Skriptum zur Vorlesung Analysis 4

Topologie und Funktionalanalysis

Tobias Hell & Lukas Neumann

Letzte Änderung: 31. Juli 2012

Universität Innsbruck
Sommersemester 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Topologische Räume

Motivation. Es sei $\mathcal{T} = \{O \subset \mathbb{R} \text{ offen}\}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall\, O \in \mathcal{T}\colon\ f^{-1}(O) \in \mathcal{T}\,.$$

Das Mengensystem $\mathcal{T}$ hat folgende Eigenschaften:

($\mathcal{T}$1) $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

($\mathcal{T}$2) $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$ für jede Familie $\{O_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$

($\mathcal{T}$3) $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, O_1, \ldots, O_n\colon\ \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

Achtung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{T}$, aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1] \notin \mathcal{T}$.

Ziel. Verallgemeinerung der Begriffe "offen" und "stetig"

Definition 1.1 (Topologie)
Es sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Dann heißt $\mathcal{T}$ **Topologie** auf X, wenn

($\mathcal{T}$1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$2) $\forall\, T \subset \mathcal{T}\colon\ \bigcup T \in \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$3) $\forall\, T \subset \mathcal{T}$ endlich: $\bigcap T \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ nennt man dann **topologischen Raum**.

Beispiel 1.2

- $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{T} = \{O \subset \mathbb{R} \text{ offen}\}$
- Triviale Topologien:
  - $\mathcal{P}(X)$ ist Topologie auf X (diskrete Topologie)
  - $\{\varnothing, X\}$ ist Topologie auf X (indiskrete Topologie)

  Offensichtlich ist $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Definition 1.3 (Offene und abgeschlossene Mengen)
Ist $(X, \mathcal{T})$ ein toplogischer Raum, so nennt man eine Menge $O \in \mathcal{T}$ **offen**. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

BEISPIEL 1.4 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wir bezeichen mit

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} := \{O \subset X\colon \forall\, x \in O\, \exists\, r > 0\colon\; B_r(x) \subset O\}$$

die Menge aller in der Norm offenen Mengen. Dann ist $\left(X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\right)$ ein topologischer Raum, die Topologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ bezeichnet man als die **von der Norm erzeugte Topologie**.

DEFINITION 1.5 (VERGLEICH VON TOPOLOGIEN)
Sind $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X mit $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$ und entsprechend $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$.

BEISPIEL 1.6 $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}, \mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X) \Longrightarrow \mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$

- ◇ $\mathcal{T}_1$ ist die gröbste Topologie auf X
- ◇ $\mathcal{T}_2$ ist die feinste Topologie auf X

DEFINITION 1.7 (BASEN VON TOPOLOGIEN, (A2))
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Menge offener Mengen.

(1) Man nennt $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie, wenn jede Menge in $\mathcal{T}$ sich als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ schreiben lässt.

(2) Besitzt eine Topologie eine abzählbare Basis, so sagt man, $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom — kurz spricht man von $(X, \mathcal{T})$ als (A2)–Raum.

BEISPIEL 1.8

- ◇ In einem normierten Raum bildet die Menge der offenen Bälle eine Basis der (von der Norm erzeugten) Topologie (vgl. Analysis 3).
- ◇ In $\mathbb{R}^n$ bildet die Menge $\left\{B_{1/k}(x)\colon\; x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\right\}$ eine abzählbare Basis der Normtopologie. Also ist $\mathbb{R}^n$ mit der Normtopologie ein (A2)–Raum.

BEMERKUNG. (MENGENTHEORETISCHE ERZEUGUNG VON TOPOLOGIEN)
Es sei X eine Menge. Man kann aus einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge eine Topologie erzeugen, indem man in zwei Schritten vorgeht.

(1) Zuerst bildet man die Menge $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ aller Schnitte endlich vieler Mengen aus $\mathcal{S}$.

(2) Im zweiten Schritt bildet man die Menge $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ aller beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. Der leere Schnitt ist dabei ganz X und die leere Vereinigung gleich $\varnothing$.

Es ist also

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \left\{ O \subset X\colon\ O = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{n_i} S_{i_j} \right) \right.$$

$$\left. \text{mit } I \text{ beliebig}, \forall\, i \in I\colon\ n_i \in \mathbb{N} \text{ und } \forall\, i \in I\, \forall\, j \in \{1 ... n_i\}\colon\ S_{i_j} \in \mathcal{S} \right\},$$

man nennt diese die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie, sie ist die kleinste Topologie, welche $\mathcal{S}$ enthält. $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ ist dann — entsprechend der sugestiven Notation — eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Ist umgekehrt $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$ bereits ein topologischer Raum, so nennt man eine Menge $\mathcal{S}$ wie oben eine **Subbasis** der Topologie.

Wie lässt sich eine Topologie auf X auf eine Teilmenge $M \subset X$ "einschränken"?

Definition und Satz 1.9 (Spurtopologie)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$\mathcal{T}_M = \{O \cap M\colon\ O \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf M , diese wird **Spurtopologie** oder von X auf M **induzierte Topologie** genannt.

Beispiel 1.10 Es seien $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{O \subset \mathbb{R} \text{ offen in } \mathbb{R}\}$ und $M = (0, 1]$. Die Menge M ist nicht offen in $\mathbb{R}$, es gilt also $M \notin \mathcal{T}$. Die von X auf M induzierte Topologie lautet

$$\mathcal{T}_M = \{O \cap (0, 1]\colon\ O \subset \mathbb{R} \text{ offen in } \mathbb{R}\}\ .$$

Im topologischen Raum $(M, \mathcal{T}_M)$ sind insbesondere alle Intervalle $(x, 1]$, $x \in (0, 1)$, offen.

Bemerkung. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ setze

$$\mathcal{T}^{\mathsf{c}} = \{X \setminus O\colon\ O \in \mathcal{T}\}\ .$$

Das Mengensystem $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ erfüllt dann

($\mathcal{T}^{\mathsf{c}}1$) $\varnothing, X \in \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$,

($\mathcal{T}^{\mathsf{c}}2$) $\forall\, T \subset \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ endlich: $\bigcup T \in \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$,

($\mathcal{T}^{\mathsf{c}}3$) $\forall\, T \subset \mathcal{T}^{\mathsf{c}}\colon\ \bigcap T \in \mathcal{T}^{\mathsf{c}}$.

Definition 1.11 (Inneres, Abschluss, Rand)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

(1) $M^\circ = \bigcup\limits_{\substack{O \in \mathcal{T} \\ O \subset M}} O$ heißt **Inneres** von M

(2) $\overline{M} = \bigcap\limits_{\substack{A\subset X \text{ abgeschlossen} \\ M\subset A}} A$ nennt man **Abschluss** von M

(3) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M

Die Elemente von M° heißen **innere Punkte**, jene von $\overline{M}$ **Berührpunkte** und einen Punkt in ∂M bezeichnet man als **Randpunkt**.

Definition 1.12 (Umgebung)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von x , wenn

$$\exists O \in \mathcal{T}\colon\ O \subset U \wedge x \in O\,.$$

Lemma 1.13 Es sei wiederum $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$.

- $x \in M^\circ \iff \exists U \subset M$ Umgebung von x
- $x \in \overline{M} \iff \forall U$ Umgebung von x: $U \cap M \neq \varnothing$

Bemerkung.

- $O \subset X$ offen $\iff O^\circ = O$
- $A \subset X$ abgeschlossen $\iff \overline{A} = A$

Lemma 1.14 Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

- Eine Teilmenge von X ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Elemente ist.
- Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen eines Punktes x ist wieder Umgebung des Punktes x.

Beweis. Aufgabe (1.2). □

Definition 1.15 (Hausdorff-Raum)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **hausdorffsch**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Umgebung U_x von x und eine Umgebung U_y von y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Bemerkung. In einem Hausdorff-Raum lassen sich also je zwei Punkte durch disjunkte Umgebungen trennen. Man spricht vom Trennungsaxiom T_2 und nennt $(X, \mathcal{T})$ einen T_2-Raum.

Definition 1.16 (Konvergenz von Folgen)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine Folge. Dann konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$, wenn

$$\forall U \text{ Umgebung von } x \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \colon \; x_n \in U \, .$$

Bemerkung. In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte eindeutig, im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall.

Beispiel 1.17 Es sei X eine Menge versehen mit der indiskreten Topologie $\{\varnothing, X\}$. Dann konvergiert jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen jedes $x \in X$. Wählen wir jedoch die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$, so sind nur jene Folgen konvergent, welche ab einem gewissen Index konstant sind.

Wir kommen nun zum fundamentalen Begriff der Stetigkeit.

Definition 1.18 (Stetigkeit)
Gegeben seien die beiden topologischen Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt **stetig**, wenn

$$\forall O \in \mathcal{T}_Y \colon \; f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X \, .$$

Bemerkung.

- Die Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen ist stetig.
- Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.
- Will man Stetigkeit in einem Punkt definieren, so benötigt man Umgebungen: Eine Abbildung wird stetig in einem Punkt x genannt, wenn die Urbilder von Umgebungen von $f(x)$ wieder Umgebungen von x sind.

Definition 1.19 (Homöomorphismus)
Gegeben seien die beiden topologischen Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Eine *bijektive* Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn f und f^{-1} stetig sind. Existiert ein solches f, so nennt man die topologischen Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ homöomorph.

Homöomorphe topologische Räume kann man im Hinblick auf topologische Eigenschaften (offene Teilmengen, Konvergenz, kompakte Teilmengen, ...) als gleich betrachten.

Beispiel 1.20

- Offene Intervalle (mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$) sind homöomorph zu $\mathbb{R}$.
- Der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der Spurtopologie ist zu keinem Intervall in $\mathbb{R}$ homöomorph.

