

PRAKTIKUMSAUFGABEN ZUR ANALYSIS

TOBIAS HELL & GEORG SPIELBERGER

Universität Innsbruck
Wintersemester 2019/20

INHALTSVERZEICHNIS

1	Präliminarien	4
2	Rechnen mit Potenzen und Wurzeln	6
2.1	Grundlegendes	6
2.2	Beispiele	6
2.3	Aufgaben	7
3	Ungleichungen und Beträge	8
3.1	Grundlegendes	8
3.2	Beispiele	9
3.3	Aufgaben	12
4	Komplexe Zahlen	13
4.1	Grundlegendes	13
4.2	Beispiele	13
4.3	Aufgaben	15
5	Algebraische, rationale und Wurzelgleichungen	16
5.1	Beispiele	16
5.2	Aufgaben	17
6	Trigonometrische Funktionen	18
6.1	Grundlegendes	18
6.2	Beispiele	19
6.3	Aufgaben	21
7	Exponential- und Logarithmusfunktionen	22
7.1	Grundlegendes	22
7.2	Beispiele	22
7.3	Aufgaben	24
8	Grenzwerte und Stetigkeit	25
8.1	Grundlegendes	25
8.2	Beispiele	25
8.3	Aufgaben	26

9	Differentialrechnung	27
9.1	Grundlegendes	27
9.2	Beispiele	27
9.3	Aufgaben	29
10	Integralrechnung	30
10.1	Grundlegendes	30
10.2	Beispiele	30
10.3	Aufgaben	32
11	Anwendungen zur Differential- und Integralrechnung	33
11.1	Grundlegendes	33
11.2	Aufgaben	34
12	Folgen und Reihen	35
12.1	Grundlegendes	35
12.2	Beispiele	36
12.3	Aufgaben	37

KAPITEL 1
PRÄLIMINARIEN

Betrag einer reellen Zahl

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von x .

Quadratische Gleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1.1}$$

Man nennt $D := p^2 - 4q$ die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (1.1). Es können die folgenden drei Fälle auftreten:

- **D = 0:** Gleichung (1.1) besitzt eine reelle (doppelte) Lösung, nämlich

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}.$$

- **D > 0:** (1.1) hat zwei, voneinander verschiedene, reelle Lösungen. Diese lauten

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

- **D < 0:** Es existiert keine reelle Lösung der Gleichung (1.1).

Im Falle, dass $D \geq 0$, gilt weiters

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 + px + q, && \text{(Zerlegung in Linearfaktoren)} \\ x_1 + x_2 &= -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q. && \text{(Satz von Vieta)} \end{aligned}$$

Beweis: (a) Quadratisches Ergänzen von (1.1) führt auf

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Da $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, besitzt die Gleichung nur dann eine reelle Lösung, falls die rechte Seite ebenfalls größer gleich Null ist. Sei also $D \geq 0$, so kann auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel gezogen werden. Somit erhält man

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

(b) Setzen wir für x_1 und x_2 ein, so ergibt sich

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -p.$$

Genauso einfach sieht man, dass

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

(c) Nun folgt unmittelbar

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q.$$

RECHNEN MIT POTENZEN UND WURZELN

2.1 Grundlegendes

Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

und für $a \neq 0$ gilt

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Für $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Rechenregeln

<p>Es seien $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:</p>

$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (\text{"Bei gleicher Basis addieren sich die Exponenten."})$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

2.2 Beispiele

Beispiel 2.1. (Kürzen von Hochzahlen)

Für $x < 0$ ist die reelle Quadratwurzel $\sqrt{x^2}$ definiert, jedoch nicht $(\sqrt{x})^2$. Insbesondere dürfen im Allgemeinen Exponenten nicht ohne weiteres gekürzt werden. Für $x \in \mathbb{R}$ und gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Bei ungeradem n entfällt der Betrag, dass man diesen jedoch bei geradem n keinesfalls vernachlässigen darf, sieht man anhand des Beispiels

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1.$$

Beispiel 2.2. Vereinfache den Ausdruck

$$\frac{(18\sqrt{ab^2})^3 \cdot (5a^3b)^4}{27 \cdot 2a^3b^4 \cdot (25a^3\sqrt{b})^2} = (*)$$

soweit wie möglich.

Lösung: Um die Wohldefiniertheit von (*) zu gewährleisten, muss folgendes verlangt werden:

- \sqrt{a} und \sqrt{b} wohldefiniert $\rightsquigarrow a, b \geq 0$
- a und b treten mit positivem Exponenten im Nenner auf $\rightsquigarrow a, b \neq 0$

Insgesamt: $a, b > 0$

Zum Vereinfachen des Ausdrucks empfiehlt es sich, die konstanten Faktoren soweit wie möglich zu faktorisieren:

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{(3^2 \cdot 2\sqrt{ab^2})^3 \cdot (5a^3b)^4}{3^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot (5^2 a^3 \sqrt{b})^2} = \frac{3^6 \cdot 2^3 \cdot a^{3/2} \cdot b^6 \cdot 5^4 \cdot a^{12} \cdot b^4}{3^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot 5^4 \cdot a^6 b} = \\ &= \frac{3^3 \cdot 2^2 \cdot a^{27/2} \cdot b^{10}}{a^9 \cdot b^5} = 108\sqrt{a^9}b^5 \end{aligned}$$

