Proseminar Stochastik 2
3. Blatt

12. In das Intervall $[0, a]$ werden willkürlich und unabhängig zwei Punkte geworfen. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Abstands der beiden Punkte und den Erwartungswert des Abstands.
Anleitung: Die Punkte X und Y sind Zufallsvariable, deren gemeinsame Verteilung die Gleichverteilung auf $[0, a]^2$ ist.

13. *Würfelparadoxon:* Anton und Berta spielen mit zwei sonderbaren Würfeln: Der Würfel A von Anton trägt die Augenzahlen 6-3-3-3-3-3, der Würfel B von Berta die Augenzahlen 5-5-5-2-2-2; wer die höhere Augenzahl würfelt, gewinnt. Wir sagen: Der Würfel C übertrifft den Würfel D (in Zeichen: $C \succ D$), wenn die Wahrscheinlichkeit, dass C die höhere Augenzahl zeigt als D, größer als 1/2 ist.

    (a) Zeigen Sie, dass Antons Würfel A Bertas Würfel B übertrifft.

    (b) Berta bemerkt das und schlägt Folgendes vor: Sie beschriftet einen dritten Würfel C, Anton kann sich einen der drei Würfel aussuchen und Berta spielt dann mit einem der zwei übrig gebliebenen. Kann Berta C so beschriften, dass sie auf jeden Fall einen Würfel erhält, der den von Anton übertrifft, dass also $A \succ B \succ C \succ A$ gilt? (Daraus folgt: Die Relation "$\succ$" ist nicht transitiv.)

14. In das Intervall $[0, a]$ werden willkürlich und unabhängig zwei Punkte geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die durch die Punkte abgeteilten Strecken zu den Seiten eines Dreiecks gemacht werden können?

15. (X, Y) sei ein Zufallsvektor mit Dichte $f(x, y)$. Bestimmen Sie zuerst die Dichte des Zufallsvektors $(X, X + Y)$ und dann diejenige von $X + Y$ (marginale Dichte).

16. Eine englische Dame behauptet, Sie könne am Geschmack einer Tasse Tee mit Milch erkennen, ob zuerst Milch und dann Tee in die Tasse gegeben worden ist oder umgekehrt. Um ihre Fähigkeit zu testen, werden acht Tassen Tee zubereitet, je vier auf die zwei verschiedenen Arten, und der Dame in zufälliger Reihenfolge zur Beurteilung vorgesetzt. Einen Treffer soll die Dame nur erzielen, wenn sie alle acht Tassen richtig zuordnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_0 dafür, dass die acht Tassen in die richtigen Vierergruppen eingeteilt werden, wenn die Einteilung rein zufällig ist. Der Versuch wird nun zehnmal wiederholt und der Dame die von ihr behauptete Fähigkeit bescheinigt, wenn sie mindestens zwei Treffer erzielt. Zeigen

Sie, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit für diesen Test unter einem Prozent liegt (Nullhypothese ist die reine Zufälligkeit: $p = p_0$).

Die Dame findet diese Regelung zu streng und man schlägt folgenden Test vor: Es werden je sechs Tassen nach den zwei verschiedenen Methoden zubereitet und der Dame in willkürlicher Reihenfolge angeboten; als Treffer gilt jetzt schon die richtige Zuordnung von mindestens fünf Tassen jeder Sorte. Die Fähigkeit soll anerkannt werden, wenn die Dame in zehn unabhängigen Versuchen mindestens drei Treffer erzielt. Bestimmen Sie auch für diesen Test die Irrtumswahrscheinlichkeit, und falls sich die Irrtumswahrscheinlichkeiten unterscheiden, erklären Sie den Unterschied. (Den Tee vor der Milch in die Tasse zu gießen wird in England angeblich als Sakrileg angesehen.)

17. Der Zufallsvektor (X_1, X_2) besitze die Gleichverteilung über $[0,1]^2$. Wir setzen $X_{(1)} := \min\{X_1, X_2\}, X_{(2)} := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X_{(1)}, X_{(2)}$ und ihre Dichte.

18. Bei einem Schilanglauf-Bewerb stellen sich vier Betreuer rein zufällig entlang des 1 km langen Zieleinlaufs auf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass der Abstand zwischen irgend zwei der Betreuer größer als
a) 600 m b) 300 m c) 150 m ist.
Anleitung: Die Standpunkte der vier Betreuer sind vier Zufallsvariable X_1, X_2, X_3, X_4, deren gemeinsame Verteilung die Gleichverteilung auf $[0,1]^4$ ist. Das Ereignis A ist gegeben durch $A = \{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in A'\}$ mit $A' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : \exists\, i, j \in \{1,2,3,4\}, \text{sodass}\, |x_j - x_i| > a\}$. Teilen Sie A' in Bereiche $A' \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 < x_2 < x_3 < x_4\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \text{ und } x_4 > x_1 + a\}$, $A' \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 < x_2 < x_4 < x_3\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : x_1 < x_2 < x_4 < x_3 \text{ und } x_3 > x_1 + a\}$ und so weiter und berechnen Sie die Inhalte dieser Bereiche. Verwenden Sie die Tatsache, dass alle diese Bereiche kongruent sind.

19. Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf der Einheitskreis-Scheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0,1[\times \{0\})$.

    (a) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (R, Φ), wobei $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und Φ den Winkel bezeichnet, den (X, Y) mit der x-Achse bildet.

    (b) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen R.

    (c) Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

(d) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind. (Betrachten Sie zum Beispiel das Ereignis $\{X \leq -1/\sqrt{2}, Y \leq -1/\sqrt{2}\}$ oder berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$).