DEFINITION 1.21 (UMGEBUNGSBASIS EINES PUNKTES)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von Umgebungen von x nennt man **Umgebungsbasis** von x, falls

$$\forall U \subset X \text{ Umgebung von } x \, \exists \, i \in I \colon \; U_i \subset U \,.$$

Wenn es zu jedem Punkt aus X eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, so sagt man der Raum erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**. Kurz nennt man $(X, \mathcal{T})$ auch einen (A1)–Raum.

BEISPIEL 1.22 Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn für $x \in X$ ist $\left\{B_{1/k}(x) \colon \; k \in \mathbb{N}\right\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x.

SATZ 1.23 (STETIGKEIT UND FOLGENSTETIGKEIT)
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f \colon \; X \to Y$ eine Abbildung.

(1) f stetig $\Rightarrow$ f folgenstetig, d. h. für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in Y und es gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$.

(2) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein (A1)–Raum, so gilt zusätzlich f folgenstetig $\Rightarrow$ f stetig.

Beweis. (1) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X und $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Weiters sei $V \subset Y$ eine beliebige Umgebung von $f(x)$. Dann ist $U := f^{-1}(V)$ offen, also Umgebung von x. Damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N \colon \; x_n \in U$. Wir wählen ein solches N (und werden das im weiteren Verlauf des Skriptums nicht immer explizit hinschreiben). Nun ist für alle $n \geq N$ offenbar $f(x_n) \in V$ und damit gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

(2) Indirekt: Angenommen f wäre folgenstetig aber nicht stetig. Dann gibt es ein $V \in \mathcal{T}_Y$ mit $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}$ $(\to f^{-1}(V) \neq \varnothing)$. Wir wählen $x \in f^{-1}(V)$ so, dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist (nach Lemma 1.14 möglich). Sei jetzt $\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x, dann gilt $\forall \, k \in \mathbb{N} \colon \; \bigcap_{n=1}^{k} U_n \not\subseteq f^{-1}(V)$ (wieder Lemma 1.14) . Wir können also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein x_k aus $\bigcap_{n=1}^{k} U_n \setminus f^{-1}(V)$ wählen. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen x. Andererseits gilt $\forall k \colon \; f(x_k) \notin V \ni f(x)$, also kann f nicht folgenstetig sein. □

1.1 ERZEUGUNG VON TOPOLOGIEN

LEMMA 1.24 (URBILD EINER TOPOLOGIE IST EINE TOPOLOGIE)
Es sei $f \colon \; X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{T}_Y$ eine Topologie auf Y. Dann ist

$$f^{-1}(\mathcal{T}_Y) = \left\{ f^{-1}(O) \colon \; O \in \mathcal{T}_Y \right\}$$

eine Topologie auf X.

Lemma 1.25 (Stetigkeit und Subbasen)
Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume sowie $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}_Y$. Dann gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall\, S \in \mathcal{S}\colon\ f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X\,.$$

Satz 1.26 (Spurtopologie und Injektion)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Weiters bezeichne

$$j\colon\ M \hookrightarrow X\colon\ x \mapsto x$$

die Inklusionsabbildung. Dann ist die Spurtopologie $\mathcal{T}_M$ die gröbste Topologie auf M, sodass die kanonische Injektion j stetig ist.

Beweis. Es sei $\mathcal{T}_0$ eine Topologie auf M. Dann ist

$$j\colon\ (M, \mathcal{T}_0) \to (X, \mathcal{T}) \text{ stetig} \iff \forall\, O \in \mathcal{T}\colon\ j^{-1}(O) = O \cap M \in \mathcal{T}_0\,.$$

Für $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_M$ ist somit j stetig und offensichtlich die Spurtopologie die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft. □

Definition 1.27 (Initialtopologie)
Gegeben seien eine Menge X, eine Familie $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ topologischer Räume sowie eine Familie $\{f_i\colon X \to X_i\}_{i\in I}$ von Abbildungen. Die gröbste Topologie $\mathcal{I}$ auf X, sodass alle f_i stetig sind, heißt **Initialtopologie** bezüglich $(X_i, \mathcal{T}_i, f_i)_{i\in I}$.

Bemerkung.

- Das Mengensystem
$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$$
ist eine Subbasis der Initialtopologie $\mathcal{I}$.

- Es sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist die Initialtopologie bezüglich $(Y, \mathcal{T}_Y, f)$ gerade $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$.

- Die Spurtopologie ist die Initialtopologie bezüglich der Inklusion.

Satz 1.28 Ist $(X_0, \mathcal{T}_0)$ ein weiterer topologischer Raum, so gilt

$$g\colon\ (X_0, \mathcal{T}_0) \to (X, \mathcal{I}) \text{ ist stetig} \iff \forall\, i \in I\colon\ f_i \circ g \text{ ist stetig.}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir folgende Definition.

Definition 1.29 Kartesisches Produkt
Es sei I eine beliebige Indexmenge und $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist das kartesische Produkt definiert als

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{ f\colon\ I \to \bigcup_{i\in I} M_i \,\middle|\, \forall\, i \in I\colon\ f(i) \in M_i \right\} .$$

Definition 1.30 (Produkttopologie)
Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i\in I} X_i$. Für $i \in I$ bezeichnen wir mit

$$p_i\colon\ X \to X_i\colon\ x = \{x_i\}_{i\in I} \mapsto x_i$$

die Projektion von X auf X_i. Dann heißt die Initialtopologie $\mathcal{T}$ auf X bezüglich $(X_i, \mathcal{T}_i, p_i)$ **Produkttopologie** und $(X, \mathcal{T})$ entsprechend **Produktraum** oder **topologisches Produkt**.

Bemerkung. Das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i\in I} O_i\colon\ O_i \in \mathcal{T}_i \text{ für } i \in I, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

ist eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}$.

Beispiel 1.31

- Sind $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, so ist

  $$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2\colon\ O_1 \in \mathcal{T}_1, O_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

  Basis der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$.

- Der Produktraum einer Kreislinie und eines Intervalls $[a, b]$ mit $0 < a < b$ ist homöomorph zum Kreisring $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \geq x^2 + y^2 \geq b\big\}$.

- Die gewöhnliche Topologie des $\mathbb{R}^n$ stimmt mit der Produkttopologie auf $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ überein.

- Zu jedem $i \in I$ werde $M_i \subset X_i$ mit der Spurtopologie versehen. Die von der Produkttopologie auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ auf $M = \prod_{i\in I} M_i$ induzierte Topologie stimmt mit der Produktopologie auf M überein.

- Es sei

  $$f\colon\ (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$$

eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Die Menge

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y:\ y = f(x)\} \subset X \times Y$$

heißt **Graph** von f. Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$g:\ X \mapsto G(f):\ x \mapsto (x, f(x))$$

stetig ist.

Satz 1.32 (stetig $\Leftrightarrow$ komponentenweise stetig)
Eine Abbildung $g:\ X_0 \to \prod_{i\in I} X_i$ zwischen dem topologischen Raum $(X_0, \mathcal{T}_0)$ und dem Produktraum der Familie $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ topologischer Räume ist genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Hintereinanderausführung $g_i = p_i \circ g$ stetig ist.

Definition und Satz 1.33 (Finaltopologie)
Gegeben seien eine Menge X, eine Familie $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ topologischer Räume sowie eine Familie $\{f_i:\ X_i \to X\}_{i\in I}$ von Abbildungen. Die feinste Topologie $\mathcal{F}$ auf X, sodass alle f_i stetig sind, heißt **Finaltopologie** bezüglich $(X_i, \mathcal{T}_i, f_i)_{i\in I}$. Diese ist durch

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \left\{O \subset X:\ f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i\right\} = \{O \subset X: \forall i \in I : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i\}$$

gegeben.

Satz 1.34 Ist $(X_0, \mathcal{T}_0)$ ein topologischer Raum, so gilt

$$g:\ (X, \mathcal{F}) \to (X_0, \mathcal{T}_0) \text{ stetig } \iff \forall\, i \in I \text{ ist } g \circ f_i:\ (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_0, \mathcal{T}_0) \text{ stetig.}$$

Beweis. Aufgabe (1.10). □

Definition 1.35 (Quotiententopologie)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Weiters bezeichne

$$\pi:\ X \to X/\sim:\ x \mapsto \overline{x}\,.$$

Die Finaltopologie auf $X/\sim$ bezüglich π heißt **Quotiententopologie** auf $X/\sim$, versehen mit dieser Topologie nennt man $X/\sim$ **Quotientenraum** oder **Faktorraum** bezüglich $\sim$.

Bemerkung. Eine Menge $O \subset X/\sim$ ist genau offen, wenn $\pi^{-1}(O)$ offen in X ist.

Beispiel 1.36 Wir betrachten die Menge $[0,1]$ mit der von der Normtopologie in $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Dann ist $\sim := \{(x,x) | x \in [0,1]\} \cup \{(1,0),(0,1)\} \subset [0,1]^2$ eine Äquivalenzrelation. $[0,1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist dann homöomorph zum Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der Spurtopologie von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$, vgl. Aufgabe (1.14).

1.2 Stetige Abbildungen – Urysohn und Tietze

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, ob für einen topologischen Raum eine "vernünftige" Anzahl von stetigen Abbildungen nach $\mathbb{R}$ existiert. Wir wissen zum Beispiel schon, dass von $(X, \{\varnothing, X\})$ nach $\mathbb{R}$ nur die konstanten Abbildungen stetig sind.