2.3 Aufgaben

Gib für folgende Ausdrücke sinnvolle Wertebereiche an und vereinfache soweit wie möglich:

$$(1) \frac{c^{2n-x} \cdot d^{n+x}}{c^{n+2x} \cdot d^{2n-3x}} \cdot \frac{x^{2n+2} \cdot y^{3n+1}}{x^{2n+3} \cdot y^{2n+1}}$$

$$(2) \frac{x^{3-a}y^{2a+1}}{(x+y)^{a+1}} \left(\frac{(x+y)^{5a+4}}{x^{2a+1}y} : \frac{y^{a+2}}{x^{3a+2}(x+y)^{3+3a}} \right)$$

$$(3) \frac{\sqrt[3]{z^2} \cdot \sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[6]{z} \cdot \sqrt[4]{z^5}} : \frac{\sqrt{z^5} \cdot \sqrt[4]{z^7}}{\sqrt[9]{z^3} \cdot \sqrt{z}}$$

KAPITEL 3
UNGLEICHUNGEN UND BETRÄGE

3.1 Grundlegendes

Elementare Umformungen von Ungleichungen
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $d > 0$. Dann gilt: $\triangleright a < b \iff a + c < b + c$ $\triangleright a < b \iff a \cdot d < b \cdot d$ $\triangleright a < b \iff -b < -a$ (Bei Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl dreht sich also das Ungleichheitszeichen um.)

Diese und folgende Rechenregeln gelten analog für $>$, \leq und \geq . Allgemeiner gilt:

Anwendung von monotonen Funktionen auf Ungleichungen
Es seien $a, b \in D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann gilt $a < b \iff f(a) < f(b)$. Ist $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hingegen streng monoton fallend, so ist $a < b \iff g(a) > g(b)$.

Achtung: Die Quadratfunktion $[x \mapsto x^2]$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, jedoch streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ (vgl. Abbildung 3.1), d.h. eine Ungleichung darf nur dann quadriert werden, wenn beide Seiten dasselbe Vorzeichen besitzen. Sind beide Seiten negativ, so muss beim Quadrieren das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

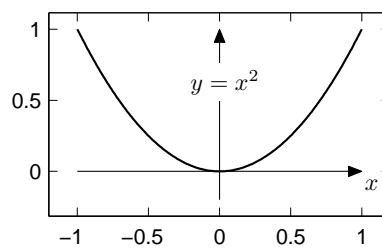


Abbildung 3.1: Standardparabel

3.2 Beispiele

Beispiel 3.1. (Multiplikation mit negativen reellen Zahlen)

An folgendem einfachen Beispiel sieht man, dass das Ungleichheitszeichen bei Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl umgedreht werden muss:

$$x < 3 \tag{3.1}$$

ist offensichtlich für $x = 2$ erfüllt. Multipliziert man (3.1) mit -1 und drehte das Ungleichheitszeichen nicht um, so erhielte man $-x < -3$, was offensichtlich für $x = 2$ nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.2. (Auflösen von Beträgen)

- (1) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x| \leq 2.$$

Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $x \geq 0$: $x \leq 2$

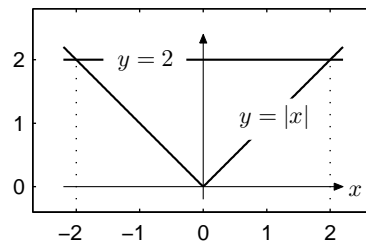
2. Fall: $x < 0$: $-x \leq 2 \iff x \geq -2$

Somit lautet die Lösungsmenge der Ungleichung $\mathbb{L} = [-2, 2]$.

Kurz können diese Überlegungen wie folgt geschrieben werden:

$$|x| \leq 2 \iff (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee (x < 0 \wedge -x \leq 2) \iff -2 \leq x \leq 2$$

- (2) Durch das Ziehen der Quadratwurzel ergibt sich $x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2$. Da beide Seiten der Ungleichung nicht negativ sind und $[x \mapsto \sqrt{x}]$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wächst, ist dies zulässig.

Abbildung 3.2: Graphische Veranschaulichung der Lösung der Ungleichung $|x| \leq 2$

- (3) Eine alternative Schreibweise für eine Fallunterscheidung bietet das nächste Beispiel:

$$|x - 3| \leq 5 \iff \begin{cases} x - 3 \leq 5, & x \geq 3 \\ 3 - x \leq 5, & x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 8, & x \geq 3 \\ x \geq -2, & x < 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in [-2, 3) \cup [3, 8] = [-2, 8] = \mathbb{L}$$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.3. (Quadratische Ungleichungen)

- (1) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Lösung: Man berechnet zuerst die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$, welche man mittels des Satzes von Vieta leicht als $x = -2, 3$ erkennt. Somit ist

$$x^2 - x - 6 < 0 \iff (x + 2)(x - 3) < 0,$$

was genau dann der Fall ist, wenn $x + 2$ und $x - 3$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Das kann nur passieren, wenn x zwischen den Nullstellen der nach oben geöffneten Parabel $x^2 - x - 6$ liegt. Daraus ergibt sich $\mathbb{L} = (-2, 3)$.

