Grundlegendes zu natürlichen Zahlen, Rechenoperationen und Rechengesetzen

Tobias Hell & Heiner Juen

Skriptum zu den Lehrveranstaltungen

Natürliche Zahlen und Zifferndarstellung

&

Rechenoperationen und Rechenregeln

Studienjahr 2017/2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Die natürlichen Zahlen

In diesem ersten Kapitel widmen wir uns dem Begriff der Zahl und dabei in erster Linie den natürlichen Zahlen. Beachten sollten wir hierbei, dass wir bereits eine gewisse Vorstellung von Zahlen mitbringen. So verwenden wir Zahlen und deren Zifferendarstellung ganz selbstverständlich – dabei sehen wir aber meist lediglich das elegante Resultat einer langen historischen Entwicklung. Unser Ziel ist es, die natürlichen Zahlen strukturell etwas näher zu verstehen und ihre verschiedenen Anwendungsaspekte kennenzulernen, wobei darunter etwa die folgenden fallen:

- ▷ Natürliche Zahlen als **Kardinalzahlen**: Antwort auf die Frage ‚*wieviele?*‘
- ▷ Natürliche Zahlen als **Ordinalzahlen**: Antwort auf die Frage ‚*der/die/das wievielte?*‘
- ▷ Natürliche Zahlen zur **Kodierung**, etwa bei Seriennummern: Antwort auf die Frage ‚*welcher/welche/welches?*‘

Die natürlichen Zahlen können also in einigen Fällen bereits eine Antwort auf drei sehr grundlegenden Fragen geben und somit zum Zählen, Ordnen und Identifizieren verwendet werden.

1.1 Mengen und Abbildungen

In diesem Abschnitt schaffen wir die Grundlagen zur Einführung der natürlichen Zahlen. Dazu geben wir zunächst die Definition einer Menge, die auf Cantor[1] zurückgeht.

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten, diese Objekte werden *Elemente* der Menge genannt. Ist X eine Menge und x ein Element von X, so schreiben wir

$$x \in X.$$

Mengen lassen sich etwa durch Aufzählen ihrer Elemente angeben. Dabei werden die Elemente zwischen zwei geschwungene Klammern („Mengenklammern“) geschrieben und durch Beistriche getrennt. Beispielsweise ist

$$\{\square, \circ, \triangle\}$$

[1] *Georg Cantor*, 1845 – 1918, deutscher Mathematiker

die Menge, welche $\square$, $\circ$ und $\triangle$ enthält. Man beachte, dass es dabei weder auf die Reihenfolge der Aufzählung noch auf die Anzahl der Nennungen eines Elements ankommt. Offenbar gilt

$$\circ \in \{\square, \circ, \triangle\}.$$

Oftmals ist es nicht möglich alle Elemente anzugeben. Beispielsweise definieren wir die Menge der **natürlichen Zahlen** durch

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\},$$

da offensichtlich ist, wie die drei Punkte zu interpretieren sind. Der Doppelpunkt gibt hierbei an, dass die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ den Namen $\mathbb{N}$ erhält – dies bezeichnet man als Definition. Wir sollten beachten, dass an dieser Stelle 1, 2, 3 usw. lediglich Namen der Elemente von $\mathbb{N}$ sind – natürlich uns vertraute Namen. Wenn wir nicht wüssten, dass es unüblich ist, könnten wir die Elemente auch Kevin, Chantal, Jacqueline usw. nennen. So einfach können wir uns also die Definition der natürlichen Zahlen offenbar nicht machen.

Weiters definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathbb{Z} &:= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}, \qquad \text{(ganze Zahlen)} \end{aligned}$$

wobei wir auch hierbei eigentlich schon auf unser Wissen über Zahlen zurückgreifen.

Gegeben seien zwei Mengen X und Y zwei Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von X nach Y ordnet jedem Element aus X genau ein Element aus Y zu. Man schreibt

$$f\colon\ X \to Y\colon\ x \mapsto f(x)$$

und nennt X **Definitionsbereich**, Y **Bildbereich** und $x \mapsto f(x)$ **Zuordnungsvorschrift** der Abbildung f. Für $x \in X$ heißt $f(x)$ **Funktionswert** von f an der Stelle x, man nennt x dann das **Argument**.

Beispiel 1.1 (Abbildung zwischen den natürlichen Zahlen) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto 2n$$

ordnet jeder natürlichen Zahl ihr Zweifaches zu. So ist beispielsweise $f(3) = 6$ und $f(5) = 10$. ◇

Anhand dieses Beispiels sehen wir, dass es sich bereits bei ‚einfachen' Rechenoperationen um Abbildungen handelt, also um Zuordnungen.

Aufgabe 1.2 Geben Sie eine Abbildung an, die jeder natürlichen Zahl ihr Dreifaches plus 7 zuordnet. ◇

Zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ lassen sich auch zu einem **(geordneten) Paar** zusammenfassen. Hierfür schreibt man (m, n) und die Menge aller dieser geordneten Paare bezeichnet man mit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (kartesisches[2] Produkt).

Wir betrachten die zwei Abbildungen

$$+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon (m,n) \mapsto m+n \quad \text{und} \quad \cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon (m,n) \mapsto m \cdot n,$$

also die **Addition** und die **Multiplikation** natürlicher Zahlen. Anstelle des Funktionswerts $+(m, n)$ schreiben wir also $m + n$ und wir bezeichnen $\cdot(m, n)$ mit $m \cdot n$. Uns ist natürlich bereits bekannt, was $+$ und $\cdot$ bedeutet, allerdings müssen wir diese grundlegenden Rechenoperationen eigentlich erst aus der Struktur der natürlichen Zahlen ableiten.

AUFGABE 1.3 Begründen Sie, warum es sich bei

$$-\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon (m,n) \mapsto m-n$$

um keine sinnvoll definierte Funktion handelt. $\diamond$

1.2 DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN ALS KARDINALZAHLEN

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y heißt **bijektiv** oder auch **Bijektion**, wenn es zu jedem Element des Bildbereichs Y genau ein Element $x \in X$ des Definitionsbereichs gibt, sodass $f(x) = y$ gilt. Bei einer Bijektion handelt es sich also um eine eineindeutige Zuordnung, denn jedem Element von X wird genau ein Element von Y zugeordnet und umgekehrt.

Mittels des Begriffs der Bijektion können wir präzisieren, was es beudetet, dass zwei Mengen ‚gleich viele' Elemente bezitzen. Wir sagen, dass die Mengen X und Y **gleichmächtig** sind, wenn es zwischen ihnen eine Bijektion gibt.

BEISPIEL 1.4 (Gleichmächtige Mengen) Die Mengen $X = \{\star, \square, \circ\}$ und $Y = \{*, \triangle, \diamond\}$ sind gleichmächtig, denn bei

$$f\colon X \to Y\colon \star \mapsto \triangle, \circ \mapsto \diamond, \square \mapsto *$$

handelt es sich um eine Bijektion. $\diamond$

Man nennt eine Menge X **Teilmenge** der Menge Y, wenn jedes Element von X auch ein Element von Y ist und wir schreiben in diesem Fall $X \subset Y$. Von einer **echten Teilmenge** sprechen wir, wenn $X \subset Y$ gilt und es mindestens ein Element in Y gibt, das

[2] *René Descartes*, 1596 – 1650, französischer Mathematiker

nicht in X liegt.

Eine Menge X nennen wir **unendlich**, wenn es eine echte Teilmenge Y von X gibt, sodass X und Y gleichmächtig sind. Dementsprechend heißt eine Menge **endlich**, wenn sie nicht unendlich ist. Man beachte, dass wir Endlichkeit definiert haben ohne die Elemente der Menge zu ‚zählen'.

Endliche Mengen können nun in Klassen eingeteilt werden: Wir fassen alle endlichen Mengen, die gleichmächtig sind, zu einer **Kardinalzahl** zusammen. Für eine endliche Menge X schreiben wir $\operatorname{card} X$ für ihre Kardinalzahl. Bezeichnet $\varnothing$ die **leere Menge** – dies ist jene Menge, die keine Elemente enthält – so lauten die üblichen Namen der Kardinalzahlen wie folgt:

$$0 := \operatorname{card} \varnothing, \quad 1 := \operatorname{card}\{\triangle\}, \quad 2 := \operatorname{card}\{\triangle, \square\}, \quad \ldots$$

Die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ der Kardinalzahlen ist dann die Menge $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen. Beispielsweise fasst also die natürliche Zahl 3 sämtliche Mengen mit drei Elementen zusammen. Dies liefert uns einen ersten Zahlbegriff.

1.3 Axiomatischer Zugang zu den natürlichen Zahlen

Im Gegensatz zur Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen werden wir in diesem Abschnitt die natürlichen Zahlen dadurch erhalten, dass wir gewisse Anforderungen an sie stellen – die sogenannten **Peano[3]-Axiome**. Diese besagen, dass es sich bei den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ um eine Menge versehen mit einer Nachfolgeabbildung $\sigma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ handelt, sodass folgendes gilt:

(1) $0 \in \mathbb{N}_0$

(2) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt genau einen Nachfolger $\sigma(n) \in \mathbb{N}_0$.

(3) Die natürliche Zahl 0 ist kein Nachfolger, d. h. es gibt kein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\sigma(n) = 0$.

(4) Unterschiedliche natürliche Zahlen besitzen verschiedene Nachfolger, d. h. für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $\sigma(m) = \sigma(n)$ gilt $m = n$.

(5) Jede Menge X, für die $0 \in X$ gilt und die zu jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger enthält, ist gleich den natürlichen Zahlen, d. h. es gilt $X = \mathbb{N}_0$.
(Induktionsprinzip)

[3] *Giuseppe Peano*, 1858 – 1932, italienischer Mathematiker

Die natürlichen Zahlen sind also dadurch charaktersiert, dass man „beginnend" bei einer bestimmten Zahl in eindeutiger Weise „weiterzählen" kann – und dieses Weiterzählen lierfert die Nachfolgefunktion σ. Man vergibt nun wiederum die uns vertrauten Namen:

$$1 := \sigma(0), \quad 2 := \sigma(1), \quad 3 := \sigma(2), \quad 4 := \sigma(3), \quad \ldots$$

Da im Gegensatz zum Zugang der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen nun nahezu unmittelbar eine Ordnung vorgegeben ist, spricht man in diesem Kontext von den natürlichen Zahlen als **Ordinalzahlen**.

1.4 Das Induktionsprinzip

Das Induktionsprinzip, welches wir als eines der Peano-Axiome in Abschnitt 1.3 kennengelernt haben, liefert eine Beweistechnik, um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen zu zeigen. Für jede natürlich Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $A(n)$ eine Aussage. Zum Beispiel könnte $A(n)$ folgende Aussage sein: „Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$." Wir möchten zeigen, dass $A(n)$ für jede natürliche Zahl n gilt. Dies können wir mittels **vollständiger Induktion** über n bewerkstelligen. Dazu geht man wie folgt vor:

(IA) **Induktionsanker:** Man zeigt, dass die erste Aussage, also $A(1)$, wahr ist. $(n = 1)$

(IS) **Induktionsschluss:** Man fixiert eine beliebige natürliche Zahl n.