Definition 1.37 (Trennenungsaxiom (T4))
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man sagt $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das vierte Trennungsaxiom, kurz auch $(X, \mathcal{T})$ ist ein (T4)-Raum, wenn sich disjunkt abgeschlossene Mengen durch Umgebungen trennen lassen, d. h.

$$\forall A_1, A_2 \subset X \text{ abgeschl.}, A_1 \cap A_2 = \varnothing \; \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}, \; O_1 \cap O_2 = \varnothing \colon \; A_1 \subset O_1, \; A_2 \subset O_2 \,.$$

Beispiel 1.38 (Normiert $\Rightarrow$ (T4))
Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann ist $(X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$ ein (T4)-Raum. Der Beweis dieser Tatsache ist Aufgabe (1.15).

Bemerkung.

- Im Allgemeinen folgt aus (T4) nicht (T2), da einpunktige Mengen nicht abgeschlossen sein müssen. Einen topologischen Raum, in dem alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind und der (T4) ist, nennt man **normal**. Ein solcher ist dann natürlich auch hausdorffsch.

- Im Gegensatz zur Hausdorff–Eigenschaft (T2) vererbt sich (T4) nicht auf beliebige Teilmengen mit der induzierten Topologie. Es gilt aber

$$(X, \mathcal{T}) \text{ (T4) und } A \subset X \text{ abgeschlossen} \Longrightarrow (A, \mathcal{T}|_A) \text{ ist (T4).}$$

Lemma 1.39 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein (T4)–Raum und $M, N \subset X$ Teilmengen mit $\overline{M} \subset N^\circ$. Dann gibt es ein $L \subset X$ mit $\overline{M} \subset L^\circ \subset \overline{L} \subset N^\circ$.

Beweis. $\overline{M}$ und $X \setminus N^\circ$ sind abgeschlossen, also gibt es O_1 und O_2 offen und disjunkt mit $\overline{M} \subset O_1$ und $X \setminus N^\circ \subset O_2$. Setzt man $O_1 = L$, so gilt $\overline{M} \subset L^\circ = O_1$ und andererseits $\overline{L} = \overline{O}_1 \subset X \setminus O_2 \subset X \setminus (X \setminus N^\circ) = N^\circ$. □

Satz 1.40 (Lemma von Urysohn)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein (T4)–Raum, wenn zu je zwei disjunkten, nicht leeren, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ eine stetige Abbildung $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.

Beweis.
$\underline{\Leftarrow}$: Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen, disjunkt und nicht leer. Weiters sei $f : X \to [0, 1]$ stetig mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$. Die offenen Mengen $\left[1, \frac{1}{2}\right[$ und $\left]\frac{1}{2}, 0\right]$ sind disjunkt.

Die Urbilder $f^{-1}\left(\left[1,\frac{1}{2}\right[\right)$ und $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},0\right]\right)$ sind dann disjunkte offene Obermengen von B respektive A.

$\Rightarrow$: Es seien A und B disjunkte, nicht leere, abgeschlossene Mengen. Wir konstruieren induktiv eine Treppenfunktion, die auf A den Wert 0 und auf B den Wert 1 annimmt. Dazu betrachten wir bezüglich der Mengeninklusion aufsteigende Ketten von Mengen $(A_0, A_1, A_2, ..., A_n)$ mit $A_0 = B$ und $A_n = X \setminus A$. Weiters soll für unsere Kette von Mengen für $k \in \{0, ...n-1\}$ gelten, dass $\overline{A}_k \subset A^\circ_{k+1}$ ist. Eine solche Kette ist natürlich $\mathcal{A}_0 := (B, X \setminus A)$. Nach Lemma 1.39 lässt sich dann jede Kette, die den obigen Bedingungen genügt, verfeinern indem man zusätzlich n Mengen $(A'_k)_{k\in\{1...n\}}$ wählt, die jeweils zwischen den bereits vorhandenen liegen, also für $k \in \{1, ...n\}$ die Inklusion $\overline{A}_{k-1} \subset (A'_k) \subset A^\circ_k$ erfüllen. Die so erzeugte Kette $(A_0, A'_1, A_1, A'_2, A_2, ..., A'_n, A_n) =: (A_0, ..., A_{2n}) = \mathcal{A}_{n+1}$ erfüllt wieder die entsprechenden Bedingungen.
Sei nun $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von so konstruierten, immer feiner werdenden Ketten. Dann besteht $\mathcal{A}_n$ aus $2^n + 1$ Mengen. Wir definieren die Funktionenfolge $f_n : X \to [0, 1]$ indem wir

$$f_n = \chi_{A_0} + \sum_{k=1}^{2^n} \left(1 - \tfrac{k}{2^n}\right) \chi_{A_k \setminus A_{k-1}}$$

setzen. Jede der Funktionen f_n nimmt dann auf $A_0 = B$ den Wert 1 an und ist ausserhalb von $A_{2^n} = X \setminus A$ gleich 0. Nun ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an jeder Stelle monoton wachsend und von oben durch 1 beschränkt, also punktweise konvergent. Wir bezeichnen den punktweisen Grenzwert mit f. Auch für f gilt dann $f(A) = \{0\}$ sowie $f(B) = \{1\}$. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist.
Zuerst bemerken wir, dass für alle $x \in X$, gilt dass $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.
Nun betrachten wir zu $\mathcal{A}_n$ und $k \in \{0, \dots, 2^n\}$ die offenen Mengen $O_k := A^\circ_{k+1} \setminus \overline{A}_{k-1}$, wobei wir $A_{-1} := \varnothing$ und $A_{2^n+1} := X$ setzen. Für jedes n überdeckt dann die Familie $(O_k)_{k\in\{0,\dots,2^n\}}$ den ganzen Raum. Andereseits ist f_n auf jeder dieser Mengen O_k konstant bis auf einen Sprung der Höhe $\frac{1}{2^n}$ an ∂A_k. Also ändert sich auch der Wert von f auf der Menge O_k höchstens um $\frac{1}{2^n} + 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $x_0 \in X$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3}{2^n} < \varepsilon$ gilt. Weiters sei $k \in \{0, \dots, 2^n\}$ so, dass $x_0 \in O_k$ ist. Dann gilt $x_0 \in O_k \subset f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$. Da O_k offen ist, ist das Urbild einer Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0 und damit f stetig in x_0. $\square$

Bemerkung. Meistens wird nur die Richtung $\Rightarrow$ als Lemma von Urysohn bezeichnet.

Eine wichtige Verallgemeinerung des Lemmas von Urysohn ist nachfolgender Satz.

Satz 1.41 (Fortsetzungssatz von Tietze)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein (T4)-Raum, wenn sich jede

auf einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ definierte stetige Abbildung $f\colon A \to [0,1]$ zu einer stetigen Abbildung $\widetilde{f}\colon X \to [0,1]$ fortsetzen lässt.

Beweis. [4, p. 130] oder [5, Satz 7.7]. □

Bemerkung.

- ◇ Die Wahl des Intervalls $[0,1]$ ist willkürlich. Sie beschränkt aber die Allgemeinheit nicht, da die Abbildung $r \mapsto (b-a)r+a$ ein Homöomorphismus zwischen $[0,1]$ und $[a,b]$ ist.
- ◇ Eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Lemma von Urysohn ist die Existenz von Partitionen der Eins in (T4)-Räumen.

1.3 Kompakte Räume

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit kompakten Mengen. Da Teilmengen topologischer Räume mit der induzierten Topologie wieder topologische Räume sind, genügt es von kompakten Räumen zu sprechen.

Definition 1.42 (offene Überdeckungen)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie von offenen Mengen $(O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ mit $\bigcup_{i\in I} O_i = X$ heißt **offene Überdeckung** von X.

Definition 1.43 (Quasikompakt und kompakt)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X eine endliche offene Teilüberdeckung hat, d. h.

$$\forall\, (O_i)_{i\in I} \text{ offene Überdeckung von } X \;\exists\, J \subset I \text{ endlich: } \bigcup_{j\in J} O_j = X\,.$$

Man nennt X **kompakt**, wenn X quasikompakt und hausdorffsch ist.
Eine Teilmenge $A \subset X$ nennt man **relativ kompakt**, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Einer der Gründe zur Quasikompaktheit auch noch (T2) zu verlangen ist folgender Satz.

Satz 1.44 Eine Teilmenge $A \subset X$ eines kompakten Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

Beweis. "$\Leftarrow$": Nach Aufgabe (1.19) ist ein beliebger Unterraum eines Hausdorff-Raumes wieder ein (T2)-Raum. Es bleibt also noch zu zeigen, dass eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ quasikompakt ist. Dazu sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann gibt es eine Familie $(\widehat{O}_i)_{i\in I}$ von in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen mit $O_i = A \cap \widehat{O}_i$. Insbesondere ist $A \subset \cup_{i\in I}\widehat{O}_i$ und damit $(\widehat{O}_i)_{i\in I} \cup X \setminus A$ eine in $(X, \mathcal{T})$ offene Überdeckung von X. Also gibt es eine endliche Indexmenge $J \subset I$ mit

$$X = \bigcup_{j\in J} \widehat{O}_j \cup (X \setminus A)\ .$$

Somit ist aber $A = \cup_{j\in J} O_j$.

"$\Rightarrow$": Sei $A \subset X$ kompakt und $y \in X \setminus A$ fest. Da X hausdorffsch ist, gibt es zu jedem weiteren Punkt $x \in A$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Mengen $O_x \ni x$ und $\widetilde{O}_x \ni y$. Dann ist $(O_x)_{x\in A}$ eine offene Überdeckung von A und diese enthält eine endliche Teilüberdeckung $\cup_{x\in A'} O_x \supset A$ mit $A' \subset A$ endlich. Setzt man

$$U := \cap_{x\in A'} \widetilde{O}_x\,,$$

so ist U als endlicher Schnitt offener Mengen offen und es gilt $y \in U$. Andererseits ist aber $U \cap A = \varnothing$ und damit $y \notin \overline{A}$. $\square$

Bemerkung.