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

- (2) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x^2 + x - 2| \leq 4.$$

Lösung: $|x^2 + x - 2| \leq 4 \iff |x + 2||x - 1| \leq 4$

1. Fall: $x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 1): x^2 + x - 6 \leq 0 \iff (x + 3)(x - 2) \leq 0 \iff x \in [-3, 2]$
 $\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [-3, -2] \cup [1, 2]$

2. Fall: $x \in (-2, 1): x^2 + x + 2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-2, 1)$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [-3, 2]$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.4. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{5}{2x - 2} \leq \frac{1}{x - 3}.$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

1. Fall: $x \in (1, 3): 5x - 15 \geq 2x - 2 \iff 3x \geq 13 \iff x \geq \frac{13}{3} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

2. Fall: $x \in \mathbb{R} \setminus [1, 3]: 5x - 15 \leq 2x - 2 \iff x \leq \frac{13}{3} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-\infty, 1] \cup (3, \frac{13}{3}]$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 1] \cup (3, \frac{13}{3}]$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.5. Bestimme für festes $a \in \mathbb{R}$ Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung

$$a < \sqrt{x - 1}.$$

Lösung: $\mathbb{D} = [1, \infty)$

1. Fall: $a < 0$: Die Ungleichung ist erfüllt, da $\sqrt{x - 1}$ für alle $x \geq 1$ nicht negativ ist.

1. Fall: $a \geq 0$: Da beide Seiten nicht negativ sind, darf quadriert werden:

$$a^2 < x - 1 \iff x > a^2 + 1$$

Die Lösungsmenge hängt also von a ab: $\mathbb{L} = \begin{cases} (a^2 + 1, \infty), & a \geq 0 \\ [1, \infty), & a < 0 \end{cases}$

3.3 Aufgaben

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

(1) $(x + 4)(6 - x) \leq 0$

(2) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

(3) $\frac{2}{x + 2} > \frac{1}{3x - 1}$

(4) $4x^2 \leq 8x + 1$

(5) $\frac{1}{3 - x} > 3 + x$

(6) $|2 - x^2| \geq x^2$

(7) $\left| \frac{3 - 6x}{1 - x} \right| > 2$

(8) $|1 - x^2| \geq 2x + 2$

(9) $-x < \sqrt{36 - 2x^2}$

(10) $\frac{1}{x + |x + 1|} < 2$

(11) $\frac{\frac{1}{2}x^2 - 6}{|x + 4| - 2} < -2x + 3$

(12) $|x - |2 - x|| < |x^2 - 1|$

KAPITEL 4
KOMPLEXE ZAHLEN

4.1 Grundlegendes

Definitionen

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann nennt man

- ▷ $\operatorname{Re} z = x$ *Realteil* und $\operatorname{Im} z = y$ *Imaginärteil* von z ,
- ▷ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *Betrag* von z ,
- ▷ $\bar{z} = x - iy$ die *konjugierte komplexe Zahl* zu z .

Es gelten folgende Identitäten:

Wichtige Identitäten

- ▷ $i^2 = -1$
- ▷ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- ▷ $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi, \quad \psi \in \mathbb{R} \quad (\text{Eulersche Formel})$
- ▷ $z = re^{i\varphi}$, wobei $r = |z|$ und $\varphi = \arg_{\mathbb{H}} z$ (*Polardarstellung einer komplexen Zahl*)

4.2 Beispiele

Beispiel 4.1. (*Brüche komplexer Zahlen, "Reellmachen" des Nenners*)

Schreibe

$$z = \frac{2 - 3i}{1 + 2i}$$

in eine komplexe Zahl mit reellem Nenner um.

Lösung: Wir erweitern mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl, also $1 - 2i$, und erhalten

$$z = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{-4 - 7i}{|1 + 2i|^2} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Beispiel 4.2. (*Wurzelziehen im Komplexen – Kartesische Koordinaten*)

Bestimme zu $z \in \mathbb{C}$ alle $w \in \mathbb{C}$, welche

$$w^2 = z$$

erfüllen, speziell für $z = 3 + 4i$.