Induktionsvoraussetzung: Man nimmt die n-te Aussage $A(n)$ als wahr an. (IV)

Induktionsschritt: Man zeigt, dass dann auch $A(n + 1)$ gilt, also dass die Schlussfolgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist. $(n \to n+1)$

Damit ist dann gezeigt, dass $A(n)$ für jede natürliche Zahl n gilt. Denn laut Induktionsanfang ist $A(1)$ wahr und aus dem Induktionsschritt erhält man somit die Richtigkeit der Aussage $A(2)$. Daraus folgt wiederum aus dem Induktionsschritt, dass dann auch $A(2)$ gilt und so weiter und so fort. Das kann man sich wie das Umwerfen einer Reihe von Dominosteinen vorstellen: Man schmeißt den ersten Stein um und stellt sicher, dass der erste den zweiten Stein mitreißt, dann der zweite den dritten usw. und so fort. Schlussendlich liegen alle Steine am Boden.

Beispiel 1.5 (Gaußsche[4] Summenformel) Wir zeigen, dass

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für jede natürliche Zahl n gilt. Das bewerkstelligen wir mittels vollständiger Induktion über n.

[4] *Carl Friedrich Gauß*, 1777–1855, deutscher Mathematiker

(IA) $\boxed{n = 1:}$ Offenbar gilt

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}. \qquad \checkmark$$

(IS) Wir fixieren eine natürlich Zahl n und setzen

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{IV}$$

als wahr voraus.
$\boxed{n \to n+1:}$ Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$1 + \ldots + (n+1) = (1 + \ldots + n) + (n+1) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

und damit der Induktionsschritt gezeigt. $\diamond$

Aufgabe 1.6 (Summe von Quadratzahlen) Zeigen Sie, dass

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\diamond$

Die Türme von Hanoi

Die Türme von Hanoi sind ein mathematisches Knobelspiel. Es besteht aus drei Stäben und mehreren gelochten Scheiben, welche alle verschieden groß sind und auf die Stäbe gesteckt werden können. Die drei Stäbe werden im Weiteren mit A, B und C bezeichnet.

Ziel des Spiels ist es, alle Scheiben vom Stab A unter zur Hilfenahme von Stab B auf den Stab C zu versetzen. Dabei müssen folgende Regeln eingehalten werden.

Die Regeln. Anfangs stecken alle Scheiben der Größe nach geordnet auf dem Stab A. Bei jedem Zug darf nun die oberste Scheibe eines Stabes auf einen anderen gelegt werden, aber nur wenn dort keine kleinere Scheibe liegt. Also muss stets eine Pyramidenform auf jedem Stab erhalten bleiben — die Scheiben sind stets der Größe nach geordnet.

Optimale Zugfolge. Diese Aufgabe soll in möglichst wenigen Zügen gelöst werden, es wird also eine optimale Zugfolge gesucht. Wie wir sehen werden, gibt es sogar nur eine solche Zugfolge. Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu Beginn des Spiels auf dem Stab A plazierten Schreiben, so bezeichnen wir mit $Z(n)$ die Anzahl der Züge für die optimale Zugfolge.

Behauptung. Für n Scheiben gilt $Z(n) = 2^n - 1$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über die Anzahl n der Schreiben.

(IA) $\boxed{n = 1\text{:}}$ Es liegt nur eine Scheibe auf Stab A. Offensichtlich besteht die optimale Zugfolge darin, diese Scheibe von Stab A auf Stab C zu legen. Daher ist

$$Z(1) = 1 = 2^1 - 1. \qquad \checkmark$$

(IS) Wir fixieren eine beliebige natürliche Zahl n und nehmen an, dass

$$Z(n) = 2^n - 1. \tag{IV}$$

$\boxed{n \to n + 1\text{:}}$ Da wir nach Induktionsvoraussetzung bereits die minimale Anzahl an Zügen kennen, um n Scheiben von einem Stab auf einen anderen umzuschichten, erhält man die optimale Zugfolge für $n + 1$ Scheiben nun wie folgt:

(1) die obersten n Scheiben werden von Stab A auf Stab B umgeschichtet

(2) von Stab A wird die unterste Scheibe auf Stab C verschoben

(3) die n Scheiben von Stab B werden auf Stab C umgeschichtet

Folglich ist

$$Z(n+1) \overset{\text{(IV)}}{=} 2Z(n) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

und damit der Induktionsschritt gezeigt.

n	2	3	4	5	6	...	64
$Z(n)$	3	7	15	31	63	...	18446744073709551615

Kapitel 2
Darstellungformen von Zahlen

Sehr früh wurde schon damit begonnen, große Zahlen durch **Bündeln** besser darzustellen. Bekannt ist die Bündelung bei den römischen Zahlen oder etwa bei den Babyloniern, die verschiedene Zahlzeichensysteme verwendeten, abhängig vom jeweils gezählten Objekt. In der französischen Sprache macht sich immer noch bemerkbar, dass die Bündelung 20 (vingt) eine gewisse Rolle spielt. So 80 wird mit „quatre vingt“ bezeichnet, 90 mit „quatre vingt dix“, während im französichsprachigen Belgien „normal“ gezählt wird: 80 ist „octante“ und 90 ist „nonante“.

Besonders übersichtlich wird das Zählen, wenn gleiche Bündelungsschritte ein Stellenwertsystem ergeben. Durchgesetzt hat sich das Dezimalsystem in der Sprache und Schrift, während in der Computertechnik das Binärsystem zu Tragen kommt. Wie wir sehen werden, kann jede natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ als Basis eines Stellenwertsystems verwendet werden.

2.1 Zifferndarstellung

Beispiel 2.1 Ein runder Geburtstag ist häufig Anlass eine größere Feier zu veranstalten. Wird der 60. Geburtstag gefeiert, wird genau genommen die 60. Wiederholung des Kalendertages der Geburt gefeiert, die Geburt liegt also 60 Jahre zurück. Das Ereignis (Zahl) ist somit klar, ob damit aber eine runde Zahl vorliegt hängt von der Darstellung dieser Zahl ab und diesem Fall an der Verwendung des uns vertrauten Dezimalsystems. Dass in einem anderen Stellenwertsystem etwa 60 ganz und gar nicht so „rund“ sein muss, werden wir im weiteren erfahren. ◇

Zahlen wurden mit Hilfe von Symbolen schon in sehr frühen Kulturen angeschrieben. Allen Stellenwertschreibweisen ist zu eigen, dass Bündelungen vorgenommen werden. Der wesentliche Charakter unseres Zahlensystems ist die Struktur des Stellenwertsystems unter Verwendung der Ziffer 0 – es sei erwähnt, dass die Ziffer 0 eine wesentliche Erfindung der Menschheit darstellt. Die Schreibweise der Zahlen in unserem gewohnten System stammt aus Indien, wurde von den Arabern übernommen und dann nach Europa gebracht. Die Rechenbücher von Adam Ries[1], die bis ins 17. Jahrhundert gedruckt wurden, haben vermutlich entscheidend dazu beigetragen, dass sich das dezimale System durchgesetzt hat.

[1] *Adam Ries*, ∼ 1492 – 1559, deutscher Rechenmeister

Stellenwertsysteme, denen gleichartige Bündelungsschritte zugrunde liegen, garantieren, dass das Zählen sehr übersichtlich wird. Das dezimale Stellwertsystem basiert auf einer reinen Zehnerbündelung, die Bündelungseinheiten lassen sich in der Form $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$ (Zehnerpotenzen) anschreiben. Als Symbole werden die Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ verwendet, die hierbei inhaltlich eine vollkommen andere Bedeutung als die zugehörigen natürlichen Zahlen bekommen.

Bemerkung. Die Schreibweise einer Zahl laute 777. Dann hat die Ziffer 7 je nach Stellung eine völlig andere Bedeutung: siebenhundert, siebzig oder sieben. Wird die Zahl gelesen, hat die Zifferndarstellung keine Bedeutung.

Die Ziffer gibt somit die Anzahl eines bestimmten Bündels an (Zahlenwert der Ziffer), die Stellung der Ziffer gibt die Mächtigkeit des Bündels an (Stellenwert der Ziffer).
Statt nach Zehnerpotenzen kann nach beliebig anderen natürlichen Zahlen $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$ gebündelt werden. Die Zahl b wird dann die Basis des Stellenwertsystems genannt. Für die Praxis ergeben sich allerdings Einschränkungen bei der Wahl der Basis, vgl. [3]:

- ▷ Die Anzahl der Ziffern sollte nicht zu groß sein und die Länge der Darstellung – und damit die Länge des Zahlwortes – sollte nicht zu groß werden. Da diese beiden Forderungen nicht gleichzeitig erfüllt werden können, muss ein Kompromiss gefunden werden.

- ▷ Die Basis sollte möglichst viele Teiler aufweisen (einerseits günstig für Teilbarkeitsuntersuchungen und andererseits ist die Dezimalbruchentwicklung von Brüchen dann öfters endlich).

Aus dieser Sichtweise wäre die Basis 12 mit den vier echten Teilern $2, 3$ und 4 der Basis 10 mit den zwei echten Teilern 2 und 5 für ein Stellwertsystem vorzuziehen.

Satz 2.2 (Darstellung einer Zahl bezüglich einer Basis) Gegeben sei eine Basis $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Dann lässt sich jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ eindeutig schreiben als

$$a = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \mathbb{N}_0$ mit $c_i < b$ für $i = 0, \ldots, n$ sowie $c_n \neq 0$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf sukzessiver Division mit Rest und wir geben die Beweisidee lediglich anhand eines Beispiels wieder.

Beispiel 2.3 Das bevorzugte Zehnersystem hat auch damit zu tun, dass wir zehn Finger haben. Zeichentrickfiguren haben oft nur vier Finger an einer Hand, wie etwa die Simpsons. Homer Simpson würde daher wohl ein Stellenwertsystem zur Basis 8 bevorzugen – inkonsequenterweise rechnet er in der Serie im Dezimalsystem.

Wir möchten die im Dezimalsystem gegebene Zahl 1246 zur Basis 8, also im 8er-System darstellen. Dazu führen wir folgende Divisionen mit Rest durch:

$$\begin{aligned}1246 =&155 \cdot 8 + 6\\ &155 = 19 \cdot 8 + 3\\ &\qquad 19 = 2 \cdot 8 + 3\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$1246 = (19 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 6 = ((2 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 6 = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 6$$

und die Zifferndarstellung bezüglich der Basis 8 lautet demnach 2336. Hierfür schreiben wir $1246_{10\text{er}} = 2336_{8\text{er}}$. ◇

Bemerkung. Für Basen $b \in \mathbb{N}$ mit $1 < b < 10$ können wir auf die uns bekannten Ziffern zurückgreifen, etwa auf $0, 1, \ldots, 7$ im 8er-System. Möchte man jedoch eine Zahl im **Hexadezimalsystem** darstellen, also im Stellenwertsystem zur Basis 16, so benötigt man weitere Symbole („Ziffern ") für die Zahlen $10, \ldots, 15$ – üblicherweise wird im Hexadezimalsystem A,B,...,F verwendet. Verwendet wird das Hexadezimalsystem etwa zur Definition von Farben. Beispielsweise ist

$$\text{E4C}_{16\text{er}} = 14 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16 + 12 = 3660_{10\text{er}}.$$

Möchte man die „Ziffern" $10, \ldots, 15$ beibehalten, so kann man auch mit Abständen oder Unterstrichen arbeiten. Wir können etwa für $\text{E4C}_{16\text{er}}$ auch

$$14\ 4\ 12_{16\text{er}} \quad \text{oder} \quad 14\_4\_12_{16\text{er}}$$

schreiben.