- Aus dem Beweis sieht man, dass jede abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten Raumes quasikompakt ist. Die abgeschlossenen Mengen sind aber nicht unbedingt die einzigen quasikompakten Teilmengen.
- Weiters sieht man aus der anderen Richtung des Beweises, dass eine kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen ist.

Korollar 1.45 Ein kompakter Raum ist normal.

Beweis. Es ist nur (T4) zu zeigen. Seien dazu A_1 und A_2 disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Nach Satz 1.44 sind A_1 und A_2 kompakt. Wie in "$\Rightarrow$" des Beweises von Satz 1.44, gibt es dann zu jedem $y \in A_2$ eine offene Menge $U_y \ni y$ und eine offene Menge $O_y \supset A_1$ mit $U_y \cap O_y = \varnothing$. Da A_2 kompakt ist, enthält die offene Überdeckung $(U_y)_{y \in A_2}$ eine endliche Teilüberdeckung

$$A_2 \subset \bigcup_{y \in A_2'} U_y =: O_2$$

mit $A_2' \subset A_2$ endlich. Dann sind O_2 und $O_1 := \cap_{y \in A_2'} O_y \supset A_1$ offen und disjunkt. □

Satz 1.46 (Stetiges Bild quasikompakter Räume)
Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Weiters sei $(X, \mathcal{T}_X)$ quasikompakt und $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, dann ist $f(X)$ quasikompakt.

Beweis. Aufgabe (1.24). □

Lemma 1.47 In einem quasikompakten Raum $(X, \mathcal{T})$ besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $a \in X$, d.h.

$$\exists\, a \in X\ \forall\, O \in \mathcal{T} \text{ mit } a \in O\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N :\ x_n \in O\,.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu jenem in normierten Räumen. Angenommen die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besäße keinen Häufungspunkt. Dann gibt es für alle $x \in X$ eine offene Menge $O_x \ni x$, in der nur endlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegen. Als offene Überdeckung hat $(O_x)_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung, in der natürlich auch alle Folgenglieder liegen müssen. Da aber auch in jeder Menge der Teilüberdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen ergibt sich, dass die Folge nur endlich viele Glieder hat. Widerspruch. □

In topologischen Räumen, in denen nicht jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, folgt daraus aber noch nicht die Existenz einer konvergenten Teilfolge. Im Allgemeinen gilt

$$x \in \overline{A} \not\Rightarrow \text{es gibt eine Folge in } A \text{, die gegen } x \text{ konvergiert.}$$

Dies liegt daran, dass die Indexmenge bei Folgen (die natürlichen Zahlen – eine abzählbare Menge) zu klein ist, um in Punkten zu arbeiten, die keine abzählbare Umgebungsbasis haben. Dieses Problem werden wir durch nachfolgende Verallgemeinerung von Folgen umgehen.

Definition 1.48 (Netze)
Eine Indexmenge I mit einer Relation $\geq$ nennt man **gerichtete Menge**, wenn $\geq$ reflexiv und transitiv ist und

$$\forall\, i_1, i_2 \in I \,\exists\, i_3 \in I\colon\; i_3 \geq i_1 \text{ und } i_3 \geq i_2\,.$$

Ist $(I, \geq)$ eine gerichtete Menge und X eine beliebige Menge, so nennt man eine Abbildung $x\colon\; I \to X$ ein **Netz** in X. Kurz schreibt man oft auch $(x_i)_{i\in I}$.

Insbesondere ist natürlich jede Folge ein Netz mit der gerichteten Menge $(\mathbb{N}, \geq)$. An dieser Stelle sei bemerkt, dass Netze auch schon für eine elegante Formulierung des Riemann-Integrals unerlässlich sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.49

- Zerlegungen eines Intervalles in $\mathbb{R}$ sind gerichtete Mengen mit der Inklusion (Verfeinerung). Ober- und Untersummen sind Netze.
- Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $y \in X$. Die Menge $\mathcal{U}(y)$ der Umgebungen von y bilden mit der Relation $\subset$ eine gerichtete Menge ($U_1 \geq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subset U_2$). Ein Netz ist dann zum Beispiel eine Abbildung, die jedem Element aus $\mathcal{U}(y)$ einen ausgewählten Punkt aus $U(y)$ zuordnet, also

  $$x : \mathcal{U}(y) \to X,\; U(y) \mapsto z(U(y)) \in U(y)\,.$$

  Für dieses Netz würde man kurz $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(y)}$ schreiben. Besitzt y keine abzählbare Umgebungsbasis, so kann man diese Netze im Allgemeinen nicht als Folgen schreiben.

Als nächstes verallgemeinern wir den Begriff der Konvergenz.

Definition 1.50 (Konvergenz von Netzen)
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Man nennt das Netz konvergent gegen $x \in X$, wenn

$$\forall\, O \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in O \,\exists\, i_0 \in I\colon\; \forall\, i \geq i_0\colon\; x_i \in O\,.$$

Beispiel 1.51

- Eine Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar auf einem Intervall, wenn die Netze der Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.

- Netze $x\colon \mathcal{U}(y) \to X,\ U(y) \mapsto z(U(y)) \in U(y)$ aus Beispiel 1.49 konvergieren gegen y . Besitzt der Punkt y keine abzählbare Umgebungsbasis, so lassen sich also tatsächlich wesentlich mehr gegen y konvergente Netze als Folgen konstruieren.

Mithilfe von konvergenten Netzen können wir folgende Charakterisierungen angeben, die uns aus (A1)-Räumen mit Folgen bekannt sind.

Satz 1.52 Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum.

- Es sei $M \subset X$, dann gilt $x \in \overline{M} \Leftrightarrow x$ ist Grenzwert eines Netzes aus M .
- Bezeichne $(Y, \mathcal{T}_Y)$ einen weiteren topologischen Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiters sei $x \in X$. Die Abbildung f ist genau dann stetig in x , wenn für alle gegen x konvergenten Netze $(x_i)_{i\in I}$ auch $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. Aufgabe (1.25). □

Zur Charakterisierung von Kompaktheit benötigen wir den Begriff des Teilnetzes.

Definition 1.53 (Teilnetze)
Es seien $(I, \geq_I)$ und $(J, \geq_J)$ zwei gerichtete Mengen und $x\colon I \to X$ ein Netz in der Menge X. Eine Abbildung $\varphi\colon J \to I$ nennt man **kofinal**, wenn

$$\forall i \in I \ \exists j_0 \in J \text{ sodass } \forall j \geq_J j_0 \colon \varphi(j) \geq_I i \ .$$

Das Netz $x \circ \varphi$, oft auch $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ geschrieben, nennt man **Teilnetz** von $x = (x_i)_{i\in I}$.

Bemerkung. Anders als bei Teilfolgen ändert man also bei Teilnetzen die Indexmenge. Man kann aber natürlich auch Teilfolgen als Teilnetze interpretieren. Betrachtet man zum Beispiel die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Teilfolge der geraden Zahlen $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ so könnte man diese mit $\varphi = \mathrm{id}$ und $(J, \geq_J) = (2\mathbb{N}, \geq)$ als Teilnetz schreiben, kurz also als $(n)_{n\in 2\mathbb{N}}$. Man beachte auch, dass man bei Teilfolgen strenge Monotonie verlangt um zu verhindern, dass die Teilfolge bei einem bestimmten Folgenglied bleibt. Für Teilnetze verlangen wir das nicht – auch weil die Indexmengen i. A. nicht linear geordnet ist. Ein Teilnetz darf zwar etwas bei einem bestimmten Eintrag des Netzes verweilen, die Bedingung der Kofinalität bedeutet aber gerade, dass es nicht dort "hängenbleibt".

Folgende Beispiele zeigen, dass zwar Teilfolgen auch Teilnetze sind, aber Teilnetze einer Folge noch keine Folgen sein müssen.

Beispiel 1.54

- Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.
  Die Abbildung $\varphi\colon ([1,\infty[, \geq) \to (\mathbb{N}, \geq)\colon r \mapsto [r]$, wobei $\geq$ jeweils für die natürliche Ordnung steht, ist kofinal. Das Teilnetz $x \circ \varphi = ([r])_{r\in[1,\infty[}$ ist aber keine Folge.

◇ Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der Relation

$$n_1 \succeq n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2 \vee \begin{cases} n_2 \text{ ungerade und } n_1 = n_2 + 1 \\ n_2 \text{ gerade und } n_1 \geq n_2 \end{cases} .$$

Dann ist $(\mathbb{N}, \succeq)$ gerichtet und die Abbildung $\varphi : (\mathbb{N}, \succeq) \to (\mathbb{N}, \geq)$ ist kofinal. Für eine Folge $(x_n)_{n\in(\mathbb{N},\geq)}$ ist aber das Teilnetz $(x_{\varphi(n)})_{n\in(\mathbb{N},\succeq)}$ keine Folge.

Satz 1.55 Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(I, \geq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X.

(1) Ist $(x_i)_{i\in I}$ konvergent, so konvergiert jedes Teilnetz gegen den gleichen Grenzwert.

(2) Ein Punkt $a \in X$ ist genau dann Häufungspunkt des Netzes $(x_i)_{i\in I}$, d. h.

$$\forall O \in \mathcal{T} \text{ mit } a \in O, \forall i \in I : \exists j \in I, j \geq i : x_j \in O ,$$

wenn ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$ gegen a konvergiert.