Lösung: Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$, wobei $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann muss für w die Gleichung

$$w^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi \stackrel{!}{=} x + iy$$

erfüllt sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$u^2 - v^2 = x \quad \text{und} \quad 2uv = y.$$

Wir nehmen $y \neq 0$ an, denn ansonsten wäre $z \in \mathbb{R}$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $u = \frac{y}{2v}$ und durch Einsetzen eine biquadratische Gleichung in v , nämlich

$$\frac{y^2}{4v^2} - v^2 = x \iff 4v^4 + 4xv^2 - y^2 = 0.$$

Folglich ist

$$v^2 = \frac{1}{2}(-x \pm |z|)$$

und da $|z| \geq x$, müssen wir uns für das positive Vorzeichen entscheiden, dann ist $v^2 \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}$. Schließlich führt dies auf die zwei Lösungen $w_1 = u_1 + v_1i, w_2 = u_2 + v_2i$, wobei

$$u_{1,2} = \pm \frac{y}{\sqrt{2(|z| - x)}} \quad \text{und} \quad v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

Speziell für $z = 3 + 4i$:

$$w_1 = 2 + i = -w_2.$$

Beispiel 4.3. (*Wurzelziehen im Komplexen – Polarkoordinaten*)

Bestimme wie im vorangegangenen Beispiel zu $z \in \mathbb{C}$ alle $w \in \mathbb{C}$, welche

$$w^2 = z$$

erfüllen, speziell für $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Lösung: Es sei $z = re^{i\varphi}$ die Darstellung von z in Polarkoordinaten. Dann ist

$$w_1 = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{und} \quad w_2 = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi)},$$

da $e^{2\pi i} = 1$.

Speziell für $z = 1 + \sqrt{3}i$:

$$r = 2, \varphi = \arctan \sqrt{3} = \pi/3 \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = -w_2$$

4.3 Aufgaben

Bestimme $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und \bar{z} für

$$(1) \quad z = 3 + 4i,$$

$$(2) \quad z = \frac{1}{3 + 2i},$$

$$(3) \quad z = \frac{1+i}{1-i},$$

$$(4) \quad z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}.$$

Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen über \mathbb{C} :

$$(5) \quad z^2 = 2 + 2i$$

$$(6) \quad z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$(7) \quad 4z^2 - 8z + 13 = 0$$

$$(8) \quad (1 + 5i)z^2 + (4 + 8i)z + 4 - 4i = 0$$

ALGEBRAISCHE, RATIONALE UND WURZELGLEICHUNGEN

5.1 Beispiele

Beispiel 5.1. (*Biquadratische Gleichung*)

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$4z^4 + 7z^2 - 2 = 0$$

über \mathbb{C} .**Lösung:** Wir setzen $u = z^2$, lösen zuerst die quadratische Gleichung

$$4u^2 + 7u - 2 = 0$$

und erhalten $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = -2$. Wurzelziehen führt auf

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i \right\}.$$

Beispiel 5.2. (*Rationale Gleichung*)

Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x-1}{6x+4} - \frac{2x+2}{9x-6} + \frac{x+1}{9x^2-4} = \frac{1}{6}. \quad (*)$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2/3, 2/3\}$

$$\begin{aligned} (*) &\iff \frac{3x-3}{3x+2} - \frac{4x+4}{3x-2} + \frac{6x+6}{(3x+2)(3x-2)} = 1 \iff \\ &\iff (3x-3)(3x-2) - (4x+4)(3x+2) + 6x+6 = 9x^2-4 \iff \\ &\iff 12x^2+29x-8=0 \iff x \in \left\{ -\frac{8}{3}, \frac{1}{4} \right\} = \mathbb{L} \end{aligned}$$

Beispiel 5.3. (*Wurzelgleichung*)Bestimme Definitions- und Lösungsmenge über \mathbb{R} der Gleichung

$$\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x-3}.$$

Lösung: $4x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{4}$, $x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$, $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$
 $\Rightarrow \mathbb{D} = [3, \infty)$

Für $x \geq 3$ ist $\sqrt{4x+1} \geq \sqrt{x+4}$ und somit sind beide Seiten der Gleichung nicht negativ. Quadrieren erhält somit die Lösungsmenge der Gleichung und führt auf

$$4x + 1 + x + 4 - 2\sqrt{(4x+1)(x+4)} = x - 3 \iff 2x + 4 = \sqrt{(4x+1)(x+4)}.$$

Wiederum sind beide Seiten der Gleichung für $x \geq 3$ nicht negativ und erneutes Quadrieren liefert

$$4x^2 + 16x + 16 = 4x^2 + 17x + 4 \iff x = 12.$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{12\}$$

5.2 Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge folgender biquadratischer Gleichungen über \mathbb{C} :

$$(1) \quad x^4 + x^2 - 2 = 0 \qquad (2) \quad 2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$$

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichungen über \mathbb{R} :

$$(3) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{4x^3 - 4x}$$

$$(4) \quad -x = \sqrt{x+4}$$

$$(5) \quad \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2$$

$$(6) \quad \sqrt{6+x} = \sqrt{10-4x} - \sqrt{x}$$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

6.1 Grundlegendes

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und Folgerungen

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\triangleright \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\triangleright \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\triangleright \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\triangleright \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\triangleright \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\triangleright \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

Periodizität und Parität

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\triangleright \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad (\sin \text{ und } \cos \text{ sind } 2\pi\text{-periodisch})$$

$$\triangleright \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (\sin \text{ ist eine ungerade Funktion})$$

$$\triangleright \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (\cos \text{ ist eine gerade Funktion})$$

Spezielle Phasenverschiebungen

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\triangleright \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\triangleright \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$\triangleright \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\triangleright \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

Definition von Tangens und Cotangens	
Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:	
$\triangleright \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\triangleright \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$
Additionstheoreme für Tangens und Cotangens	
$\triangleright \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$	$\triangleright \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha \pm \tan \beta}$

α		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/
$\cot \alpha$		/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Tabelle 6.1: Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen

6.2 Beispiele

Beispiel 6.1. Man zeige

$$\cos^2(5\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = 1.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= [\cos \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}] = \cos^2(\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = [\cos(\beta + \pi) = -\cos \beta] = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta\right] = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \\ &= [\text{Pythagoras}] = 1 = \text{RHS} \end{aligned}$$

Bemerkung: LHS steht für *left-hand side*, RHS für *right-hand side*, also für die linke bzw. rechte Seite der Gleichung.

