Proseminar Stochastik 2
15. Blatt

1. Buch, Aufgabe III.5.10, Seite 58. Hinweis: Lösen Sie das System von Differenzengleichungen mit dem Ansatz: $p(x) = k \cdot x + d, k, d \in \mathbb{R}$.

2. Wir nehmen an, dass die Lebensdauer eines integrierten Schaltkreises (IC) exponentialverteilt ist zum Parameter λ. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der erste IC in Betrieb genommen. Jeder IC wird sofort durch einen neuen gleicher Bauart ersetzt, wenn er defekt ist. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der ICs, die man bis zum Zeitpunkt t benötigt. (Poissonprozess.)

3. *Telegrafenprozess:* Gegeben sei ein Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ zur Intensität λ. Wir definieren die Zufallsvariable Y_t durch $Y_t := (-1)^{N_t}$. Zeigen Sie, dass für alle s, t mit $0 \leq s < t$ gilt: $P\{Y_s = Y_t\} = (1 + e^{-2\lambda(t-s)})/2$. Tipp: Verwenden Sie die Reihenentwicklung für $\cosh(\lambda(t-s))$.

4. Um den Einfluss von Alkohol und Energydrinks auf die Verkehrssicherheit zu ermitteln, wurden bei 24 Personen Reaktionszeiten gemessen (in Hundertstelsekunden), welche in der folgenden Tabelle aufgegliedert sind:

Energy-drink	Promille Blutalkohol											
	0,0				0,5				1,0			
ohne	17	16	19	18	20	19	22	23	28	25	26	27
mit	16	18	17	17	20	21	18	23	30	28	31	29

Testen Sie auf dem Niveau 0,05 die folgenden Nullhypothesen gegen die entsprechenden Alternativen:

(a) Die Reaktionszeit hängt nicht vom Genuss eines Energydrinks ab.

(b) Die Reaktionszeit hängt nicht vom Blutalkoholspiegel ab.

(c) Es gibt keine Wechselwirkung zwischen den Faktoren Energydrink und Alkohol.

(Das Beispiel ist fiktiv.)

5. Um zu nachzuprüfen, ob der Umsatz in einem Supermarkt vom Wochentag abhängt wurde an zufällig gewählten Tagen der Umsatz bestimmt, und die erhaltenen Werte wurden in eine Tabelle eingetragen:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
17	20	19	23	17	30
25	14	20	16	19	24
13	18	27	16	17	32

Testen Sie die Nullhypothese, der Umsatz hänge nicht vom Wochentag ab, gegen die entsprechende Alternative (einfache Varianzanalyse).

6. $(Z_t)_{t\geq 0}$ sei ein zusammengesetzter Poissonprozess zur Sprungverteilung Q und zur Intensität λ. Zeigen Sie: Für jedes $t \geq 0$ hat die Zufallsvariable Z_t die Verteilungsfunktion

$$e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} Q^{\star i}.$$

Dabei ist $Q^{\star i} := \underbrace{Q \star \cdots \star Q}_{i\,Mal}$ für $i > 0$ und $Q^{\star 0}$ die Verteilung mit der kumulativen Verteilungsfunktion $x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

Anleitung: Es genügt, $P\{Z_t \leq \xi\} = P(\bigcup_{i=0}^{\infty}\{Z_t \leq \xi \wedge N_t = i\}$ zu bestimmen.