

Proseminar "Einführung in die Mathematik 1"

WS 2010/11

14. Oktober 2010

11) Man berechnet natürliche Zahlen $z_n, \dots, z_{-p}$ mit $0 \leq z_n, \dots, z_{-p} < b$ so, dass

$$0 < \frac{c}{d} - z_n z_{n-1} \dots z_0 \cdot z_{-1} \dots z_{-p} < b^{-p}$$

ist, folgendermaßen: Man dividiert cb^p durch d mit Rest: $b^p = md + r$. Das ergibt:

$$\frac{c}{d} = \frac{cb^p}{db^p} = \frac{(md + r)}{db^p} = \frac{m}{b^p} + \frac{r}{d} \cdot b^{-p}.$$

Wegen $0 \leq r < d$ ist $\frac{r}{d} < 1$ und damit $\frac{c}{d} - \frac{m}{b^p} = \frac{r}{d} \cdot b^{-p} < b^{-p}$. Man braucht also nur noch die Zifferndarstellung von $\frac{m}{b^p}$ zur Basis b zu gewinnen.

Beispiel 1: $b = \text{zwei}$, $c = \text{einundvierzig}$, $d = \text{neunundzwanzig}$, $p = \text{vier}$

$$cb^p = 41 \cdot 16 = 656, 656 = 22 \cdot 29 + 18, \text{ also}$$

$$m = (22)_{10} = 16 + 4 + 2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 = (10110)_2, \frac{m}{b^p} = (\mathbf{1.0110})_2.$$

Beispiel 2: $b = \text{zehn}$, $c = \text{einundvierzig}$, $d = \text{neunundzwanzig}$, $p = \text{vier}$

$$cb^p = 41 \cdot 10^4 = 410\,000, 410\,000 = 29 \cdot 14\,137 + 27, \text{ also } m = (14\,137)_{10}, \frac{m}{b^p} = (\mathbf{1.4137})_{10}.$$

12) $z = \frac{7}{10}$, $p = 6$. Setze $a :=$ ganzzahliger Quotient von $7 \cdot 2^p$ und 12. Dann gilt gemäß dem Beweis von Satz 24:

$$0 \leq \frac{7}{12} - \frac{a}{2^p} < 2^{-p}. 2^p = 2^6 = 64, 7 \cdot 64 = 448, 448 = 12 \cdot 37 + 4, \text{ also}$$

$$a = (37)_{10} = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0 = (\mathbf{100101})_2.$$

Wir erhalten: $\frac{a}{2^p} = (\mathbf{0.100101})_2.$