Beispiel 6.2. Bestimme die Definitionsmenge folgender trigonometrischer Gleichung und verifiziere diese:

$$\frac{\tan \alpha}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{LHS} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \text{RHS}$$

Beispiel 6.3. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha. \quad (*)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (*) &\iff 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \iff \sin \alpha = 0 \vee \cos \alpha = 1 \iff \\ &\iff \alpha = k\pi \vee \alpha = 2k\pi \iff \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Beispiel 6.4. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} (*) &\iff 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \iff \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \vee \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \vee \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Beispiel 6.5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos^2 \alpha + 3 = \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha.$$

Lösung: Verwendung der Identität $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ liefert

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 2 = 0 &\iff (\cos \alpha - 2) \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right) = 0 \iff \\ &\iff \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

da $|\cos \alpha| \leq 1$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Somit ist $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

6.3 Aufgaben

Man bestimme den Definitionsbereich folgender Gleichungen und verifiziere diese:

$$(1) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right) + 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 5\pi\right) \cos^3\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin^3\left(\frac{\alpha}{2} + 3\pi\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$(2) \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha) \qquad (3) \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$$

$$(4) \quad \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad (5) \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$(6) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \qquad (7) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge folgender trigonometrischer Gleichungen:

$$(8) \quad |\sin \alpha| = \frac{1}{2} \qquad (9) \quad 2 \sin(2\alpha) \tan \alpha = 3$$

$$(10) \quad \sin \alpha + 2 \cot \alpha = \frac{2}{\sin \alpha} \qquad (11) \quad 2 \cos^2 \alpha + (1 + \sqrt{3}) \sin \alpha = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

7.1 Grundlegendes

Für $a > 0$ nennt man

$$\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty): x \mapsto a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a . Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen.

Für $a \neq 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \log_a(x)$$

heißt *Logarithmusfunktion* zur Basis a . Zur Basis e bzw. 10 schreibt man

$$\ln := \log := \log_e \text{ (Logarithmus naturalis)} \quad \text{und} \quad \lg := \log_{10}.$$

Rechenregeln für Logarithmusfunktionen
<p>Seien $a > 0$ mit $a \neq 1$, $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▷ $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$ ▷ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ▷ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

7.2 Beispiele

Beispiel 7.1. (*Umrechnen von Logarithmen*)

Es seien $a, b > 0$ mit $a \neq 1 \neq b$ und $x > 0$. Unter Verwendung der Identität $x = b^{\log_b x}$ erhält man

$$\log_a x = \log_a \left(b^{\log_b x} \right) = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich also nur durch eine multiplikative Konstante.

Beispiel 7.2. Es seien $a > 0$ mit $a \neq 1$ und $x \cdot y > 0$. Bei der Verwendung der Logarithmusregeln ist Vorsicht geboten:

$$\log_a(xy) = \log_a |xy| = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

Beispiel 7.3. Vereinfache $\sqrt[3]{e^{6 \ln 2}}$.

Lösung: $\sqrt[3]{e^{6 \ln 2}} = e^{\frac{6}{3} \ln 2} = e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$

Beispiel 7.4. Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache anschließend soweit wie möglich:

$$\log \frac{x^3}{y^2}.$$

Lösung: Der Ausdruck $\frac{x^3}{y^2}$ ist für $y \neq 0$ definiert. Damit auch $\log \frac{x^3}{y^2}$ wohldefiniert ist, muss verlangt werden, dass $\frac{x^3}{y^2} > 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x > 0$ ist. Somit ergibt sich für den Gültigkeitsbereich: $x > 0, y \neq 0$. Vereinfachen:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log |y|$$

Beispiel 7.5. (Exponentialgleichungen)

- (1) Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Lösung:

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \iff (3^x + 1)(3^x - 3) = 0 \iff x = 1,$$

da $\{x \in \mathbb{R}: 3^x = -1\} = \emptyset$. Daher ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

- (2) Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$x^{2x} = x.$$

Lösung: $\mathbb{D} = (0, \infty)$

$$x^{2x} = x \xrightarrow{x > 0} 2x \log x = \log x \iff x \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{L}$$

Beispiel 7.6. (Logarithmische Gleichung)

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\log(2x + 2) + \log(3x - 4) = \log(4x^2 - 4)$$