Beweis.
(1) Sei $(x_i)_{i\in I}$ konvergent mit Grenzwert a. Weiters sei $(J, \geq)$ eine gerichtete Menge und $\varphi : J \to I$ eine kofinale Abbildung. Ist U eine beliebige Umgebung von a, so gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\forall i \geq i_0\colon\ x_i \in U$. Da φ kofinal ist, gibt es ein $j_0 \in J$, sodass $\forall j \geq j_0\colon\ \varphi(j) \geq i_0$ gilt. Damit gilt $\forall j \geq j_0 : x_{\varphi(j)} \in U$, also konvergiert $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ gegen a.

(2) $\underline{\Rightarrow}$: Sei a Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$. Wir bezeichnen wie gewohnt

$$\mathcal{U}(a) = \{U \subset X\colon\ U \text{ Umgebung von } a\}$$

und setzen $J := I \times \mathcal{U}(a)$. Die Menge J wird mit der Ordnung

$$(i_1, U_1) \succeq (i_2, U_2) \ :\Leftrightarrow i_1 \geq i_2 \wedge U_1 \subset U_2$$

zu einer gerichteten Menge. Nach Definition des Häufungspunktes gibt es zu jedem $(j, U) \in J$ ein $\varphi(j, U) := i \in I$ mit $i \geq j$ und $x_i = x_{\varphi(j,U)} \in U$. Die dadurch definierte Abbildung $\varphi : J \to I$ ist kofinal, das Teilnetz $(x_{\varphi(j,U)})_{(j,U)\in J}$ konvergiert gegen a .

$\underline{\Leftarrow}$: Habe nun $(x_i)_{i\in I}$ ein gegen a konvergentes Teilnetz. Dann gibt es eine gerichtete Menge $(J, \geq)$ und eine kofinale Abbildung $\varphi : J \to I$, sodass $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ gegen a konvergiert. Sei $i \in I$ beliebig und U eine Umgebung von a. Dann wählen wir ein $j_0 \in J$, sodass $\forall j \geq j_0\colon\ x_{\varphi(j)} \in U$. Da I gerichtet ist, gibt es ein $i_1 \in I$ mit $i_1 \geq i$ und $i_1 \geq \varphi(j_0)$. Weil φ kofinal ist, gibt es zu i_1 dann ein $j_1 \in J$, sodass $\forall j \geq j_1\colon\ \varphi(j) \geq i_1$. Weil J gerichtet ist, finden wir ein $j_2 \in J$ mit $j_2 \geq j_1$ und $j_2 \geq j_0$. Dann gilt $x_{\varphi(j_2)} \in U$ und $\varphi(j_2) \geq i$, also ist a Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$. □

Satz 1.56 Der topologische raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann quasikompakt, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz besitzt.

Beweis. $\Rightarrow$: Indirekt. Angenommen $(X, \mathcal{T})$ ist quasikompakt und das Netz $(x_i)_{i\in I}$ hat kein konvergentes Teilnetz. Dann hat $(x_i)_{i\in I}$ nach Satz 1.55 auch keinen Häufungspunkt. Also gibt es zu jedem $x \in X$ ein $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x$ und

$$\exists\, i_x \in I\colon\ \forall i \geq i_x\colon\ x_i \notin O_x\,.$$

Die offene Überdeckung $(O_x)_{x\in X}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, wir wählen etwa $(O_{x_i})_{i\in\{1,\dots n\}}$. Da I eine gerichtete Menge ist, gibt es ein $i_0 \in I$, sodass für alle $j \in \{1, \dots n\}$: $i_0 \geq i_{x_j}$ gilt. Damit ist $x_0 \notin \cup_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Widerspruch.

$\Leftarrow$: Indirekt. Angenommen jedes Netz hat ein konvergentes Teilnetz, aber $(X, \mathcal{T})$ ist nicht quasikompakt. Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Wir betrachten die Menge $\mathcal{I}_f := \{J \subset I\colon\ J \text{ endlich}\}$. Dann ist $(\mathcal{I}_f, \supset)$ eine gerichtete Menge. Wir wählen $\forall J \in \mathcal{I}_f$ ein $x_J \notin \cup_{i\in J} O_i$. Dadurch erhalten wir ein Netz $(x_J)_{J\in\mathcal{I}_f}$, dass nach Voraussetzung und Satz 1.55 einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt. Da $\cup_{i\in I} O_i = X$ gilt, gibt es ein $i_0 \in I\colon\ a \in O_{i_0}$. Natürlich ist $\{i_0\} \in \mathcal{I}_f$. Weil aber a ein Häufungspunkt von $(x_J)_{J\in I_f}$ ist, gibt es zu O_{i_0} ein $J \in \mathcal{I}_f$ mit $i_0 \in J$ und $x_J \in O_{i_0}$. Dies widerspricht aber der Wahl von x_J. $\square$

Definition 1.57 Partielle und totale Ordnung
Es sei M eine beliebige Menge und $\geq$ eine **Ordnungsrelation** auf M, d. h. $\geq$ ist

(1) reflexiv: $\forall x \in M\colon\ x \geq x$,

(2) antisymmetrisch: $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$,

(3) transitiv: $x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow\ x \geq z$.

Dann nennt man $(M, \geq)$ eine **partiell geordnete** Menge. Gilt zusätzlich

$$\forall\, x, y \in M\colon\ x \geq y \text{ oder } y \geq x\,,$$

so nennt man $(M, \geq)$ **total geordnet**. In einer total geordneten Menge gibt es natürlich zu zwei Elementen immer ein gemeinsames größeres, nämlich das größere der beiden. Ist eine partiell geordnete Menge auch gerichtet, gibt es also zu $x, y \in M$ ein $z \in M$ mit $z \geq x \wedge y \geq x$, so sprechen wir von einer **gerichteten partiell geordneten** Menge.

Bemerkung. In der Definition von gerichteten Mengen haben wir die Antisymmetrie nicht gefordert, da sie zur Konstruktion von Netzen nicht erforderlich ist. Alle unsere bisherigen Netze besitzen aber gerichtete partiell geordnete Indexmengen.

Axiom 1.58 (Lemma von Zorn)
Es sei $(M, \geq)$ eine nicht-leere, partiell geordnete Menge.
Besitzt jede nicht-leere total geordnete Teilmenge $N \subset M$ eine obere Schranke in M, so gibt es in M mindestens ein maximales Element, d. h.

$$\begin{aligned}&(\forall\, N \subset M \text{ mit } N \neq \varnothing \text{ und } N \text{ total geordnet}\colon \exists m_N \in M\colon \forall n \in N\colon\; m_N \geq n)\\ &\Longrightarrow (\exists m_0 \in M \text{ sodass } , \forall m \in M\colon\; m_0 \geq m)\ .\end{aligned}$$

Bemerkung.

- Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom, zum Wohlordnungssatz und zum noch folgenden Satz von Tychonoff. Das Auswahlaxiom ist im Rahmen der Zermelo–Fraenkel-Mengenlehre nicht beweisbar oder widerlegbar und kann damit als Axiom hinzugenommen werden (oder eben nicht). Wir nehmen der Einfachheit halber das äquivalente (aber vielleicht weniger grundlegende) Lemma von Zorn als Axiom an.
- Mithilfe des Lemmas von Zorn kann man beweisen, dass jedes Netz in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ein universelles Teilnetz besitzt. Dabei handelt es sich um ein Netz, das zu jeder beliebigen Teilmenge $T \subset X$ ab einem bestimmten Index entweder in T oder in $X \setminus T$ liegt.

Satz 1.59 (Satz von Tychonoff)
Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Der Produktraum $(\Pi_{i\in I} X_i, \Pi_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ ist genau dann quasikompakt, wenn für alle $i \in I$ auch $(X_i, \mathcal{T}_i)$ quasikompakt ist.

Beweis. Ein eleganter Beweis ist über universelle Teilnetze möglich, siehe [7, 1]. Äquivalent ist die — notationell etwas andere — Formulierung über Ultrafilter in [3, 5, 6] oder sehr ausführlich in [4]. Ein anderer Beweis verwendet den Alexanderschen Subbasensatz. □

1.4 Alexandroff–Kompaktifizierung

Definition 1.60 (lokalkompakter Raum)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokalkompakt**, wenn er (T2) ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Nun beschäftigen wir uns ausgiebiger mit Kompaktheit in Hausdorff-Räumen.

Lemma 1.61 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, dann gilt:

- Kompakte Teilräume sind abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$.
- Schnitte kompakter Teilräume von $(X, \mathcal{T})$ sind wieder kompakt.

- ◇ Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilräume von $(X,\mathcal{T})$ ist kompakt.

