwenden Sie die Tatsache, dass alle diese Bereiche kongruent sind.

19. Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf der Einheitskreis-Scheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0, 1[\times \{0\})$.

    (a) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (R, Φ), wobei $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und Φ den Winkel bezeichnet, den (X, Y) mit der x-Achse bildet.

    (b) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen R.

    (c) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

    (d) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind. (Betrachten Sie zum Beispiel das Ereignis $\{X \leq -1/\sqrt{2}, Y \leq -1/\sqrt{2}\}$ oder berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$).

20. *Paradoxon von St. Petersburg:* Jemand lädt zu folgendem Spiel ein: Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf aufliegt. Liegt beim k-ten Wurf zum ersten Mal Kopf auf, so gewinnt der Spieler $X(k) = 2^k$ Euro.

    (a) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn X.

(b) Ist es vernünftig, für dieses Spiel 50 Euro Spieleinsatz zu leisten? (Denken Sie an die begrenzten Ressourcen.)

(c) Zeigen Sie: Wenn Kopf eine geringere Wahrscheinlichkeit $p < 1/2$ hat als Zahl, die Münze also verfälscht ist, werden höhere Gewinne wahrscheinlicher (ist das paradox?). Das heißt genauer: Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $k \geq k_0$ gilt: $P(X = 2^k) > 2^{-k}$. (Die letzte Zahl entspricht der Wahrscheinlichkeit bei unverfälschter Münze.)

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns X, wenn Kopf eine größere Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ hat als Zahl.

21. Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreieck $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x, y < 1, x + y < 1\}$.

(a) Berechnen Sie die marginalen Dichten f_X und f_Y sowie die Verteilungsfunktionen von X und Y.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Z := \frac{Y}{X}$.

22. Die unabhängigen Zufallsvariablen X und Y seien beide N(0,1)-verteilt. Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Dichte des Zufallsvektors $(X, \frac{Y}{X})$ und daraus die Dichte von $\frac{Y}{X}$.

23. Die unabhängigen Zufallsvariablen X und Y seien beide exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 1$. Berechnen Sie die Dichten von $-Y$ und von $X - Y$. Berechnen Sie die Dichte von $X - Y$ auch, indem Sie zuerst die gemeinsame Dichte von $(X - Y, Y)$ bestimmen und dann die erste marginale Dichte, das heißt: die Dichte von $X - Y$ berechnen.