Lösung: $2x + 2 > 0 \iff x > -1$, $3x - 4 > 0 \iff x > \frac{4}{3}$, $4x^2 - 4 > 0 \iff |x| > 1$
 $\Rightarrow \mathbb{D} = \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

$$\begin{aligned} \log(2x + 2) + \log(3x - 4) &= \log(2x + 2) + \log(2x - 2) \iff \\ \log(3x - 4) &= \log(2x - 2) \iff 3x - 4 = 2x - 2 \iff x = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$$

7.3 Aufgaben

Vereinfache:

$$(1) \sqrt[5]{10}^{2 \lg 32} \qquad (2) \sqrt{e^{\frac{2}{3} \ln 3}}$$

Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache:

$$(3) \log_3 \frac{9x^4}{y^6} \qquad (4) \ln \sqrt{x^2 - y}$$

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} (5) \quad a (a^{x-3})^{x+2} &= a^{3x+5} (a^x)^{x-6} \text{ für } a \in (0, \infty) & (6) \quad 4^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}} + 1 &= 0 \\ (7) \quad \log(x^3(x-1)) + 3 \log \frac{1}{x} &= \log(2-x) & (8) \quad \frac{2}{\lg x + 2} - \frac{3}{\lg x - 4} &= 2 \end{aligned}$$

GRENZWERTE UND STETIGKEIT

8.1 Grundlegendes

Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Umgebung des Punktes $\xi \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig in $x \in D$, wenn $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ gilt. Im Fall der Stetigkeit vertauschen also Grenzwertbildung und Funktionsauswertung.

Wichtige Grenzwerte

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

8.2 Beispiele

Beispiel 8.1. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Lösung:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

Bemerkung: Die auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ definierte Funktion $\left[x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right]$ besitzt demnach in $x = 3$ eine hebbare Singularität, d. h. sie kann dort stetig fortgesetzt werden, und zwar zu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x + 3$.

Beispiel 8.2. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = (*).$$

Lösung: Variante 1:

$$(*) = \left[1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 =$$

$$= \left[[z \mapsto z^2] \text{ stetig} \right] = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Variante 2:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

8.3 Aufgaben

Berechne folgende Grenzwerte:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$
$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \qquad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}$$

Bestimme jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert an den angegebenen Stellen.

$$(5) \quad \left[x \mapsto f_1(x) = \frac{1}{x+1} \right] \quad \text{in } -1 \qquad (6) \quad \left[x \mapsto f_2(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \right] \quad \text{in } -1$$
$$(7) \quad \left[x \mapsto g_2(x) = \frac{1}{x^2-1} \right] \quad \text{in } -1, 1 \qquad (8) \quad \left[x \mapsto g_2(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \right] \quad \text{in } -1, 1$$

9.1 Grundlegendes

Differentiationsregeln

Es seien f und g differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\triangleright (f + \lambda \cdot g)' = f' + \lambda \cdot g' \quad (\text{Linearität})$$

$$\triangleright (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{Produktregel})$$

$$\triangleright \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$\triangleright (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad (\text{Kettenregel})$$

(Die Quotientenregel gilt natürlich nur für Argumente x mit $g(x) \neq 0$ und für die Kettenregel muss die Hintereinanderausführung existieren.)

Ableitung elementarer Funktionen

Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\triangleright \frac{d}{dx} x^\lambda = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$$

$$\triangleright \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\triangleright \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\triangleright \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

9.2 Beispiele

Beispiel 9.1. (*Produktregel*)

Differenziere

$$[z \mapsto f(z) = z^2 e^z \sin z].$$

Lösung: Anwendung der Produktregel liefert

$$f'(z) = 2ze^z \sin z + f(z) + z^2 e^z \cos z = ze^z((2+z) \sin z + z \cos z).$$

Beispiel 9.2. (Quotientenregel)

Berechne die Ableitung von der Tangensfunktion.

Lösung:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = [\text{Quotientenregel}] = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Beispiel 9.3. (Kettenregel)

Differenziere

$$\left[y \mapsto g(y) = \sin e^{\tan y^5} \right].$$

Lösung: Durch dreimaliges Anwenden der Kettenregel erhalten wir

$$g'(y) = \cos \left(e^{\tan y^5} \right) \cdot e^{\tan y^5} \cdot (1 + \tan^2 y^5) \cdot 5y^4.$$

Beispiel 9.4. (Ableitung der Umkehrfunktion)

- (1) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ bijektiv sowie differenzierbar. Weiters gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist auch f^{-1} auf B differenzierbar. Wir bestimmen die Ableitung von f^{-1} wie folgt: Für $y \in B$ ist

$$x(y) = f^{-1}(y) \iff f(x(y)) = y.$$

Implizites Differenzieren nach y (Anwendung der Kettenregel) ergibt

$$f'(x(y)) \cdot x'(y) = 1.$$

Da $f'(x(y)) \neq 0$ gilt, ist weiters

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

Durch Einsetzen von $x(y) = f^{-1}(y)$ erhalten wir die *Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion*:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- (2) Bestimme die Ableitung von $[x \mapsto \ln |x|]$.