Beweis. Da sich (T2) nach Aufgabe (1.19) auf Teilmengen vererbt, ist ein Teilraum $K \subset X$ genau dann kompakt, wenn für jede in X offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I} \supset K$ eine endliche Teilüberdeckung existiert, also eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $(O_i)_{i\in I_0} \supset K$. Dies folgt aus der Konstruktion der induzierten Topologie, denn es gilt

$$K \cap \bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I}(O_i \cap K)$$

und das sind gerade die offenen Überdeckungen von K in der Spurtopologie.
(1): Analog zu $\Rightarrow$ im Beweis von Satz 1.44.
(2): Sei $(K_j)_{j\in J}$ eine Familie von kompakten Teilmengen von X und $j_0 \in J$ beliebig. Dann sind alle K_j abgeschlossen und es gilt $\bigcap_{j\in J} K_j \subset K_{j_0}$. Als abgeschlossene Teimenge einer kompakten Menge ist nach Satz 1.44 auch $\bigcap_{j\in J} K_j \subset K_{j_0}$ kompakt.
(3): Sei $(K_j)_{j=1\ldots n}$ eine Familie von kompakten Mengen und $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Zu jedem $j \in \{1,\ldots,n\}$ gibt es dann ein endliches I_j mit $K_j \subset \bigcup_{i\in I_j} O_i$. Dann ist $I_0 := \cup_{j=1}^n I_j$ endlich und es gilt $\cup_{j=1}^n K_j \subset \cup_{i\in I_0} O_i$. Der Beweis dieses Punktes funktioniert natürlich auch für quasikompakte Mengen in beliebigen topologischen Räumen. □

Satz 1.62 Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum. Dann hat jeder Punkt aus X eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$. Wir müssen eine kompakte Menge K finden mit $x \in K \subset O$. Da $(X,\mathcal{T})$ lokalkompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung L, die nach Satz 1.61 abgeschlossen ist. Dann ist auch $O \cap L$ eine Umgebung von x und enthält damit eine offene Menge O_1, die x enthält. Die Menge $L \setminus O_1 = L \cap (X \setminus O_1)$ ist als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge L nach Satz 1.44 kompakt. Weiters gilt $x \notin L \setminus O_1$. Nach Aufgabe (1.22) gibt es dann O_2, $O_3 \in \mathcal{T}$ mit $O_2 \cap O_3 = \varnothing$, $x \in O_2$ und $L \setminus O_1 \subset O_3$. Damit ist $K = L \setminus O_3 = L \cap (X \setminus O_3)$ kompakt und es folgt aus $x \notin O_3$, dass $x \in L \setminus O_3 = K \subset L \setminus (L \setminus O_1) = L \cap O_1 = O_1 \subset O$. □

Beispiel 1.63 In $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}\right)$ hat jeder Punkt x eine kompakte Umgebung, beispielsweise $\overline{B_1(x)}$. Die kompakten Umgebungen von x bilden eine Umgebungsbasis von x.

Satz 1.64 (Alexandroff-Komaktifizierung)
Sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein lokalkompakter topologischer Vektorraum und ∞ ein Punkt, der nicht in X liegt. Dann kann man $Y := X\dot\cup\{\infty\}$ mit genau einer Topologie $\mathcal{T}_Y$ ausstatten, sodass $(Y,\mathcal{T}_Y)$ kompakt und $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y|_X$ ist. Man nennt $(Y,\mathcal{T}_Y)$ die **Alexandroff-Kompaktifizierung** oder **Einpunktkompaktifizierung** von $(X,\mathcal{T}_X)$.
Ist $(X,\mathcal{T}_X)$ nicht kompakt, so ist X dicht in $(Y,\mathcal{T}_Y)$, d. h. $\overline{X}^Y = Y$.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Existenz einer solchen Topologie $\mathcal{T}_Y$ auf Y.
Dazu definieren wir eine Basis der offenen Umgebungen von ∞ durch

$$\mathcal{B}_\infty := \{\{\infty\} \cup X \setminus K\colon\ K \subset X \text{ kompakt } \}$$

und setzen $\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_X \cup \mathcal{B}_\infty$.
Nun zeigen wir, dass $\mathcal{T}_Y$ eine Topologie auf Y ist.
(i) Klarerweise gilt $\varnothing \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$ und $Y = \{\infty\} \cup (X \setminus \varnothing) \in \mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{T}_Y$.
(ii) Nun zeigen wir, dass $\mathcal{T}_Y$ stabil unter Vereinigungen ist.
Für eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{B}_\infty$ gilt für $i \in I$, dass $O_i = \{\infty\} \cup (X \setminus K_i)$ mit $K_i \subset X$ kompakt ist. Damit erhalten wir

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \{\infty\} \cup \bigcup_{i\in I} X \setminus K_i = \{\infty\} \cup X \setminus \bigcap_{i\in I} K_i\,.$$

Nach Lemma 1.61 ist $\bigcap_{i\in I} K_i$ kompakt, also $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}_Y$. Für eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von Mengen aus $\mathcal{T}_X$ gilt natürlich auch, dass ihre Vereinigung in $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$ liegt. Es fehlt also noch der Fall, dass in einer Familie $(O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}_Y$ sowohl Mengen aus $\mathcal{T}_X$ als auch Mengen aus $\mathcal{B}_\infty$ enthalten sind. In diesem Fall gilt nach obigen Überlegungen

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{\{i\in I\colon O_i\in\mathcal{T}_X\}} O_i \cup \bigcup_{\{i\in I\colon O_i\in\mathcal{B}_\infty\}} O_i = O \cup (\{\infty\} \cup X \setminus K)$$

mit $O \in \mathcal{T}_X$ und $K \subset X$ kompakt. Dann gilt aber

$$O \cup (\{\infty\} \cup X \setminus K) = \{\infty\} \cup (X \setminus (K \cap (X \setminus O)) \ .$$

Als Schnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge ist $K \cap (X \setminus O)$ kompakt und damit liegt obige Menge in $\mathcal{B}_\infty$.
(iii) Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_Y$ stabil unter endlichen Durchschnitten ist.
Zuerst sei $(O_i)_{i=1}^n$ eine endliche Familie von Mengen aus $\mathcal{B}_\infty$. Es gilt also für $1 = 1, \dots, n$, dass $O_i = \{\infty\} \cup (X \setminus K_i)$ mit $K_i \subset X$ kompakt ist. Dann erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n \{\infty\} \cup (X \setminus K_i) = \{\infty\} \cup X \setminus \bigcup_{i=1}^n K_i$$

und weil nach Lemma 1.61 der endliche Schnitt kompakter Mengen kompakt ist, gilt $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{B}_\infty$.
Betrachtet man eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ mit $\forall i \in \{1, \dots, n\}\colon\ O_i \in \mathcal{T}_X$, so ist klarerweise auch $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}_X$. Es bleibt uns also noch der gemischte Fall zu untersuchen. Es gilt

$$\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{\{1\leq i\leq n\colon O_i\in\mathcal{T}_X\}} O_i \cap \bigcap_{\{1\leq i\leq n\colon O_i\in\mathcal{B}_\infty\}} O_i = O \cap (\{\infty\} \cup X \setminus K) = O \cap (X \setminus K)$$

mit $O \in \mathcal{T}_X$ und $K \subset X$ kompakt. K ist abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_X)$ und damit $X \setminus K \in \mathcal{T}_X$. Damit ist $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$.
Jetzt zeigen wir, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ hausdorffsch ist. Sind $x \neq y$ aus $X \cap Y$, dann kann man die zwei Punkte durch offene Mengen trennen, da $(X, \mathcal{T}_X)$ hausdorffsch ist. Ist $x = \infty$ und $y \in X$, so besitzt, weil X lokalkompakt ist, der Punkt y eine kompakte Umgebung $K \subset X$. Damit trennen die Umgebungen K und $\{\infty\} \cup X \setminus K$ die Punkte y und x.
Nun bleibt noch zu zeigen, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt ist. Sei dazu $(O_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_Y$ eine beliebige offene Überdeckung von Y. Dann gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in O_k$ und $O_k = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$ mit K kompakt. Weil K kompakt ist und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es ein endliches $I_0 \subset I$ mit $\bigcup_{i \in I_0} O_i \supset K$. Damit ist $(O_i)_{i \in I_0 \cup \{k\}}$ eine endliche offene Teilüberdeckung von Y.
Nach Satz 1.44 ist X genau dann in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt, wenn X in Y abgeschlossen ist. Wäre $(X, \mathcal{T}_X)$ nicht kompakt, so wäre X auch nicht kompakt in $(Y, \mathcal{T}_Y)$, da die Spurtopiologie auf X gerade $\mathcal{T}_X$ ist. Damit muss der Abschluss von X in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ eine echte Obermenge von X sein und damit $\overline{X}^Y = Y$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Topologie. Angenommen $Y' = X \dot{\cup} \{\infty'\}$ ist ein weiterer Raum, der genau ein Element mehr als X enthält. $\mathcal{T}_{Y'}$ sei eine Topologie auf Y', die den Bedingungen des Satzes genügt. Wir zeigen, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ homöomorph zu $(Y', \mathcal{T}_Y')$ ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$f\colon\ (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})\colon\ x \mapsto \begin{cases} x\,, & x \in X\,, \\ \infty'\,, & x = \infty\,. \end{cases}$$

Wegen $\mathcal{T}_Y|_X = \mathcal{T}_{Y'}|_X$ ist die Abbildung $f|_X$ stetig. Weiters ist f bijektiv. Auch $f^{-1}|_X$ ist stetig. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass f an ∞ und f^{-1} an ∞' stetig ist.
Sei $O' \in \mathcal{T}_{Y'}'$ mit $\infty' \in O'$. Dann ist $K' = Y' \setminus O' \subset Y'$ abgeschlossen, also eine kompakte Teilmenge von $(Y', \mathcal{T}_{Y'})$. Weiters gilt natürlich $K' \subset X$. Da $f^{-1}|_X$ stetig ist, ist $f^{-1}(K') \subset X$ kompakt in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und damit abgeschlossen. Also ist

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(Y') \setminus f^{-1}(K') = Y \setminus f^{-1}(K')$$

offen in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und enthält ∞. Somit ist f auch stetig in ∞.
Ist andererseits $O \in \mathcal{T}_Y$ mit $\infty \in O$, dann verwendet man die Stetigkeit von $f|_X$ und erhält auf analoge Weise, dass f^{-1} stetig in ∞' ist. □

Beispiel 1.65

- ◇ Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ (und auch die jedes offenen Intervalls) ist homöomorph zu jeder Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie.

- Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ haben Sie letztes Semester unter dem Namen "Riemannsche Zahlenkugel" kennengelernt. Die Konstruktion funktioniert allgemein wie folgt: Die Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zur Oberfläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung. Oft wird die Einpunktkompaktifizierung nur bis auf Homöomorphie definiert. Dann ist $\mathbb{S}^1$ die Kompaktifizierung eines offenen Intervalls.

1.5 Metrische Räume

Metrische Räume stellen eine Verallgemeinerung von normierten Räumen dar. Anstelle eines Längenbegriffes (der Norm) führt man nur einen Abstandsbegriff ein.

Definition 1.66 (Metrik)
Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man **Metrik** auf X, wenn sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
- $\forall x, y \in X\colon\ d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $\forall x, y, z \in X\colon\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Man nennt (X, d) einen **metrischen Raum**.

Analog zu normierten Räumen definiert man zu positivem Radius $r > 0$ die offenen Bälle durch $B_r(x) := \{y \in X\colon\ d(x, y) < r\}$.

Bemerkung.

- Ein großer Vorteil der Metrik gegenüber der Norm ist, dass man keine zugrundeliegende Vektorraumstruktur auf X benötigt. Insbesondere sind beliebige Teilmengen metrischer Räume mit der Einschränkung der Metrik wieder metrische Räume.
- Eine Metrik erzeugt die Topologie
$$\mathcal{T}_d := \{O \subset X\colon\ \forall x \in O\, \exists r > 0\colon\ B_r(x) \subset O\}$$
auf X. Wir bezeichnen $\mathcal{T}_d$ als die **von der Metrik erzeugte Topologie**.

Beispiel 1.67

- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf X. Die von dieser Metrik erzeugte Topologie stimmt mit der von der Norm erzeugten überein. Metrische Räume sind also eine Verallgemeinerung normierter Räume.

- Folgendes Beispiel zeigt, dass auch auf Vektorräumen Metriken eine echte Verallgemeinerung von Normen sind. Es sei X eine beliebige Menge. Die Abbildung
$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 1 & x \neq y \ , \\ 0 & \text{sonst} \ , \end{cases} \end{aligned}$$
ist eine Metrik auf X. Weil $\forall x \in X\colon \{x\} = B_{1/2}(x)$ offen ist, ist die von ihr erzeugte Topologie die diskrete.
Setzt man insbesondere $X = \mathbb{R}$, so sieht man, dass nicht alle Metriken auf $\mathbb{R}$ die gleiche Topologie erzeugen. Eine andere wäre zum Beispiel die übliche Normtopologie, die durch die Metrik $\tilde{d}(x, y) = \|x - y\|$ erzeugt wird.

Wir betrachten metrische Räume als Spezialfälle topologischer Räume. Metrische Räume besitzen viele angenehme Eigenschaften, die wir schon von normierten Räumen kennen. Wir fassen einige zusammen.

Satz 1.68 (Topologische Eigenschaften metrischer Räume)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(X, \mathcal{T}_d)$ der von der Metrik erzeugte topologische Raum, dann gilt:

- $(X, \mathcal{T}_d)$ ist (A1), denn für $x \in X$ bildet $\mathcal{U}(x) = \{B_{1/k}(x)\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x.
- $(X, \mathcal{T}_d)$ ist normal, insbesondere (T1), (T2) und (T4).
- Eine Teilmenge $K \subset X$ von $(X, \mathcal{T}_d)$ ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist, d. h. wenn jede Folge von Elementen in K eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis. (1) Dass $\mathcal{U}(x)$ eine Basis ist, zeigt man durch Nachprüfen der Bedingungen, vgl. Aufgabe (1.8).

(2) Die Hausdorff–Eigenschaft ist klar, (T4) zeigt man gleich wie für normierte Räume (vgl. Beispiel 1.38). Der Unterschied besteht allein in der Interpretation der Bälle.

(3) Ist aufwändig, funktioniert aber gleich wie für normierte Räume in Analysis 3. Wieder müssen nur die Bälle uminterpretiert werden. □

Da es genügt Stetigkeit von Abbildungen auf Subbasen nachzuprüfen, kann man nach dem ersten Punkt Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen wieder mittels ε–δ Kriterium verifizieren. Weil $(X, \mathcal{T}_d)$ ein (A1)-Raum ist, ist Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Der Abstandsbegriff erlaubt es außerdem Cauchy-Folgen zu definieren und von Vollständigkeit zu sprechen. Für stetige Abbildungen gibt der Abstandsbegriff die Möglichkeit zwischen Stetigkeit, gleichmäßiger Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit zu unterscheiden. Damit ist es in metrischen Räumen auch möglich, Sätze für geeignete Teilmengen der stetigen Funktionen zu formulieren. Als Beispiele seien nur der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz von Arzelà–Ascoli erwähnt.

Aufgaben

(1.1) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} := \{O \subset \mathbb{N} \colon \mathbb{N} \setminus O \text{ ist endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

eine Topologie auf $\mathbb{N}$ ist. Geben Sie eine Menge an, die weder abgeschlossen noch offen ist. Ist $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ ein Hausdoff–Raum? Konvergiert die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ und wenn ja wogegen?

(1.2) Beweisen Sie Lemma 1.14.

(1.3) Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, wenn es keine Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Mengen gibt. Genauer:

A zusammenhängend $:\Longleftrightarrow$
$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : A \subset O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ gilt $A \cap O_1 = \varnothing$ oder $A \cap O_2 = \varnothing$.

Zeigen Sie, dass das Bild einer zusammenhängender Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist.

(1.4) Zeigen Sie, dass die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ mit der Normtopologie gerade die Intervalle sind.

(1.5) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen die leere Menge und der ganze Raum sind. Finden Sie ein Beispiel eines nicht zusammenhängenden topologischen Raumes.

(1.6) Ist der Raum aus Aufgabe (1.1) ein (A1) oder sogar ein (A2)-Raum?

(1.7) Betrachten Sie die Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es sei $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4\}\}$ ein System von Mengen. Konstruieren Sie die gröbste Topologie auf X, in der alle Mengen aus $\mathcal{S}$ offen sind. Geben Sie eine (möglichst kleine) Basis der Topologie an.

(1.8) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ist Basis von $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X,\ O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \colon \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset O$.

(1.9) Zeigen Sie die Verträglichkeit der Produkttopologie mit der Spurtopologiebildung (Punkt 4 in Beispiel 1.31).

(1.10) Beweisen Sie Satz 1.34.

(1.11) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und Y eine Menge. Charakterisieren Sie alle stetigen Abbildungen von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{P}(Y))$.

(1.12) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ mit der Normtopologie und den daraus entstehenden Produktraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Produkttopologie. Interpretieren Sie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ als den Raum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Eine Folge in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Produkttopologie ist genau dann konvergent, wenn die Funktionenfolge punktweise konvergiert.

(1.13) Betrachten Sie die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0\,, & x \leq 0\,, \\ x+1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Was ist die Initialtopologie auf dem Definitionsbereich, wenn man den Wertebereich mit der Normtopologie ausstattet? Was ergibt sich umgekehrt als Finaltopologie auf dem Bildbereich, wenn man den Definitionsbereich mit der Normtopologie ausstattet?

(1.14) Beweisen Sie die Aussage aus BEISPIEL 1.36.

(1.15) Beweisen Sie die Aussage aus BEISPIEL 1.38.

(1.16) TRENNUNGSAXIOM (T1): Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man sagt $(X,\mathcal{T})$ erfüllt das erste Trennungsaxiom, wenn es zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ offene Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ gibt mit $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ und $x_1 \notin O_2$, $x_2 \notin O_1$.
Zeigen Sie: $(X,\mathcal{T})$ ist (T1)$\Leftrightarrow \forall x \in X : \{x\}$ ist abgeschlossen

(1.17) Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $U \subset X$ beliebig. Eine Menge $V \subset X$ heißt Umgebung der Menge U, wenn sie Umgebung aller Elemente aus U ist. Zeigen Sie: $(X,\mathcal{T})$ ist (T1)$\Leftrightarrow$ jede Teilmenge von X ist Durchschnitt aller ihrer Umgebungen

(1.18) Finden Sie ein Beispiel eines (T4)-Raumes, in dem nicht alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind. Hinweis: Ein Raum mit 4 Elementen reicht aus.

(1.19) Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein Hausdorff–Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie, dass $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ ein Hausdorff–Raum ist. Zeigen Sie weiters: Ist $(X,\mathcal{T})$ (T4) und Y abgeschlossen, so ist $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ auch (T4).

(1.20) Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein (A1)–Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Weiters sei $a \in X$ ein Häufungspunkt der Folge. Zeigen Sie, dass es dann eine Teilfolge gibt, die gegen a konvergiert.

(1.21) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann quasikompakt ist, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft hat, d. h.

$$(A_i)_{i \in I} \text{ abgeschlossenen Mengen mit } \cap_{i \in I} A_i = \varnothing \Rightarrow \exists i_1, ..., i_k \in I : \cap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \varnothing .$$

(1.22) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass sich kompakte und einpunktige Mengen trennen lassen, also:

$$K \subset X \text{ kompakt}, \; x \in X \setminus K \Rightarrow \exists\, O_1, O_2 \in \mathcal{T}, \, O_1 \cap O_2 = \varnothing \colon \; x \in O_1, \, K \subset O_2 .$$

(1.23) Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein kompakter topologischer Raum und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie: Eine stetige bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist automatisch ein Homöomorphismus.

(1.24) Beweisen Sie Satz 1.46.

(1.25) Beweisen Sie Satz 1.52.

(1.26) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von X, die Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Menge ist, mit der Spurtopologie ein lokalkompakter Raum ist.