Aufgabe 2.4 (Rechnen im 8er-System) Vergleichen und bewerten Sie die folgenden beiden Aufgabenstellungen:

(1) Schreiben Sie die Zahlen von Null bis zwanzig im 8er-System an.

(2) Schreiben Sie die Zahlen von 0 bis 20 im 8er-System an.

Behandeln Sie folgende Fragestellungen:

▷ Wann feiert Homer Simpson seine runden Geburtstage, wenn er die Zahlen im 8er-System anschreibt?

▷ Führen Sie folgende Rechnung im 8er-System durch: $56_{8\text{er}} + 17_{8\text{er}}$

▷ Was bedeutet im 8er-System die Beherrschung des kleinen Einspluseins?

▷ Wie lautet die 4er-Reihe des kleinen Einmaleins im 8er-System? ◇

Aufgabe 2.5 (Binärsystem) Unter dem **Binärsystem** (Dual- oder Zweiersystem) versteht man das Stellenwertsystem zur Basis 2 mit den Ziffern 0 und 1. Eine Binärstelle heißt *Bit* und 8 Bits werden zu einem *Byte* zusammengefasst. Schreiben Sie die größte Zahl als Dezimalzahl an, welche sich mit einem Byte darstellen lässt. Ist der 60. Geburtstag im Binärsystem auch ein runder Geburtstag? Gibt es im Binärsystem weniger, mehr oder gleich viele runde Geburtstage?

2.2 Das Stellenwertsystem der Babylonier

Vor zirka 4000 Jahren verfügten die Babylonier bereits über ein sogenanntes **Sexagesimalsystem** (lat. sexagesimus – der sechzigste), also über ein Stellenwertsystem zur Basis 60. Möglicherweise beruht das System auf einer Variante mit Händen bis 60 zu zählen. Von einer Hand werden die Fingerglieder ($4 \cdot 3$ Fingerglieder) mit Hilfe des Daumes (er spielt die Rolle des Zeigers) gezählt. Zum Beispiel kann man mit der ersten Glied des Zeigefingers beginnen (eins), das zweite und das dritte Glied des Zeigefingers (zwei, drei) und geht dann über zu Mittelfinger (vier, fünf, sechs), dem Ringfinger (sieben, acht, neun) bis zum kleinen Finger (zehn , elf, zwölf). Damit hat man die ersten 12 Zahlen festgelegt und benutzt einen Finger der zweiten Hand um den ersten Durchgang festzuhalten. Damit kommt man auf $12 \cdot 5 = 60$ Zahlen. Manche Forscher sehen die Verwendung des 60er-Systems auch in den vielen echten Teilern der Zahl 60 begründet. Da $60 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ als echte Teiler die Zahlen $2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20$ und 30 hat, können wesentlich mehr „Bruchzahlen“ als im Dezimalsystem in endlicher Darstellung geschrieben werden. Damit konnten viele beim praktischen Zählen und Messen (Handel) auftretende Teile einfach ausgedrückt bzw. berechnet werden, vgl. Anforderungen an die Basis.

Für die Darstellung der Zahlen benötigten die Babylonier nur zwei Zeichen, eines für die Zahl 1 und eines für die Zahl 10. Damit konnten sie alle Zahlen bis 59 darstellen, vgl. Abbildung 2.1
Da die Zahl 0 selbst noch nicht bekannt war und daher auch kein Symbol dafür existieren konnte, wurde für eine fehlende Stelle Platz frei gelassen. Das ergab ein Problem, wenn mehrere „Nullen“ notwendig gewesen wären (Breite der fehlenden Stellen?). Die babylonischen Gelehrten „entdeckten“ dann die Zahl 0 und verwendeten hierfür das Symbol .
Eine Kennzeichnung für die Stelle 60^0 gab es nicht. Diese Stelle musste aus dem Zusammenhang erkannt werden. So könnte die in Abbildung 2.2 dargestellte Zahl auch

$$5 \cdot 60^0 + 23 \cdot 60^{-1} + 32 \cdot 60^{-2} \approx 5.39222$$

sein. Besser zu lesen ist die babylonische Darstellung in der Form 5 Stunden 23 Minuten 32 Sekunden.

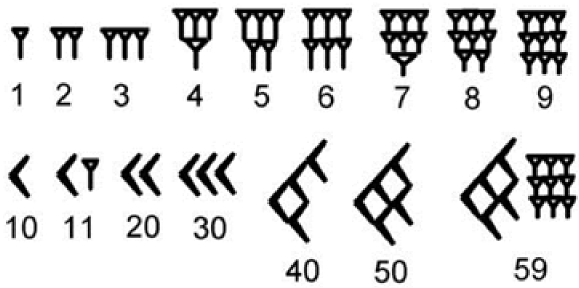

Abbildung 2.1. Ziffern im Babylonischen 60er-System

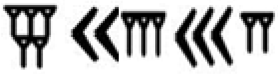

Abbildung 2.2. Die in Babylonischen 60er-System dargestellte Zahl lautet im Dezimalsystem $5 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60 + 32 = 19412$.

Geblieben von dem Zahlensystem sind die Einteilung der Stunde in Minuten und Sekunden und die Einteilung des vollen Winkels in 360°.

Bemerkung. Neben den Babyloniern haben nur noch die Priester und Astrologen der Mayas und zuletzt die indischen Mathematiker und Astronomen die Zahl Null entdeckt, vgl. [4].

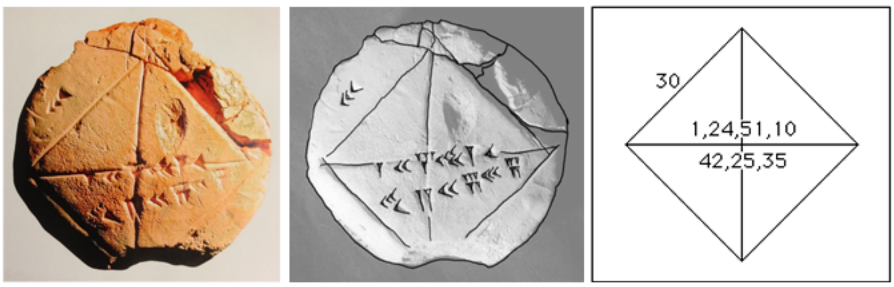

Abbildung 2.3. Babylonische Tontafel

Beispiel 2.6 Bekannt ist eine im Durchmesser etwa 6 cm große Babylonische Tontafel (Yale Babylonian Collection 7289), vgl. Abbildung 2.3. Für die Deutung der Zahlen ist wichtig, dass ein Quadrat mit den Diagonalen dargestellt wird. Weiters fällt auf, dass die im 60er-System gegebene Zahl 42 : 25 : 35 die Hälfte von 1 : 24 : 51 : 10 ist. Es kann 30 als Stellenwert $30 \cdot 60^{-1}$ gedeutet werden, also als $\frac{1}{2}$. Welche Bedeutung könnten daher die Zahlen 1 : 24 : 51 : 10 und 42 : 25 : 35 haben? ◇

2.3 Die römische Zahlschrift

Die römische Zahlschrift ist gegenüber der früheren Babylonischen Darstellung der Zahlen ein Rückschritt, da es sich um kein Stellwertsystem handelt. Dafür ist die Darstellung der Zahlen weniger abstrakt. Zum Rechnen ist diese Zahldarstellung eher nicht geeignet. Gerechnet haben die Gelehrten mit dem Abakus und nicht mit den Zahlen in der römischen Schreibweise. Die römische Zahlschrift wurde also im Wesentlichen nur dazu benutzt, um Zahlen zu notieren und das Ergebnis der am Abakus gegenständlich durchgeführten Rechnungen festzuhalten.

Die verwendeten Zahlzeichen haben sich im Laufe der Zeit verändert. Die heute übliche Schreibweise verwendet folgende Zeichen (lateinische Buchstaben):

I . . . für die Einer
V . . . für fünf Einer
X . . . für zwei Fünfer
L . . . für fünf Zehner
C . . . für zwei Fünfziger
D . . . für fünf Hunderter
M . . . für zwei Fünfhunderter

Für größere Zahlen wie Fünftausend, Zehntausend, Fünzigtausend, . . . müssen weitere Zahlzeichen gefunden werden. Dazu wird der römische Apostrophus Ↄ verwendet, also ein Zeichen, das aussieht wie eine schließende Klammer oder ein an der Vertikalen gespiegeltes C, vgl. Abbildung 2.4. Durch das Hinzufügen weiterer Bögen oder eines C zusammen mit einem Apostrophus wird der Wert jeweils verzehnfacht.

Römische Ziffer	Wert
ↀ, CIↃ, cIↄ	1.000
ↁ, IↃↃ	5.000
ↂ, CCIↃↃ	10.000
IↃↃↃ	50.000
CCCIↃↃↃ	100.000

Abbildung 2.4. Römische Zahlen und ihre Entsprechungen im Dezimalsystem

Das Zahlsystem verwendet eine alternierende Fünfer-Zweier-Bündelung (biquinäres Zahlensystem). Zahlen werden in der Art aufgeschrieben, dass die Zeichen aneinander gereiht werden. Beispielsweise wird 73 als LXXIII geschrieben.

Die Regeln, nach denen die Schreibweise erfolgt, haben sich im Laufe verändert. Der heutige internationale Standard für die Schreibweise von Zahlen mit römischen Zahlzeichen hat vier Regeln, vgl. [4, S. 27 ff]:

- Regel 1: Zuerst werden die Tausender notiert, falls sie vorkommen, dann ggf. die Hunderter, dann ggf. die Zehner und zuletzt ggf. die Einer.
- Regel 2: Falls zu D noch Hunderter bzw. zu L noch Zehner bzw. zu V noch Einer hinzugezählt werden sollen, stehen diese rechts von D, L oder V.
- Regel 3: Ein Zeichen I, X oder C darf nur von dem jeweils Fünf- oder Zehnfachen abgezogen werden; man notiert das abzuziehende Zeichen dann unmittelbar links vor dem zu vermindernden Zeichen.
- Regel 4: Unter Beachtung der ersten drei Regeln müssen möglichst wenige Zeichen verwendet werden.

Es handelt sich somit um eine additive Zahlschrift ohne Stellenwertsystem, dafür mit ergänzender Regel für die subtraktive Schreibweise bestimmter Zahlen. Für die Null ist kein Zeichen notwendig. Die Römer haben keinen eigenen mathematischen Begriff für den Zahlenwert „Null“. Sehr wohl gibt es aber sprachliche Ausdrücke für „nichts“ (nihil) und „nicht etwas“ (nullum).

Aufgabe 2.7 Schreiben Sie Ihr Geburtsjahr in römischer Schreibweise an.

Aufgabe 2.8 Schreiben Sie 999, 429 und 499 in römischer Schreibweise an.