Lösung: Anwendung der oben geschilderten Vorgehensweise auf $\ln |x|$ für $x \neq 0$:

$$y(x) = \ln |x| \iff e^{y(x)} = |x|.$$

Da $(|x|)' = \text{sign } x$ für $x \neq 0$ gilt, führt implizites Differenzieren nach x auf

$$e^{y(x)} y'(x) = \text{sign } x \iff (\ln |x|)' = \frac{\text{sign } x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

9.3 Aufgaben

Bestimme jeweils die Ableitung der angegebenen Funktion. (Es braucht nicht untersucht zu werden, wo die Funktionen definiert bzw. differenzierbar sind.)

- | | |
|---|---|
| (1) $[k \mapsto f_1(k) = 4k^x], x \neq 0$ | (2) $[z \mapsto f_2(z) = \sin^2 z]$ |
| (3) $[x \mapsto f_3(x) = x^3 e^x \tan x]$ | (4) $[x \mapsto f_4(x) = \sqrt[n]{x}], n \in \mathbb{N}$ |
| (5) $\left[x \mapsto f_5(x) = \sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right]$ | |
| (6) $\left[x \mapsto f_6(x) = \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right]$ | |
| (7) $[a \mapsto f_7(a) = \cot a]$ | (8) $\left[b \mapsto f_8(b) = \frac{\sqrt{b}}{\sin^4 b} \right]$ |
| (9) $[a \mapsto f_9(a) = \sqrt{\sinh e^{a^{13/2}}}]$ | (10) $\left[c \mapsto g_1(c) = \frac{\cos c^2 + c^3}{e^{\sin c - 2c^3}} \right]$ |
| (11) $[x \mapsto g_2(x) = \arcsin x]$ | (12) $[x \mapsto g_3(x) = \arccos x]$ |
| (13) $[x \mapsto g_4(x) = \arctan x]$ | (14) $[x \mapsto g_5(x) = \operatorname{arsinh} x]$ |
| (15) $[x \mapsto g_6(x) = \operatorname{arcosh} x]$ | (16) $[x \mapsto g_7(x) = \operatorname{artanh} x]$ |
| (17) $[x \mapsto g_8(x) = a^x], a > 0$ | |
| (18) $[x \mapsto g_9(x) = \log_a x], a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ | |
| (19) $[z \mapsto h_1(z) = (\sin z)^{\cos z}]$ | (20) $\left[u \mapsto h_2(u) = (\tan u)^{(\tan u)^{\tan u}} \right]$ |

KAPITEL 10
INTEGRALRECHNUNG

10.1 Grundlegendes

Im Folgenden steht c für eine reelle Konstante.

Integrationsregeln

Es seien f_L und g_L integrierbar und f und g stetig differenzierbar sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\triangleright \int (f_L(x) + \lambda \cdot g_L(x)) dx = \int f_L(x) dx + \lambda \int g_L(x) dx \quad (\text{Linearität})$$

$$\triangleright \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(z) dz \Big|_{z=g(x)} \quad (\text{Substitutionsregel})$$

$$\triangleright \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \quad (\text{Partielle Integration})$$

Stammfunktionen elementarer Funktionen

Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\triangleright \int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$$

$$\triangleright \int e^x dx = e^x + c$$

$$\triangleright \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\triangleright \int \cos x dx = \sin x + c$$

10.2 Beispiele

Beispiel 10.1. (*Substitution*)

(1) Berechne $\int x^2 \sin(x^3) dx$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x^3) dx &= [x^3 = u, 3x^2 dx = du] = \frac{1}{3} \int \sin u du = \\ &= -\frac{1}{3} \cos u + c = -\frac{1}{3} \cos x^3 + c\end{aligned}$$

(2) Berechne $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

Lösung:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \left[\tan x = z, \frac{dx}{\cos^2 x} = dz \right] = \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan x} + c$$

(3) Berechne $\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\sqrt{4 \ln x + 1}}{2x} dx$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\sqrt{4 \ln x + 1}}{2x} dx &= \left[u = 4 \ln x + 1, du = \frac{4}{x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{8} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{12} \sqrt{u^3} \Big|_{u=1}^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Beispiel 10.2. (Partielle Integration)

(1) Berechne $\int ze^z dz$.

Lösung:

$$\int ze^z dz = [\text{partielle Integration}] = ze^z - \int e^z dz = e^z(z-1) + c$$

(2) Berechne $\int \ln|x| dx$.

Lösung:

$$\int 1 \cdot \ln|x| dx = [\text{partiell}] = x \ln|x| - \int \frac{x}{x} dx = x(\ln|x| - 1) + c$$

(3) Berechne $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Lösung: Partielle Integration liefert

$$-\frac{1}{x} \ln x \Big|_{x=1}^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).$$

10.3 Aufgaben

Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} dy$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(3) $\int_0^{\pi} t \sin t dt$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(5) $\int \arcsin a da$

(6) $\int \arctan b db$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} u^2 \cos(3u) du$

(8) $\int \ln(1 + w^2) dw$

(9) $\int_b^c a^x dx, a > 0, b, c \in \mathbb{R}$

(10) $\int \frac{\sin(2z) - \sin z}{\sqrt{\sin^2 z + \cos z}} dz$

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{9^x + 1} dx$

(12) $\int e^x \sin x dx$

**ANWENDUNGEN ZUR DIFFERENTIAL- UND
INTEGRALRECHNUNG**

11.1 Grundlegendes**Anwendungen zur Differentialrechnung**

Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ differenzierbar. Dann ist die *Tangente* t_ξ an den Graphen von f im Punkt $x = \xi$ gegeben durch

$$t_\xi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}: x \mapsto t_\xi(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi).$$

Für $\alpha = \sphericalangle(t, x\text{-Achse})$ gilt $\tan(\alpha) = f'(\xi)$.

