

Proseminar "Einführung in die Mathematik 1"

WS 2010/11

28. Oktober 2010

23) Die Summe von $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \\ d + d' \end{bmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 + 2b_1 - 3c_1 + d_1 &= (a + a') + 2(b + b') - 3(c + c') + (d + d') = \\ &= (a + 2b - 3c + d) + (a' + 2b' - 3c' + d') = 0 + 0 = 0 \text{ und} \\ a_1 - c_1 &= (a + a') - (c + c') = (a - c) + (a' - c') = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

somit hat die Summe dieser Spalten dieselben Eigenschaften.

Sei nun $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix}$. Dann gilt für rationales Vielfaches $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{bmatrix} := r \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ ru \end{bmatrix}$:

$$x_1 + 2y_1 - 3z_1 + u_1 = rx + 2ry - 3rz + ru = r(x + 2y - 3z + u) = r \cdot 0 = 0.$$

Also haben alle rationalen Vielfachen der Spalten dieselben Eigenschaften.

24) $U_1 := \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist kein Untervektorraum, da die Nullmatrix 0_V ($V := \mathbb{Q}^{3 \times 3}$) nicht invertierbar ist. Für jedes $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ gilt nämlich: $0_V \cdot B = B \cdot 0_V = 0_V \neq I_3$.

$U_2 := \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \mid A_{12} + A_{22} + A_{31} + A_{21} = 0\}$ ist ein Untervektorraum. Klarerweise gilt: $0_V \in U_2$.

Sind $A, B \in U_2$ und ist $r \in \mathbb{Q}$, so gilt für $C := A + rB$:

$$\begin{aligned} C_{12} + C_{22} + C_{31} + C_{21} &= A_{12} + rB_{12} + A_{22} + rB_{22} + A_{31} + rB_{31} + A_{21} + rB_{21} = \\ &= A_{12} + A_{22} + A_{31} + A_{21} + r(B_{12} + B_{22} + B_{31} + B_{21}) = 0 + r \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist auch C Element von U_2 . Setzt man $r := 1$, so erhält man: $A + B \in U_2$, für $A := 0_V$ bekommt man: $rB \in U_2$.

$U_3 := \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \mid A_{13} - A_{22} + A_{11} + A_{31} = 1\}$ ist kein Untervektorraum, da $0_V \notin U_3$.

$$U_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\} \text{ ist kein Untervektorraum, weil } 0_V \notin U_4.$$

$U_5 := \{uE_{12} + vE_{31} - wE_{23} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \mid u, v, w \in \mathbb{Q}\}$ ist Untervektorraum.

$$0_V = 0E_{12} + 0E_{31} - 0E_{23} \in U_5.$$

Gilt: $A = u_1E_{12} + v_1E_{31} - w_1E_{23} \in U_5$, $B = u_2E_{12} + v_2E_{31} - w_2E_{23} \in U_5$, $r \in \mathbb{Q}$, so ist

$$A + rB = u_1E_{12} + v_1E_{31} - w_1E_{23} + r(u_2E_{12} + v_2E_{31} - w_2E_{23}) =$$

$((u_1 + ru_2)E_{12} + (v_1 + rv_2)E_{31} - (w_1 + rw_2)E_{23}) \in U_5$. Setzt man $r := 1$, so erhält man:

$$A + B \in U_5 \text{ für } A := 0_V \text{ bekommt man: } rB \in U_5.$$