Aufgabe 2.9 Welche Jahreszahl steht auf folgender Tafel?

Bemerkung. Die Römer verwendeten auch Brüche zur Basis 12, weil sich damit die oft gebrauchten Brüche $\frac{1}{2}$ (Semis), $\frac{1}{4}$ (Quadrans), $\frac{1}{3}$ (Triens), $\frac{1}{6}$ (Sextans) oder Vielfache von $\frac{1}{12}$ (Uncia)leicht darstellen lassen. Etwa wurde $\frac{5}{12}$ mit Quincunx (Quinque unciae) bezeichnet. Dafür wurden auch Zahlzeichen verwendet.

Kapitel 3
Rechnen mit natürlichen Zahlen

Wir haben die natürlichen Zahlen als Kardinal- und Ordinalzahlen kennengelernt. In diesem Kapitel werden wir aus diesen beiden Zugängen die Addition von natürlichen Zahlen ableiten und einige Anwendungsaspekte der natürlichen Zahlen besprechen.

3.1 Addition

Die Addition natürlicher Zählen müssen wir aus deren Definiton als Kardinal- bzw. Ordinalzahlen ableiten.

3.1.1 Addition von Kardinalzahlen

Die Kardinalität einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente. Um die Anzahlen der Elemente zweier Mengen A und B „zusammenzählen" zu können, müssen wir eine neue Menge bilden, welche alle Elemente aus A und aus B enthält. Diese wird mit $A \cup B$ bezeichent und heißt **Vereinigung** der Mengen A und B.

Beispiel 3.1 Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{\triangle, \circ\}$ und $B = \{\square, \triangle, \star\}$. Dann ist

$$\operatorname{card} A = 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{card} B = 3.$$

Die Vereinigung von A und B ist

$$A \cup B = \{\triangle, \circ, \square, \star\}$$

und es gilt $\operatorname{card}(A \cup B) = 4$. $\diamond$

Wie obiges Beispiel zeigt, eignet sich offenbar die Vereinigung zweier Mengen im Allgemeinen noch nicht für eine sinnvolle Einführung der Addition. Denn in diesem Beispiel besitzen A und B das gemeinsame Element $\triangle$ und dieses wird für das Bestimmen der Kardinalität von $A \cup B$ nicht „doppelt gezählt".

Daher betrachten wir im folgenden Mengen A und B, welche kein gemeinsames Element besitzen. Die Mengen A und B heißen dann **disjunkt** und um deutlich zu machen, dass zwei disjunkte Mengen vereinigt werden, schreibt man dann auch $A \uplus B$ für die Vereinigung.

Wir definieren nun die **Addition zweier Kardinalzahlen** wie folgt: Sind A und B zwei disjunkte endliche Mengen, so setzen wir

$$\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) := \operatorname{card}(A \uplus B).$$

Die Mengen A und B sind hier jeweils ganz spezielle – aber beliebige – Repräsentanten der jeweiligen Kardinalzahlen, die man addiert.

Beispiel 3.2 Wir betrachten die Mengen $A = \{*, \circ\}$ und $B = \{\square, \triangle, \star\}$ mit

$$\operatorname{card} A = 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{card} B = 3.$$

Man beachte, dass die Mengen A und B disjunkt sind und

$$A \uplus B = \{*, \circ, \square, \triangle, \star\}.$$

Daher ist

$$2 + 3 = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B = \operatorname{card}(A \uplus B) = 5. \qquad \diamond$$

Auf diesem Weg erhalten wir die Addition als Rechenoperation auf den natürlichen Zahlen, genauer als

$$+\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\colon (m, n) \mapsto m + n.$$

Man beachte, dass unmittelbar

$$m + n = n + m \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{(Kommutativitätsgesetz der Addition)}$$

folgt, da für zwei Mengen A und B stets $A \cup B = B \cup A$ gilt. Es gibt also bei der Vereinigung zweier Mengen keine Reihenfolge.

Aufgabe 3.3 (Neutrales Element der Addition) Zeigen Sie, dass

$$n + 0 = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Man nennt daher 0 das **neutrale Element** bezüglich der Addition.

Aufgabe 3.4 (Assoziativgesetz) Sollen drei natürliche Zahlen $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ addiert werden, so wird werden hintereinander zwei Additionen durchgeführt. Um die Reihenfolge der Additionen festzulegen, werden Klammern gesetzt. Beispielsweise bedeutet $(k+m)+n$, dass zuerst die Addition $k + m$ durchgeführt wird und zur resultierten natürlichen Zahl n addiert wird. Zeigen Sie, dass

$$(k + m) + n = k + (m + n) \qquad \text{(Assoziativgesetz)}$$

gilt.

3.1.2 Addition von Ordinalzahlen

Die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen haben wir über die Nachfolgeabbildung $\sigma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eingeführt. Wir setzen $n + 0 := n$ sowie

$$n + 1 := \sigma(n), \quad n + 2 := \sigma(n + 1), \quad n + 3 := \sigma(n + 2), \quad \dots$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Man spricht hierbei von einer rekursiven Definition. Beispielsweise ist $n + 4$ also wie folgt zu bilden:

$$n + 4 = \sigma(\underbrace{n + 3}_{=\sigma(n+2)}) = \sigma\big(\sigma(\underbrace{n + 2}_{=\sigma(n+1)})\big) = \sigma\Big(\sigma\big(\sigma(\underbrace{n + 1}_{=\sigma(n)})\big)\Big) = \sigma\Big(\sigma\big(\sigma(\sigma(n))\big)\Big) = \sigma^4(n)$$

Hierbei bezeichnet σ^4 die vierfache Anwendung der Funktion σ, es wird also „viermal um Eins weitergezählt". Damit wird $n + m$ für zwei beliebige natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ erklärt und wir erhalten die Addition als Operation

$$+\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\colon (m, n) \mapsto m + n.$$

Der Addition von Ordinalzahlen liegt also das „Weiterzählen" im Gegensatz zum „Zusammenzählen" bei Kardinalzahlen zugrunde.

Aufgabe 3.5 Bilden Sie $2 + 3$ über die Definition der Addition von Ordinalzahlen. Liefert $3 + 2$ dasselbe Ergebnis?

Auch für die Addition von Ordinalzahlen können wiederum die üblichen Rechengesetze wie etwa das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz nachgewiesen werden. Allerdings müssen diese aus den Peano-Axiomen abgeleitet werden – dies werden wir an dieser Stelle nicht machen.

3.2 Ordnung auf den natürlichen Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir zwei Zugänge zur Ordnung auf den natürlichen Zahlen kennenlernen.

3.2.1 Ordnung auf den Kardinalzahlen

Wir wählen zunächst wiederum den Zugang zu den natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen und wollen auf $\mathbb{N}_0$ die **Kleinerrelation** $<$ definieren. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ und entsprechend zwei Mengen M und N mit

$$\operatorname{card} M = m \quad \text{und} \quad \operatorname{card} N = n.$$

Die Mengen M und N sind also Repräsentaten der natürlichen Zahlen m und n als Kardinalzahlen.

Man sagt, dass m **(echt) kleiner** als n ist und schreibt hierfür $m < n$, falls es eine echte Teilmenge $K \subset N$ gibt, die zu M gleichmächtig ist, also für die $\operatorname{card} K = m$ gilt. Anschaulich gesprochen ist es demnach möglich, Elemente von N wegzulassen, um die Anzahl der Elemente von N zu erhalten. Analog nennt man m **(echt) größer** als n, wenn $n > m$, und schreibt hierfür $m < n$.

Wir schreiben $m \leq n$ und sagen, dass m **kleiner gleich** n ist, wenn es eine Teilmenge von N gibt, die zu M gleichmächtig ist. Analog definiert man $m \geq n$ und sagt dann, dass m **größer gleich** n ist.

Beispiel 3.6 Wir zeigen, dass $2 < 3$ gilt. Hierfür wählen wir die Repräsentanten $M = \{\triangle, \square\}$ und $N = \{*, \star, \diamond\}$ mit

$$\operatorname{card} M = 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{card} N = 3.$$

Wählen wir $K = \{\star, \diamond\}$, so ist K eine echte Teilmenge von N mit $\operatorname{card} K = 2$. Somit ist $2 < 3$. $\diamond$

3.2.2 Ordnung über die Addition

Die Ordnung auf den natürlichen Zahlen kann man für Kardinal- sowie Ordinalzahlen gleichermaßen über die Addition erhalten. Hierzu definiert man etwa $m \leq n$ für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ durch folgende Aussage: Es gibt eine weitere natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$m + k = n.$$

Weiters gilt $m < n$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m + k = n$ gibt. Analog definiert man die Relationen $>$ und $\geq$.

Dieser Zugang zur Ordnung auf $\mathbb{N}_0$ gestaltet sich allerdings speziell für Ordinalzahlen etwas technischer als jener, den wir für Kardinalzahlen kennengelernt haben – natürlich führt er für Kardinalzahlen dennoch zur selben Ordnung.

3.3 Subtraktion

Für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gibt es eine weitere natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m + k = n$ und wir setzen

$$n - m := k.$$

Die natürliche Zahl k bezeichnet man als Ergebnis der **Subtraktion** $n-m$. Man beachte, dass für $m > n$ die Subtraktion $n - m$ nicht in den natürlichen Zahlen durchgeführt werden kann. Denn schließlich gibt es in diesem Fall keine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m + k = n$. Weiters gilt es zu beachten, dass $-m$ in $n - m$ nicht als (natürliche) Zahl zu verstehen ist.

3.3.1 Subtraktion von Kardinalzahlen

Für Kardinalzahlen können wir die Subtraktion auch über die Anzahl der Elemente entsprechender Mengen einführen bzw. im Nachhinein interpretieren. Dazu seien zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gegeben und zu diesen zwei Mengen M und N mit $\operatorname{card} M = m$ und $\operatorname{card} N = n$. Da $m \leq n$ gilt, gibt es eine Teilmenge L von N mit $\operatorname{card} L = \operatorname{card} M = m$.

Nun bilden wir die **Mengendifferenz** $N \setminus L$ („N ohne L"). Dies ist jene Menge, die alle Elemente von N enthält, die nicht in L liegen. Das Ergebnis der Subtraktion $n - m$ ist die Kardinalzahl $\operatorname{card}(N \setminus L)$.

Das Bilden der Differenz $n-m$ für Kardinalzahlen lässt sich also wie folgt interpretieren: Von einer Menge mit n Elementen wird eine Teilmenge mit m Elementen entfernt und die Anzahl der übrigen Elemente ist dann gerade $n - m$.

3.3.2 Subtraktion auf den ganzen Zahlen

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt per definitionem $(n - m) + m = n$. Insbesondere ist $m - m = 0$ und dies gibt Anlass den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ so zu erweitern, dass der erweiterte Zahlenbereich bei jeglicher Subtraktion von natürlichen Zahlen nicht verlassen wird.

