Proseminar Stochastik 2
10. Blatt

42. Die Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{(1+x)^3} & \text{falls } 0 \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante k und wenn möglich Erwartungswert und Varianz von X.

43. Die Anzahl der Kinder in einer Familie sei Poisson-verteilt mit dem Parameter λ. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind ein Mädchen oder ein Bub ist, sei jeweils 1/2.

    (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y, welche die Anzahlen der Mädchen bzw. der Buben in der Familie angeben.

    (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

    (c) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

    Anleitung: Berechnen Sie zuerst die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = x|\text{Gesamtzahl der Kinder} = z)$ (Binomialverteilung).

44. Ein Fahrzeuglenker ist an einem Verkehrsunfall ursächlich beteiligt gewesen. Zur Bestimmmung seines Blutalkoholgehaltes zum Zeitpunkt des Unfalls misst man den Alkoholgehalt seiner Atemluft zu n verschiedenen Zeitpunkten nach dem Unfall. Man trägt diejenigen Blutalkoholkonzentrationen (BAK), welche den Messwerten des Alkoholgehalts der Atemluft entsprechen, in ein Zeit-Alkoholkonzentrations-Diagramm ein und bestimmt die so genannte *Regressionsgerade* durch die Messpunkte. Dann extrapoliert man mittels der Regressionsgeraden die Blutalkoholkonzentration auf den Unfallzeitpunkt. Die Ermittlung der Regressionsgeraden entspricht folgendem linearen Modell:

    Die BAK Y_i zu den Zeitpunkten x_i gehorchen den Regressionsgleichungen

$$Y_i = 1 \cdot c_1 + x_i \cdot c_2 + \sigma \cdot \xi_i, \ 1 \leq i \leq n$$

oder, vektoriell geschrieben, $Y = Ac + \sigma\xi$ mit der Designmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \text{dem Verschiebungsparameter } c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

und dem Skalenparameter σ^2. Dabei entspricht c_1 dem Achsenabschnitt und c_2 der Steigung der Regressionsgeraden.

Wir betrachten jetzt folgenden Spezialfall:

$$n = 4,\ x_1 = 0,5,\ x_2 = 0,75,\ x_3 = 2,5,\ x_4 = 2,75 \text{ (Stunden)},$$

$$Y_1 = 0,479,\ Y_2 = 0,527,\ Y_3 = 0,207,\ Y_4 = 0,207 \text{ (Promille)}.$$

Bestimmen Sie Schätzungen für den Verschiebungsparameter c und den Skalenparameter σ^2 und errechnen Sie daraus den BAK zum Zeitpunkt 0.

45. Ermitteln Sie in Aufgabe 44 eine 0,90-Konfidenzellipse für c. Das 0,90-Quantil der $F_{2,2}$-Verteilung ist $f_{2,2;90} = 9,00$.

46. Die folgenden Daten sind mit Hilfe einer einzigen Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig voneinander erzeugt worden:

$$106, 43, 82, 47, 17, 42, 20, 44, 45, 114.$$

Berechnen Sie Schätzungen für den Erwartungswert μ und für die Streuung σ^2.

47. Bestimmen Sie in Aufgabe 46 ein 0,95-Konfidenzintervall für μ.

48. Testen Sie in Aufgabe 46 die Hypothese $H_0 : \mu \leq 25$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > 25$ zum Niveau 0,05.

(Quantile der t-Verteilung: $t_{9;1-0,025} = 2,26,\ t_{9;1-0,05} = 1,83.$)