Anwendungen zur Integralrechnung

Rotationskörper: Das *Volumen des Drehkörpers*, welcher durch Rotation des Graphen der integrierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ um die x -Achse entsteht, ist

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx,$$

bei Rotation um die y -Achse

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

Bogenlänge: Die Funktion f sei zudem nun differenzierbar. Die *Bogenlänge* des Graphen von f ist dann durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

gegeben.

Mantelfläche: Die *Mantelfläche des Drehkörpers*, welcher durch Rotation des Graphen von f um die x -Achse entsteht, ist

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

11.2 Aufgaben

- (1) Bestimme die Tangente an den Graphen der Funktion $[x \mapsto f_1(x) = x^2 \ln |x|]$ im Punkt $-e$.

- (2) Bestimme die Tangenten mit Steigung -3 an den Graphen der Funktion

$$\left[x \mapsto f_2(x) = \frac{x^2}{x-1} \right].$$

- (3) Bestimme jene x_0 , für welche die Tangente bei x_0 an den Graphen von

$$[x \mapsto f_3(x) = x|x-2|]$$

die x -Achse unter einem Winkel von 135° schneidet.

- (4) Berechne das Volumen des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f_4: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \tan x$$

um die x -Achse entsteht.

- (5) Berechne das Volumen des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f_5: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sin x$$

um die y -Achse entsteht.

- (6) Berechne die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f_6: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}.$$

- (7) Berechne die Mantelfläche des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f_7: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos x$$

um die x -Achse entsteht.

KAPITEL 12
FOLGEN UND REIHEN

12.1 Grundlegendes

Grenzwertsätze

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \cdot a$
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = a \cdot b$
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Für den letzten Punkt muss $b \neq 0$ gelten.

Folgenderdarstellung und Reihendarstellung von e^x

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Geometrische Reihe

Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

12.2 Beispiele

Beispiel 12.1. Bestimme den Grenzwert der durch

$$a_n = \frac{3n^4 + 2n^2 + 1}{4n^4 + n^3 + 5n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen Folge.

Lösung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}} = \frac{3}{4}$$

Beispiel 12.2. Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen Folge.

Lösung: Verwendung der algebraischen Identität $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ führt auf

$$b_n = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beispiel 12.3. Bestimme den Grenzwert der durch

$$c_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen Folge.

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1+2}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^n = \\ &= [n \rightarrow n+1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)}_{=1} = e^2 \end{aligned}$$

Beispiel 12.4. Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{3j}}{8^{2j}} = (*)$$

konvergiert und berechne im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

Lösung:

$$(*) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8^j}{8^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{8^j}$$

Die Reihe ist konvergent, da $1/8 < 1$. Berechnung des Reihenwertes:

$$(*) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{8^{j+1}} = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{8^j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

Beispiel 12.5. Bestimme für welche $x, y \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{3j}}{y^{2j}}$$

konvergiert. Berechne sodann den Reihenwert.

Lösung:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{3j}}{y^{2j}} = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn

$$\left| \frac{-x^3}{y^2} \right| < 1 \iff |x|^3 < y^2.$$

Berechnung des Reihenwertes:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^{j+2} = \frac{x^6}{y^4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j = \\ &= \frac{x^6}{y^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^3}{y^2}} = \frac{x^6}{y^2(y^2 + x^3)} \end{aligned}$$

12.3 Aufgaben

Im Folgenden ist eine Folge durch Angabe des n -ten Folgenglieds für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Untersuche die jeweilige Folge auf Konvergenz und berechne, falls möglich, den Grenzwert.

$$(1) \quad a_n = \frac{42n^{42} + 17n^{17}}{13n^{37} + 31n^{41}}$$

$$(2) \quad b_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^3 + n}$$

$$(3) \quad c_n = \sqrt{n^3 + 2\sqrt{n^3}} - \sqrt{n^3}$$

$$(4) \quad d_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$$

$$(5) \quad e_n = \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{\frac{n}{3}+2}$$

$$(6) \quad f_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 4}{n^2 + 2n + 1}\right)^n$$

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechne, falls möglich, den Reihenwert.

$$(7) \quad \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{3^{2j}}{4^j}$$

$$(8) \quad \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{6^{2j}}$$

Bestimme für welche $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren und bestimme sodann den Reihenwert.

$$(9) \quad \sum_{j=-2}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)^j$$

$$(10) \quad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{4j} \left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{y^2}\right)^{2j}$$