Hierzu interpretieren wir die Subtraktion $m - m = 0$ als die Addition $m + n = 0$ von $m \in \mathbb{N}$ mit einem Element n, das offenbar keine natürliche Zahl ist. Bei n handelt es sich dann um eine sogenannte **ganze Zahl**. Man nennt n das **Negative** von m und schreibt hierfür $-m$. Die ganzen Zahlen sollen jedoch nicht nur das Negative von natürlichen Zahlen beinhalten, sondern auch die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ selbst und aufgrund dieser Forderung setzen wir

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}. \qquad \text{(Menge der ganzen Zahlen)}$$

Für eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist dann $n + (-n) = 0$, denn entweder gilt $n \in \mathbb{N}_0$ oder $-n \in \mathbb{N}_0$. Man nennt daher $-n$ das (bezüglich der Addition) zu n **inverse Element**, denn die Summe ergibt das neutrale Element 0.

Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ können wir somit die Subtraktion als Rechenoperation

$$-\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\colon (m,n) \mapsto m - n := m + (-n)$$

definieren. Eine ganze Zahl zu subtrahieren bedeutet also das Negative zu addieren. Man beachte, dass dies für den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen nicht der Fall ist.

3.4 Anwendungsaspekte der natürlichen Zahlen

Piagets[1] Theorien zum Zahlbegriff wirken bis heute in die fachdidaktische und psychologische Forschung ein: Zahlen sind **vieldimensionale Denkgegenstände**. Die verschiedenen Aspekte, die einem Zahlbegriff inne liegen, sind äußerst vielfältig. In [1, S. 106-107] werden in einer Tabelle, vgl. Tabelle 3.1, verschiedene Aspekte zusammengefasst, wobei die einzelnen Aspekte nicht immer trennscharfe Kategorien sind.

In der mathematischen Fachsprache geht man grundsätzlich davon aus, dass die Verwendung der Zahlen unabhängig vom Bezeichneten ist, egal ob eine Anzahl oder ein Rangplatz betrachtet wird. In der Umgangssprache wird das Gezählte oft mit einer bestimmten Zahlvorstellung verbunden. Es gibt „ein Paar Schuhe“ aber nie „ein Paar Eier“, wenn zwei gemeint sind. Dagegen gibt es „ein Dutzend Eier“ aber nie „ein Dutzend Euro“. Hier zeigt sich, wie stark eine Sache die Zahl im täglichen Gebrauch beherrscht.

[1] *Jean Piaget*, 1896 – 1980, schweizer Psychologe

Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiele	Addition	Subtraktion
Kardinalzahlaspekt	Zahlen beschreiben die **Mächtigkeit** von Mengen, **Anzahl** der Elemente einer Menge	4 Bücher, 7 Obstsorten, in der Klasse sind 14 SchülerInnen	vereinigen, zusammenlegen	Wegnehmen, Unterschied berechnen, ergänzen
Ordinalzahlaspekt	**Zählzahl:** beim Zählen werden die natürlichen Zahlen durchlaufen	„eins, zwei, drei, vier, …“ „elf, zehn, neun, acht, … “	weiterzählen	rückwärts zählen
	Ordnungszahl: Rangplatz in einer geordneten Reihe	„Ich habe die im Klassenbuch die Katalognummer 13 “		
Maßzahlaspekt	**Maßzahlen** von Größen	5 Stunden, 7 Euro, 8 kh	aneinanderlegen entsprechender Repräsentanten	abtrennen entsprechender Repräsentanten, Unterschied
Operatoraspekt	**Vielfachheit** einer Handlung oder eines Vorgangs	noch achtmal umblättern bis zum Buchende	Hintereinanderausführung, nacheinander vervielfachen	Umkehroperator, wie oft noch?
Rechenzahlaspekt	**Algebraischer Aspekt:** algebraische Struktur mit bestimmten Gesetzen	$(3+4)+5 = 3+(4+5)$ Kommutativität, Assoziativität	Rechnen mit Ziffern (schriftliche Rechenverfahren) statt Rechnen mit Zahlen (halbschriftliche Strategien)	
	Ordnungszahl: Rechnen als Manipulation mit Ziffern nach Regeln	Schriftliche Multiplikation		
Kodierungsaspekt	**Bezeichnung** von Objekten	6020 Innsbruck Telefonummer		

Tabelle 3.1. Zahlaspekte der natürlichen Zahlen, cf. [1, S. 106-107]

Kapitel 4
Schriftliche Addition und Subtraktion

Aufbauend auf den erlernten Konzepten zu natürlichen Zahlen sowie deren Zifferndarstellung widmen wir uns schriftlichen Rechenverfahren, zunächst für die Addition und die Subtraktion.

4.1 Schriftliche Addition

Bekanntlich können etwa die beiden Zahlen 786 und 247 wie folgt schriftlich addiert werden: Wir schreiben die beiden Zahlen untereinander und addieren von rechts nach links spaltenweise. Wird 9 überschritten, so notieren wir den *Übertrag* zur nächsten Spalte.

$$\begin{array}{rcccc} & & 7 & 8 & 6 \\ + & {}_1 & 2_1 & 4 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}$$

Aber warum liefert dieses Vorgehen tatsächlich das richtige Ergebnis? Wir verwenden hierzu das uns vertraute Stellenwertsystem zur Basis 10 und eine Reihe von Rechengesetzen für die Addition und die Multiplikation, nämlich das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz. Wir setzen $E = 1 = 10^0$, $Z = 10 = 10^1$, $H = 100 = 10^2$ und $T = 1000 = 10^3$.

$$\begin{aligned} 786 + 247 &= (7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) \\ &= (7H + 8Z + 6E) + (2H + 4Z + 7E) \\ &= (6+7)E + (8+4)Z + (7+2)H \\ &= 13E + (8+4)Z + (7+2)H \\ &= 3E + (1+8+4)Z + (7+2)H \\ &= 3E + 13Z + (7+2)H \\ &= 3E + 3Z + (1+7+2)H \\ &= 3E + 3Z + 10H \\ &= 3E + 3Z + 0H + 1T = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1033 \end{aligned}$$

Zu beachten gilt, dass sich das Rechenverfahren der schriftlichen Addition keinesfalls auf das spezielle Stellenwertsystem zur Basis 10 beschränkt. Übertragen Sie nun obige

Überlegungen auf die folgenden beiden schriftlichen Additionen in einem anderen Stellenwertsystem: Zunächst addieren Sie die folgenden beiden Zahlen im Stellenwertsystem zur Basis 4.

$$\begin{array}{rr} & 2\,1\,3_{\text{4er}} \\ + & 3\,1_{\text{4er}} \\ \hline \end{array}$$

Begründen Sie ausführlich ihr Vorgehen. Wiederholen Sie dies für die beiden folgenden Zahlen im Stellenwertsystem zur Basis 12.

$$\begin{array}{rrrr} & 8 & 5 & 11_{\text{12er}} \\ + & 3 & 10 & 3_{\text{12er}} \\ \hline \end{array}$$

4.2 Schriftliche Subtraktion

Wir beginnen abermals mit einem repräsentativen Beispiel und führen die Subtraktion $438 - 276$ schriftlich in der uns bekannten Weise durch.

$$\begin{array}{rccc} & 4 & 3 & 8 \\ - & {}_{1}2 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & 3 & & \\ & \cancel{4} & 3 & 8 \\ - & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 2 \end{array}$$

Wiederum stellen wir uns die Frage, wodurch dieses Vorgehen gerechtfertigt wird. Dazu untersuchen wir abermals, was bei der Subtraktion im Dezimalsystem mit den Ziffern passiert:

$$\begin{aligned} 438 - 276 &= (4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) - (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) \\ &= (4H + 3Z + 8E) - (2H + 7Z + 6E) \\ &= (8-6)E + (3-7)Z + (4-2)H. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir wiederum zahlreiche Rechengesetze verwendet haben – sogar für ganze Zahlen. Während die Subtraktion $8 - 6 = 4$ in den natürlichen Zahlen möglich ist,

ist das für $3 - 7$ offensichtlich nicht der Fall. Dies kann durch sogenannte *Entbündelung* umgangen werden:

$$\begin{aligned}(8-6)E+(3-7)Z+(4-2)H &= 2E+(3-7)Z+10Z-10Z+(4-2)H\\ &= 2E+(13-7Z)-1H+(4-2)H\\ &= 2E+6Z+(4-2-1)H\\ &= 2E+6Z+(4-3)H\\ &= 2E+6Z+(3-2)H=162\end{aligned}$$

Auf diese Weise werden also sämtliche Subtraktionen zur sukzessiven Ermittlung der Ziffern in den natürlichen Zahlen durchgeführt. Da wir uns hierzu einen Hunderter "geborgt" haben, spricht anstelle der Entbündelungstechnik auch von der *Borgetechnik*.

Auch die schriftliche Subtraktion beschränkt sich keinesfalls auf das Dezimalsystem. Um zu erfassen, was beim Entbündeln erlernt und verstanden werden muss, bietet es sich an, einige Subtraktionen in anderen Stellenwertsystemen durchzuführen. Denn schließlich ist uns das Dezimalsystem hierzu zu vertraut. Führen Sie die folgende Subtraktion im 4er-System durch und begründen Sie ihr Vorgehen ausführlich.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1_{4er} \\ -\ 2\ 1\ 3_{4er} \\ \hline \end{array}$$

Begründen Sie auch für folgende Rechnung das Vorgehen bei der schriftlichen Subtraktion ausführlich.

$$\begin{array}{rrrr} & 10 & 6 & 4_{12er} \\ - & 5 & 7 & 11_{12er} \\ \hline \end{array}$$

Kapitel 5

Multiplikation natürlicher Zahlen

Zunächst führen wir die Multiplikation für Kardinalzahlen ein. Die Multiplikation als mehrfache Addition lässt sich dann unmittelbar auf Ordinalzahlen übertragen. Nachdem wir die Multiplikation auf der Zahlengeraden veranschaulichen, gehen wir schließlich auf die schriftliche Multiplikation ein.

5.1 Multiplizieren von Kardinalzahlen

Wir möchten die Multiplikation für zwei Kardinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ erklären. Hierzu wählen wir zwei Mengen M und N mit

$$\operatorname{card} M = m \quad \text{und} \quad \operatorname{card} N = n.$$

Dann setzen wir

$$m \cdot n := \operatorname{card}(M \times N).$$

Zur Erinnerung: Das kartesische Produkt $M \times N$ ist die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$.

Ist $M = \{m_1, \ldots, m_m\}$ und gilt $N = \{n_1, \ldots, n_n\}$, so lassen sich die Elemente von $M \times N$ wie folgt anordnen:

$$\begin{array}{cccc} (m_1, n_1) & (m_1, n_2) & \ldots & (m_1, n_n) \\ (m_2, n_1) & (m_1, n_2) & \ldots & (m_2, n_n) \\ \vdots & & \vdots & \\ (m_m, n_1) & (m_m, n_2) & \ldots & (m_m, n_n) \end{array}$$

Man beachte, dass dies die Veranschaulichung der Multiplikation mit Material erklärt, z.B. durch Auflegen von Plättchen, wobei jedes für ein Element in $M \times N$ steht.

Offenbar gilt $\operatorname{card}(M \times N) = \operatorname{card}(N \times M)$ und somit

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Dies ist das **Kommutativgesetz der Multiplikation**.

Ist $m = 0$ oder $n = 0$, so gilt $M \times N = \varnothing$ und damit schließen wir

$$0 \cdot n = m \cdot 0 = 0.$$

Beispiel 5.1 ($3 \cdot 4 = 12$) Wir betrachten die Mengen

$$M = \{\star, \square, \circ\} \quad \text{und} \quad N = \{\square, \circ, \triangle, \star\}$$

mit $\operatorname{card} M = 3$ und $\operatorname{card} N = 4$. Wir ordnen die Elemente von $M \times N$ entsprechend an:

$$\begin{array}{cccc} (\star, \square) & (\star, \circ) & (\star, \triangle) & (\star, \star) \\ (\square, \square) & (\square, \circ) & (\square, \triangle) & (\square, \star) \\ (\circ, \square) & (\circ, \circ) & (\circ, \triangle) & (\circ, \star) \end{array}$$

Also ist $3 \cdot 4 = \operatorname{card}(M \times N) = 12$. Hierbei können wir unmittelbar erkennen, dass $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$ gilt. Genauso ist $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$. ◇

Bei der Multiplikation $m \cdot n$ handelt es sich um eine mehrfache Addition: Der **Multiplikand** m wird so oft addiert, wie der **Multiplikator** n angibt, also gilt

$$m \cdot n = \underbrace{m + \ldots + m}_{n\text{-mal}}.$$

Dies rechtfertigt unmittelbar das **Distributivgesetz**: Ist $k \in \mathbb{N}_0$ eine weitere natürliche Zahl, so gilt

$$(m + k) \cdot n = \underbrace{n + \ldots + n}_{(m+k)\text{-mal}} = \underbrace{n + \ldots + n}_{m\text{-mal}} + \underbrace{n + \ldots + n}_{k\text{-mal}} = m \cdot n + k \cdot m.$$

5.2 Multiplizieren von Ordinalzahlen

Auch für zwei Ordinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist die Multiplikation $m \cdot n$ als mehrfache Addition erklärbar. Wir legen hierbei den konzeptionellen Fokus auf das sukzessive "Weiterzählen" und setzen daher

$$0 \cdot n := 0 \quad \text{und} \quad \sigma(m) \cdot n = (m + 1) \cdot n := m \cdot n + n.$$

Hierbei handelt es sich um eine rekursive Definition, denn es ist

$$\begin{aligned} m \cdot n &= \sigma(m-1) \cdot n = (m-1) \cdot n + n = \sigma(m-2) \cdot n + n = (m-2) \cdot n + n + n = \ldots \\ &= 0 \cdot \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m\text{-mal}} = \underbrace{n + \ldots + n}_{m\text{-mal}} \end{aligned}$$

Um $m \cdot n$ zu bilden, wird also m-mal um n weiter gezählt.

5.3 Multiplikation auf der Zahlengeraden

Die Multiplikation natürlicher Zahlen lässt geometrisch an der Zahlengeraden veranschaulichen. Wie in Abbildung 5.1 exemplarisch für $2 \cdot 3$ dargestellt, geht man folgendermaßen vor: Möchte man für $m, n \in \mathbb{N}$ die Multiplikation $m \cdot n$ durchführen, so verbindet man n mit $1'$ und verschiebt dann die entstehende Gerade parallel in m'. Der Schnittpunkt mit der unteren Zahlengeraden liefert dann das Produkt $m \cdot n$.

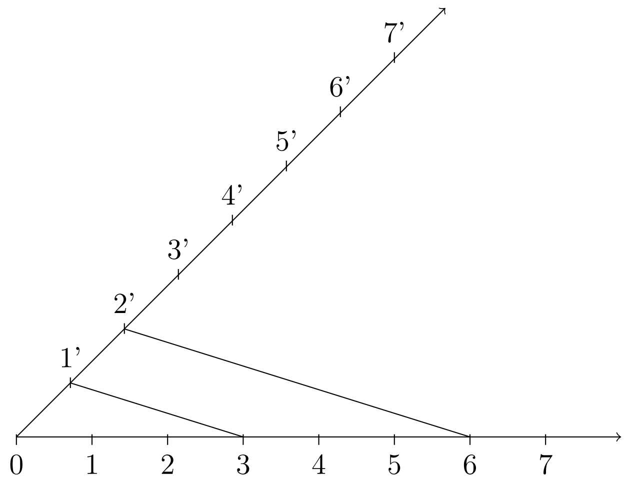

Abbildung 5.1. Konstruktion zur Berechnung des Produkts $2 \cdot 3$

5.4 Schriftliche Muliplikation

Wie wir bereits wissen, lässt sich jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ wie folgt in eindeutiger Weise darstellen:

$$a = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0 \qquad (\star)$$

Hierbei werden $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{N}_0$ als Ziffern bezeichnet und es gilt $c_i < b$ für $i = 0, \ldots, n$ sowie $c_n \neq 0$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.

5.4.1 Multiplikation mit einstelligen Multiplikatoren

Wir nehmen an, dass $a \in \mathbb{N}_0$ in der Zifferndarstellung $(\star)$ vorliegt. Für eine weitere natürliche Zahl $c \in \mathbb{N}$ soll die Multiplikation $a \cdot c$ durchgeführt werden. Zunächst nehmen wir an, dass es sich bei c um eine einstellige Zahl handelt, d.h. $c = cb^0$ in Zifferndarstellung, also lässt sich c als Einerziffer interpretieren.

Nach dem Distributivgesetz erhalten wir

$$\begin{aligned} a \cdot c &= (c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0) \cdot c \\ &= (c_n \cdot c) b^n + (c_{n-1} \cdot c) b^{n-1} + \ldots + (c_1 \cdot c) b^1 + (c_0 \cdot c) b^0 \end{aligned}$$

Bei $c_i \cdot c$ muss es sich nicht mehr zwingend um eine Ziffer handeln, falls $c_i \cdot c \leq b$ muss neu gebündelt werden und es ergibt sich ein "Übertrag". Eine übersichtliche Darstellung liefert das sogenannte "Malkreuz":

$\cdot$	$c_n b^n$	$c_{n-1} b^{n-1}$	$\dots$	$c_1 b^1$	$c_0 b^0$	
c	$c_n c b^n$	$c_{n-1} c b^{n-1}$	$\dots$	$c_1 c b^1$	$c_0 c b^0$	$\Sigma = a \cdot c$

Entscheidend ist also die effiziente Berechnung von $c_i \cdot c$ für jedes $i = 0, \dots, n$. Hierbei handelt es sich also um die Multiplikation je zweier Ziffern und alle möglichen Kombinationen werden in einer "Einmaleins-Tafel" übersichtlich dargestellt. Oftmals wird zudem noch 10 (im jeweiligen Stellenwertsystem) als Multiplikand sowie als Multiplikator angegeben.

$\cdot$	0	1	2	3	10
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	10
2	0	2	10	12	20
3	0	3	12	21	30
10	0	10	20	30	100

Tabelle 5.1. Einmaleins-Tafel des Vierersystems

Wir führen die Multiplikation $11 \cdot 2$ im 4er-System durch:

$$11 \cdot 2 = (1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0) \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 2 \cdot 4^0 = 2 \cdot 41 + 2 \cdot 40 = 22$$

Nun multiplizieren wir $1023 \cdot 3$ im 4er-System:

$$\begin{aligned} 1023 \cdot 3 &= 1 \cdot 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 3 \cdot 4^0 \\ &= 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4^1 + 21 \cdot 4^0 \\ &= 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 3201 \end{aligned}$$

Eine Variante des Malkreuzes stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & \cdot & 3 \\ \hline & & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ 3 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 3 & 2 & 0 & 1 & & \end{array}$$

Rechnet man direkt mit dem Überträg bei der nächsten Stelle weiter, so ergibt sich folgendes:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & \cdot & 3 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 1 & & \end{array}$$

Wir berechnen das Produkt $264 \cdot 7$ im Dezimalsystem in einer ausführlichen Variante:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 4 & \cdot & 7 \\ \hline & T & H & Z & E \\ & & & 2 & 8 \\ & & 4 & 2 & 0 \\ & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 8 & 4 & 8 \end{array}$$

Das Anschreiben der Nullen wird insbesondere bei schwächeren Schülerinnen und Schülern empfohlen. Unmittelbares Weiterrechnen mit den Überträgen liefert wiederum folgende Form:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 4 & \cdot & 7 \\ \hline & 1 & 8 & 4 & 8 \end{array}$$

5.4.2 Multiplikation mit Vielfachen der Basis

Neben der Multiplikation mit einziffrigem Multiplikator spielt die Multiplikation mit Vielfachen der zugrundeliegenden Basis b eine zentrale Rolle bei der schriftlichen Multiplikation. Wir nehmen an, dass die Zahl $a \in \mathbb{N}$ wiederum in Zifferndarstellung $(\star)$ gegeben ist, also als

$$a = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0.$$

Multiplizieren wir mit der Basis b, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0) \cdot b \\ &= c_n b^n \cdot b + c_{n-1} b^{n-1} \cdot b + \ldots + c_1 b^1 \cdot b + c_0 b^0 \cdot b \\ &= c_n b^{n+1} + c_{n-1} b^n + \ldots + c_1 b^2 + c_0 b^1 + 0 b^0. \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit der Basis b bewirkt also, dass jede Ziffer der Zahl a um ein Stelle verschoben wird. Die Einerziffer des Produkts ist daher 0. („Mit der Basis b wird multipliziert, indem eine Null angehängt wird.“)

Beispiel 5.2 Wir betrachten ein Beispiel im uns vertrauten Dezimalsystem:

$$349 \cdot 10 = 3490$$

Man beachte, dass sich im Stellenwertsystem zur Basis b die Basis in Zifferndarstellung als 10_b schreibt. Im 4er-System lautet 4 in Zifferndarstellung $10_{4\text{er}}$ und somit ist beispielsweise

$$231_{4\text{er}} \cdot 10_{4\text{er}} = 2310_{4\text{er}}. \qquad \diamond$$

Die Multiplikation einer Zahl a in Zifferndarstellung mit einer Potenz b^k der Basis, $k \in \mathbb{N}$, lässt sich mittels des Assoziativgesetzes auf mehrfache Multiplikation mit b zurückführen:

$$a \cdot b^k = \left(a \cdot b^{k-1}\right) \cdot b = a \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{k\text{-mal}}.$$

Die Multiplikation mit b^k bewirkt also, dass jede Ziffer der Zahl a um ein k Stellen verschoben wird. („Bei Multiplikation mit b^k werden k Nullen angehängt.“)

Beispiel 5.3 Beispielsweise ist

$$349 \cdot 1000 = 349 \cdot 10^3 = ((349 \cdot 10) \cdot 10) \cdot 10 = (3490 \cdot 10) \cdot 10$$

Man beachte, dass sich im Stellenwertsystem zur Basis b die Basis in Zifferndarstellung als 10_b schreibt. Im 4er-System lautet 4 in Zifferndarstellung $10_{4\text{er}}$ und somit ist beispielsweise

$$231_{4\text{er}} \cdot 10_{4\text{er}} = 2310_{4\text{er}}.$$ ◇

5.4.3 Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren

Möchten wir die Zahl a in Zifferndarstellung ($\star$) mit $d_k b^k$ multiplizieren, wobei $k \in \mathbb{N}$ und d_k eine Ziffer ist, so können wir unter Verwendung des Assoziativgesetzes wie folgt vorgehen:

$$a \cdot (d_k b^k) = (a \cdot d_k) \cdot b^k$$

Es wird also zunächst das Produkt $a \cdot d_k$ mit einstelligem Multiplikator bestimmt und das Ergebnis mit b^k multipliziert.

Beispiel 5.4 Wir beginnen abermals mit einem Beispiel im Dezimalsystem:

$$456 \cdot 700 = (456 \cdot 7) \cdot 100 = 3192 \cdot 100 = 319200$$

Schriftlich multiplizieren wir folgendermaßen:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & \cdot & \mathbf{7} & 0 & 0 \\ \hline & & & & H & Z & E \\ & 3 & 1 & 9 & \mathbf{2} & 0 & 0 \end{array}$$

Im 4er-System ist beispielsweise

$$231_{4\text{er}} \cdot 300_{4\text{er}} = (231_{4\text{er}} \cdot 3) \cdot 100_{4\text{er}} = 2013_{4\text{er}} \cdot 100_{4\text{er}} = 201300_{4\text{er}}.$$

Schriftlich multipliziert wird wie folgt:

2	3	1	$\cdot$	**3**	0	0
	2	0	1	**3**	0	0

◇

Es soll nun mit einer Zahl $d \in \mathbb{N}$ in Zifferndarstellung multipliziert werden, also mit

$$d = d_m b^m + \ldots + d_1 b^1 + d_0 b^0,$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und $d_0, \ldots, d_m$ entsprechende Ziffern bezeichnen. Durch Anwendung des Distributiv- und des Assoziativgesetzes erhalten wir

$$a \cdot d = a \cdot \left(d_m b^m + \cdot d_1 b^1 + d_0 \cdot b^0\right) = a \cdot c_m \cdot b^m + \ldots + a \cdot d_1 \cdot b^1 + a \cdot d_0.$$

Zur Berechnung des Produkts $a \cdot d$ werden also $m+1$ Multiplikationen mit einziffrigen Multiplikatoren durchgeführt, die Stellen entsprechend verschoben und anschließend die einzelnen Produkte addiert. Insgesamt stellt sich das Vorgehen also wie folgt dar:

Multiplikator mit $m+1$ Ziffern
$\downarrow$
$m+1$ Multiplikationen mit Vielfachen von Potenzen der Basis
$\downarrow$
$m+1$ Multiplikationen mit einziffrigen Multiplikatoren
und anschließender Multiplikation mit einer Potenz der Basis

In der schriftlichen Multiplikation wird dieses Vorgehen wie folgt umgesetzt:

2	5	4	$\cdot$	**7**	3	1
				H	*Z*	*E*
	1	7	7	**8**	0	0
			7	6	2	0
				2	5	4
	1	8	5	6	7	4

Ausführlich lässt sich dieses Vorgehen also etwa wie folgt begründen:

$$\begin{aligned}
254 \cdot 731 &= 245 \cdot (700 + 30 + 1) \\
&= 245 \cdot 700 + 245 \cdot 30 + 245 \cdot 1 \\
&= (245 \cdot 7) \cdot 100 + (245 \cdot 3) \cdot 10 + 245 \\
&= 1778 \cdot 100 + 762 \cdot 10 + 245 \\
&= 177800 + 7620 + 245 = 185674
\end{aligned}$$

Beispiel 5.5 Führen Sie die Multipliktion $231_{4\text{er}} \cdot 232_{4\text{er}}$ schriftlich im 4er-System durch.

2	3	1	$\cdot$	2	3	2

◇

Kapitel 6
Division mit Rest

Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Gilt

$$n = m \cdot k$$

für eine weitere natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, so schreiben wir $n : m = k$. Man nennt dann n *Divident*, m *Divisor* und k *Quotient*.

Allgemeiner verstehen wir unter $n : m$ die Aufgabe, zu n, m weitere natürliche Zahlen $k, R \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = m \cdot k + R$$

zu finden, wobei $R < m$ gelten muss. Dies bezeichnet man als *Division mit Rest* und in diesem Kontext heißen k *ganzzahliger Quotient* und R *Rest*. Man kann zeigen, dass k und R eindeutig bestimmt sind.

Zwei wesentliche Anwendungsaspekte. Mittels Division lassen sich zwei grundlegende Fragestellungen beantworten:

(1) *Verteilen.* Die Anzahl von Personen und Dingen ist fixiert. Wieviele Dinge bekommt jede Person, wenn gleichmäßig verteilt wird?

(2) *Aufteilen.* Die Anzahl der Dinge sowie jene Anzahl, die jede Person erhalten soll, sind fixiert. Auf wieviele Personen kann die vorgegebene Anzahl an Dingen aufgeteilt werden?

6.1 Schriftliche Division

Um einen schriftlichen Divisionsalgorithmus schrittweise zu entwickeln, beginnen wir in Analogie zur schriftlichen Multiplikation mit einstelligen Divisoren.

6.1.1 Division mit einstelligem Divisor

Wir nehmen an, dass $a \in \mathbb{N}_0$ in Zifferndarstellung $(\star)$ vorliegt. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ soll die Division mit Rest $a : m$ durchgeführt werden. Zunächst nehmen wir an, dass es sich bei m um eine einstellige Zahl handelt, d.h. $m = mb^0$ in Zifferndarstellung, also lässt sich m als Einerziffer interpretieren. Gesucht sind Zahlen $k, R \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$a = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0 = m \cdot k + R$$

mit $R < m$ gilt. Um die führende Ziffer des Quotienten zu bestimmen, muss zunächst also die Division mit Rest $c_n : m$ durchgeführt werden. Man erhält

$$c_n = k_n \cdot m + R_n \quad \text{mit } k_n, R_n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } R_n < m.$$

Man beachte, dass $k_n = 0$ sein kann. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} a &= (k_m \cdot m + R_m)b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0 \\ &= (k_n b^n) \cdot m + (R_n b + c_{n-1})b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der nächsten Stelle des Quotienten muss die höchstens zweistellige Zahl $R_n b + c_{n-1}$ mit Rest durch m dividiert werden und wir erhalten die Darstellung

$$R_n b + c_{n-1} = k_{n-1} \cdot m + R_{n-1} \quad \text{mit } k_{n-1}, R_{n-1} \in \mathbb{N}_0 \text{ und } R_{n-1} < m.$$

Setzen wir wiederum ein und dieses Procedere fort, so liefert dies schließlich

$$\begin{aligned} a &= (k_n b^n) \cdot m + (k_{n-1} b^{n-1}) \cdot m + \ldots + (k_0 b^0) \cdot m + R_0 \\ &= (k_n b^n + k_{n-1} b^{n-1} + \ldots + k_0 b^0) \cdot m + R_0. \end{aligned}$$

Damit ist $k = k_n b^n + k_{n-1} b^{n-1} + \ldots + k_0 b^0$ der gesuchte ganzzahlige Quotient in Zifferndarstellung und $R = R_0$ der Rest.

BEISPIEL 6.1 Wir führen die Division mit Rest 1235 : 7 schriftlich durch.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 8| & 3 & 5 & : & 7 & = & 2 & 6 & 2 \\ \hline - & 1 & 4 & & & & & & & & \\ & & 4 & 3 & & & & & & & \\ & - & 4 & 2 & & & & & & & \\ & & & 1 & 5 & & & & & & \\ & & - & 1 & 4 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \end{array}$$

Also ist $1835 = 262 \cdot 7 + 1$. Dieses Vorgehen lässt sich wie folgt begründen:

$$\begin{aligned} 1835 &= 18 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = (2 \cdot 7 + 4) \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \\ &= 200 \cdot 7 + 43 \cdot 10 + 5 = 200 \cdot 7 + (6 \cdot 7 + 1) \cdot 10 + 5 \\ &= 200 \cdot 7 + 60 \cdot 7 + 15 = 200 \cdot 7 + 60 \cdot 7 + (2 \cdot 7 + 1) \\ &= (200 + 60 + 2) \cdot 7 + 1 = 262 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$ ◇

BEISPIEL 6.2 Wir führen schriftlich die Division mit Rest $232_{\text{4er}} : 3$ im 4er-System durch:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 2 & 3| & 2 & : & 3 & = & 3 & 3 \\
\hline
- & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & 2 & 2 & & & & & \\
 & - & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Also ist $232_{4\text{er}} = 33_{4\text{er}} \cdot 3 + 1$. Wir schreiben $S = 16$, $V = 4$ und $E = 1$, dann lässt sich das Vorgehen wie folgt begründen:

$$
\begin{aligned}
232_{4\text{er}} &= 2S + 3V + 2E = 23_{4\text{er}}V + 2E = (3 \cdot 3 + 2) \cdot V + 2E \\
&= 3V \cdot 3 + 22_{4\text{er}}E = 3V \cdot 3 + (3 \cdot 3 + 1)E \\
&= (3V + 3E) \cdot 3 + 1E = 33_{4\text{er}} + 1
\end{aligned}
$$

◇

6.1.2 Division mit einstelligem Quotienten

Es gelte $n = m \cdot k + R$ mit $R < m$. Die Division mit Rest $n : m$ lässt sich als k-fache Subtraktion durchführen. Allerdings ist dies de facto nur schwer durchführbar, wenn k groß ist. Ist k jedoch einstellig, so bedarf es verhältnismäßig nur weniger Subtraktionen. Selbstverständlich kann auch gleich ein Vielfaches des Divisors subtrahiert werden. Für das Auffinden des Quotienten ist auf jeden Fall „Erfahrung“ notwendig.

Beispiel 6.3

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 4 & 3 & 4 & : & 2 & 1 & 3 & = & 2 \\
\hline
- & 4 & 2 & 6 & & & & & & \\
 & & & 8 & & & & & &
\end{array}
$$

◇

Beispiel 6.4 Führen Sie die Division mit Rest $232_{4\text{er}} : 132_{4\text{er}}$ im 4er-System durch. ◇

6.1.3 Division mit mehrstelligem Quotienten

Bei der schriftlichen Division werden die folgenden Schritte immer wieder durchlaufen:

- ▷ Bestimmen eines Dividenden
- ▷ Durchführen einer Division, deren Ergebnis einziffrig ist
- ▷ Schriftliches Multiplizieren
- ▷ Schriftliches Subtrahieren

Wir illustrieren dies anhand eines Beispiels:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 8 & 6| & 5 & : & 2 & 7 & = & 3 \;\; 2 \\
\hline
- & 8 & 1 & & & & & & \\
 & & 5 & 5 & & & & & \\
 & - & 5 & 4 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

Dieses Vorgehen lässt sich wie folgt begründen:

$$
\begin{aligned}
865 &= 86 \cdot 10 + 5 = (3 \cdot 27 + 5) \cdot 10 + 5 \\
&= 30 \cdot 27 + 55 = (3 \cdot 10) \cdot 27 + 2 \cdot 27 + 1 \\
&= 32 \cdot 27 + 1
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass es sich bei 86 : 27 sowie 55 : 27 um Divisionen mit einstelligem Quotienten handelt.

Beispiel 6.5 Führen Sie die Division mit Rest $2313_{4\text{er}} : 32_{4\text{er}}$ schriftlich durch. ◇

Anhang A
Fragenkatalog

Konkrete Mengen, Funktionen und Zahlen sollten zur Übung eigenständig durch andere ersetzt werden.

A.1 Die natürlichen Zahlen

(1) Welches mathematische Objekt formalisiert den Denkprozess des Zusammenfassens?

(2) Wie ist eine Menge definiert?

(3) Wie wird eine Menge angegeben?

(4) Was beudetet $x \in \{\triangle, \square, \star\}$?

(5) Welches mathematische Objekt formalisiert den Denkprozess des Zuordnens?

(6) Wie ist eine Funktion definiert?

(7) Was versteht man unter einem Argument und dem zugehörigen Funktionswert einer Funktion?

(8) Bilden Sie für die Funktion

$$f\colon \{\star, \square, \circ\} \to \{\star, \square, \triangle\}\colon \star \mapsto \triangle, \circ \mapsto \square, \square \mapsto \triangle$$

die Funktionswerte $f(\square)$ und $f(\star)$.

(9) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto 2n + 4.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Bei f handelt es sich um eine gerade Zahl, also insbesondere um ein Element von $\mathbb{N}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n)$ eine gerade Zahl.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n+1) = 2n + 5$.

(10) Um welche Menge handelt es sich bei $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

(11) Handelt es sich bei

$$-\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon (m, n) \mapsto m - n$$

um eine Abbildung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(12) Was heißt es, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ bijektiv ist?

(13) Wann sind zwei Mengen X und Y gleichmächtig?

(14) Sind $X = \{\star, \Box, \circ\}$ und $Y = \{*, \triangle, \diamond, \circ\}$ gleichmächtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(15) Wie ist eine Teilmenge einer Menge definiert?

(16) Was versteht man unter einer echten Teilmenge?

(17) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die beiden Mengen $X = \{\star, \Box, \circ\}$ und $Y = \{\triangle, \star, \diamond, \circ, \Box\}$ zu?
  (a) $X \subset Y$
  (b) $Y \subset X$
  (c) X ist echte Teilmenge von Y
  (d) Y ist echte Teilmenge von X

(18) Was heißt es, dass eine Menge unendlich ist?

(19) Wie ist eine endliche Menge definiert?

(20) Was versteht man unter einer Kardinalzahl?

(21) Wie sind die Kardinalzahlen 4 und 0 definiert?

(22) Ist folgende Aussage wahr oder falsch?

$$\operatorname{card}\{\star, \diamond, \triangle, \star\} = 4$$

(23) Geben Sie die Kernaussagen der Peano-Axiome wieder und damit die grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen.

(24) Wie wird 4 als Ordinalzahl definiert?

(25) Zeigen Sie mittels Induktion, dass

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(26) Erklären Sie das Induktionsprinzip anhand des Spiels "Die Türme von Hanoi" und zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ Scheiben die minimale Zugfolge aus

$$Z(n) = 2^n - 1$$

Zügen besteht.

A.2 Rechnen mit natürlichen Zahlen

(1) Wie ist die Vereinigung zweier Mengen A und B definiert?

(2) Bilden Sie die Vereinigung der Mengen

$$A = \{\triangle, \circ\} \quad \text{und} \quad B = \{\square, \triangle, \star\}$$

und geben Sie $\operatorname{card} A$, $\operatorname{card} B$ und $\operatorname{card} A \cup B$ an.

(3) Wann sind zwei Mengen A und B disjunkt?

(4) Wie ist die Addition für zwei Kardinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ definiert?

(5) Zeigen Sie, dass für die Kardinalzahlen 2 und 4 gilt, dass

$$2 + 4 = 6.$$

(6) Zeigen Sie allgemein und anhand eines Beispiels, dass die Addition von Kardinalzahlen kommutativ ist.

(7) Zeigen Sie, dass 0 das neutrale Element bezüglich der Addition von Kardinalzahlen ist.

(8) Zeigen Sie allgemein und anhand eines Beispiels, dass die Addition von Kardinalzahlen assoziativ ist.

(9) Wie wird $n + m$ für zwei Ordinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ definiert?

(10) Bilden Sie für die Ordinalzahlen 2 und 3 die Summen

$$2 + 3 \quad \text{und} \quad 3 + 2.$$

Nach welchem Rechengesetz stimmen die Ergebnisse überein?

(11) Wie ist $m < n$ und $m \leq n$ für zwei Kardinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ über Mengenrelationen definiert?

(12) Zeigen Sie für die Kardinalzahlen 3 und 5 über eine Mengenrelation, dass $3 < 5$ gilt.

(13) Wie lässt sich $m < n$ sowohl für Kardinalzahlen als auch Ordinalzahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ über die Addition definieren?

(14) Unter welcher Bedingung an die natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ kann $n - m$ (in den natürlichen Zahlen) gebildet werden und wie ist $n - m$ dann definiert?

(15) Warum ist die Subtraktion $3 - 5$ in den natürlichen Zahlen nicht möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

(16) Wie kann das Ergebnis einer Subtraktion von natürlichen Zahlen als Kardinalzahl einer Menge interpretiert werden?

(17) Was versteht man unter dem Negativen einer natürlichen Zahl? Wie wird die Menge der ganzen Zahlen definiert?

(18) Die kleine Lisa erzählt: „Gestern habe ich siebenmal als Erste alle vier Spielfiguren ins Ziel bei 'Mensch ärgere dich nicht' gestellt. Das sind insgesamt 7 mal 4 Spielfiguren.“ Welche Zahlaspekte verwendet Lisa?

A.3 Darstellungformen von Zahlen

(1) Auf was basieren Stellenwertsysteme?

(2) Welche Funktion besitzt die Null in einem Stellenwertsystem?

(3) Unter Verwendung der üblichen Ziffern: In welchen Stellenwertsystemen gibt es die Zifferndarstellung 4203?

(4) Um welche Zahl (im Dezimalsystem) handelt es sich bei $2465_{7\text{er}}$?

(5) Geben Sie die Zifferendarstellung von $2465_{10\text{er}}$ im 8er-System an.

(6) Addieren Sie $2465_{7\text{er}}$ und $566_{7\text{er}}$ im 7er-System.

(7) Bilden Sie $2465_{8\text{er}} - 566_{8\text{er}}$ im 8er-System.

(8) Erklären Sie das Konzept des “Übertrags“ im Kontext der schriftlichen Addition und Subtraktion sowohl im Stellenwertsystem zur Basis 10 als auch zur Basis 8.

A.4 Schriftliche Addition und Subtraktion

(1) Begründen Sie ausführlich das Vorgehen bei folgender schriftlicher Addition:

$$\begin{array}{r} 7\ 8\ 6 \\ +\ {}_1 2 {}_1 4\ 7 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 3 \end{array}$$

Erklären Sie insbesondere das Konzept des Übertrags.

(2) Führen Sie folgende schriftliche Addition im 4er-System durch:

$$\begin{array}{r} 213_{4\text{er}} \\ +\quad 31_{4\text{er}} \\ \hline \end{array}$$

Begründen Sie ausführlich das Vorgehen und erklären Sie insbesondere das Konzept des Übertrags.

(3) Erklären Sie ausführlich das Vorgehen bei folgender schriftlicher Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 8 \\ -\ {}_1 2\ 7\ 6 \\ \hline 1\ 6\ 2 \end{array}$$

Gehen Sie insbesondere auf die Behandlung des Übertrags ein.

(4) Erklären Sie ausführlich das Vorgehen bei folgender schriftlicher Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 3\ \\ \cancel{4}\ 3\ 8 \\ -\quad 2\ 7\ 6 \\ \hline 1\ 6\ 2 \end{array}$$

Gehen Sie insbesondere auf die Behandlung des Übertrags ein.

(5) Führen Sie folgende Subtraktion im 4er-System durch:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1_{4\text{er}} \\ -\ 2\ 1\ 3_{4\text{er}} \\ \hline \end{array}$$

Begründen Sie ausführlich ihr Vorgehen.

A.5 Multiplikation natürlicher Zahlen

(1) Wie ist die Multiplikation zweier Kardinalzahlen definiert?

(2) Begründen Sie, warum für die Multiplikation von Kardinalzahlen das **Kommutativgesetz** gilt.

(3) Was besagt das **Distributivgestz** und wie lässt sich dieses zeigen?

(4) Wie ist die Multiplikation zweier Ordinalzahlen definiert?

(5) Erklären Sie, wie das Produkt $2 \cdot 3$ anhand der Zahlengeraden konstruiert werden kann.

(6) Geben Sie die Einmaleins-Tafel für das 6er-System an.

(7) Begründen Sie ausführlich das Vorgehen bei folgender schriftlicher Multiplikation:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & 6 & 4 & \cdot & 7 \\
\hline
 & T & H & Z & E \\
 & & & 2 & 8 \\
 & & 4 & 2 & 0 \\
 & 1 & 4 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 8 & 4 & 8
\end{array}$$

(8) Führen Sie folgende schriftliche Multiplikation im 4er-System durch:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & 3 & 3 & \cdot & 3 \\
\hline
\end{array}$$

Erklären Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

(9) Begründen Sie ausführlich, dass

$$349 \cdot 1000 = 349000.$$

(10) Begründen Sie ausführlich, dass

$$231_{4\text{er}} \cdot 100_{4\text{er}} = 23100_{4\text{er}}.$$

(11) Begründen Sie ausführlich das Vorgehen bei folgender schriftlicher Multiplikation:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 5 & 4 & \cdot & \mathbf{7} & 3 & 1 \\
\hline
 & & & & H & Z & E \\
 & 1 & 7 & 7 & \mathbf{8} & 0 & 0 \\
 & & & 7 & 6 & 2 & 0 \\
 & & & & 2 & 5 & 4 \\
\hline
 & 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4
\end{array}$$

(12) Führen Sie die Multiplikation $231_{4\text{er}} \cdot 232_{4\text{er}}$ schriftlich im 4er-System durch. Begründen Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

A.6 Division mit Rest

(1) Wie ist die Aussage $n : m = k$ für natürliche Zahlen $m, n, k \in \mathbb{N}$ definiert?

(2) Nennen Sie zwei Anwendungsaspekte der Division und veranschaulichen Sie diese anhand eines Beispiels.

(3) Was versteht man unter der Division mit Rest der Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch die Zahl $m \in \mathbb{N}$?

(4) Führen Sie die Division mit Rest $345 : 7$ schriftlich durch und begründen Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

(5) Führen Sie die Division mit Rest $2332_{4\text{er}} : 3$ schriftlich im 4er-System durch und begründen Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

(6) Führen Sie die Division mit Rest $7845 : 26$ schriftlich durch und begründen Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

(7) Führen Sie die Division mit Rest $2313_{4\text{er}} : 21_{4\text{er}}$ schriftlich im 4er-System durch und begründen Sie ausführlich Ihr Vorgehen.

Literaturverzeichnis

[1] Krauthausen, G. ; Scherer, P.: *Einführung in die Mathematikdidaktik.* Springer Heidelberg, 2008

[2] Leuders, J.: *Förderung der Zahlbegriffesentwicklung bei sehenden und blinden Kindern.* Springer Spektrum, 2012

[3] Padberg, F.: *Elementare Zahlentheorie.* Dritte Auflage. Springer Spektrum, 2008

[4] Padberg, F. ; Büchter, A.: *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik.* Zweite Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015