(1.27) Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Beweisen oder widerlegen Sie: $(\Pi_{i \in I} X_i, \Pi_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ ist genau dann ein (T2) Raum, wenn alle $(X_i, \mathcal{T}_i)$ (T2) sind.

(1.28) Betrachten Sie $[-1, 1]$ mit der üblichen Topologie und die Menge $\mathcal{M}$ aller streng monoton wachsenden Folgen in $\mathbb{N}$. Weiters sei $X = [-1, 1]^{\mathbb{M}}$ versehen mit Produkttopologie $\mathcal{T}_X$. Dann ist $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt. Zeigen Sie, dass die Folge

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n(\mu)_{\mu \in \mathbb{M}})_{n=1}^{\infty} \text{ mit } x_n(\mu) = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = \mu(k) \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

keine konvergente Teilfolge besitzt.
Zusatzaufgabe: Können Sie ein konvergentes Teilnetz finden? (Ich suche noch...)

(1.29) Es Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum und $K \subset X$ kompakt.
Zeigen Sie, dass es $O \in \mathcal{T}$ und L kompakt gibt mit $K \subset O \subset L$.

(1.30) Sorgenfrey-Gerade: Betrachten Sie $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ jene Topologie ist, die vom Mengensystem $\mathcal{B} = \{[a, b[\colon \; a, b \in \mathbb{R}, \, a < b\}$ erzeugt wird. $\mathcal{B}$ ist stabil unter Durchschnitten und damit bereits eine Basis der Topologie. Zeigen Sie:

- ⋄ $\mathcal{T}$ ist feiner als die Normtopologie auf $\mathbb{R}$.
- ⋄ $\mathbb{Q}$ ist dicht in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, nennt man $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ auch separabel.

- ⋄ Jeder Punkt in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
- ⋄ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht.

(1.31) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey–Topologie ein normaler Raum ist.

(1.32) Betrachten sie wieder die Sorgenfrey–Gerade $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in $(X, \mathcal{T}_X) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ liegt, dass die Teilmenge $A := \{(x, -x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_X)$ ist und die induzierte Topologie $T_X|_A$ gerade die diskrete Topologie auf A ist. Schließen Sie, dass Teilmengen separabler Räume nicht separabel sein müssen.

(1.33) Betrachten Sie $]-1,1[$ mit der von der Norm in $\mathbb{R}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Zeigen Sie, dass die Alexandroff–Kompaktifizierung von $(]-1,1[, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$ homöomorph zur Kreislinie $\mathbb{S}^1$ mit der von der Norm in $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie ist.

(1.34) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{d} : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

eine Metrik auf X ist. Es gilt $\forall x, y \in X : \tilde{d}(x, y) < 1$.

(1.35) In der Situation von vorheriger Aufgabe sei $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = \|x - y\|$.
Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ und d die gleiche Topologie erzeugen.
Zeigen Sie, dass Cauchy-Folgen in $(\mathbb{R}, d)$ auch Cauchy-Folgen in $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ sind.

(1.36) Es seien $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \Pi_{i=1}^{\infty} X_i &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) = ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

eine Metrik auf $\Pi_{i=1}^{\infty} X_i$ ist, welche die Produkttopologie (der von den Metiken in den Komponenten erzeugten Topologien) erzeugt.

(1.37) Betrachten Sie die Menge $X = [0, \infty[$. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} d \colon\ X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \left| \frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y} \right| \end{aligned}$$

eine Metrik auf X gegeben ist.

(1.38) In der Situation der letzten Aufgabe: Zeigen Sie, dass die von der Metrik d erzeugt Topologie auf X mit der von der Normtopologie induzierten übereinstimmt. Finden Sie eine Cauchy-Folge bezüglich d, die nicht konvergent in X ist.

Kapitel 2
Grundlagen der Funktionalanalysis

2.1 Normierte Räume

Im Folgenden werden wir stets $\mathbb{K}$-Vektorräume betrachten, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 2.1 (Banachraum)
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum versehen mit der Norm $\|\cdot\|$. Dann wird der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ **Banachraum** genannt, wenn $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist, d. h. falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel 2.2 Für jedes $d \in \mathbb{N}$ und alle $p \in [1, \infty]$ ist $\left(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p\right)$ ein Banachraum. $\diamond$

Beispiel 2.3 Es sei T eine Menge und

$$\ell^\infty(T) = \ell^\infty(T;\mathbb{K}) = \{x\colon\ T \to \mathbb{K} \text{ beschränkt}\}\ .$$

Für $x \in \ell^\infty(T)$ setze

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in T} |x(t)|\,.$$

Man nennt $\|\cdot\|_\infty$ **Supremumsnorm**. Wir zeigen, dass $(\ell^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

(1) Offensichtlich ist $\ell^\infty(T)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(2) $\|\cdot\|_\infty$ ist Norm auf $\ell^\infty(T)$:

(N1) $\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow x = 0$ ✓

(N2) $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}\,\forall\,x \in \ell^\infty(T)\colon\ \|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$ ✓

(N3) Es seien $x, y \in \ell^\infty$ und $t_0 \in T$. Dann ist

$$|x(t_0) + y(t_0)| \le |x(t_0)| + |y(t_0)| \le \sup_{t\in T}|x(t)| + \sup_{t\in T}|x(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

und somit $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. ✓

(3) Es bleibt zu zeigen, dass $(\ell^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist. Dazu sei $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \ell^\infty(T)$ eine Cauchy-Folge. Zu zeigen ist dann, dass

$$\exists\,x \in \ell^\infty(T)\colon\ \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0\,.$$

Da für jedes $y \in \ell^\infty(T)$ und alle $t \in T$ gilt, dass $|y(t)| \leq \|y\|_\infty$, ist aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ für jedes feste $t \in T$ die Folge $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$ eine Cauchy-Folge. Wir definieren nun die Funktion

$$x\colon T \to \mathbb{K}\colon t \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

und zeigen, dass $x \in \ell^\infty(T)$ und $x_n \to x$ für $n \to \infty$ bezüglich der Supremumsnorm. Wähle zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n, m \geq N\colon\ \|x_n - x_m\|_\infty \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sei nun $t \in T$ fest. Dann existiert ein $M = M(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ mit $M \geq N$, sodass

$$|x_M(t) - x(t)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x_M(t)| + |x_M(t) - x(t)| \leq \|x_n - x_M\|_\infty + \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,.$$

Folglich ist

$$|x(t)| \leq |x_N(t)| + |x(t) - x_N(t)| \leq \|x_N\|_\infty + \varepsilon$$

und somit $x \in \ell^\infty(T)$. Beachte, dass die Schranke $\|x_N\|_\infty + \varepsilon$ nicht von $t \in T$ abhängt. Außerdem folgt

$$\forall\, n \geq \mathbb{N}\colon\ \|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$$

und damit die Vollständigkeit von $\ell^\infty(T)$. ◇

LEMMA 2.4

(1) Ist X ein Banachraum und U ein abgeschlossener Untervektorraum von X, so ist U vollständig.

(2) Ist X ein normierter Raum und U ein vollständiger Untervektorraum von X, so ist U abgeschlossen.

Beweis. (1) Sei $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von X folgt die Existenz von $x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da U abgeschlossen ist, gilt $x \in U$.

(2) Es sei $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Zu zeigen ist, dass $x \in U$. Eine konvergente Folge ist insbesondere eine Cauchy-Folge und daher ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in U. Aufgrund der Vollständigkeit von U besitzt somit $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ einen Grenzwert in U. □

Beispiel 2.5

- Sei $(T,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir betrachten den $\mathbb{K}$-Vektorraum
$$\mathcal{C}_b(T) = \{x\colon\ T \to \mathbb{K} \text{ stetig und beschränkt}\}$$
und werden zeigen, dass $(\mathcal{C}_b(T), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Da $\mathcal{C}_b(T)$ ein Untervektorraum von $\ell^\infty(T)$ ist, genügt es nach Lemma 2.4 nachzuweisen, dass $\mathcal{C}_b(T)$ abgeschlossen in $\ell^\infty(T)$ ist. Dies folgt jedoch aus der Tatsache, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist.

- Ist $(T,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Raum, so ist $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}_b(T)$.

- Von besonderem Interesse ist auch der Raum
$$\mathcal{C}_0(T) = \big\{x\colon T \to \mathbb{K} \text{ stetig; } \forall\,\varepsilon > 0\colon\ \{t \in T\colon\ |x(t)| \geq \varepsilon\} \text{ ist kompakt}\big\}$$
wobei $(T,\mathcal{T})$ einen lokalkompakten topologischen Raum bezeichne. Es handelt sich bei $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ um einen Banachraum, da $\mathcal{C}_0$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{C}_b(T)$ ist.

- Es bezeichne $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum
$$H^\infty = \{x\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ holomorph und beschränkt}\}\ ,$$
welcher ein Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{D})$ ist. Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz ist der gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen auf $\mathbb{D}$ ebenfalls holomorph und daher H^∞ abgeschlossen in $(\ell^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$. Folglich handelt es sich bei $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ um einen Banachraum.

- Für $a < b$ betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{C}^1([a,b])$. Dieser ist zwar ein Untervektorraum von $\mathcal{C}([a,b])$, jedoch nicht abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Wähle beispielsweise $a = -1, b = 1$ und betrachte die durch
$$x_n(t) = \sqrt{t^2 + \tfrac{1}{n}}$$
definierte Folge. Nach Lemma 2.4 ist also $\big(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ kein Banachraum. Für $x \in \mathcal{C}^1([a,b])$ definieren wir durch
$$\|x\| = \max\big\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\big\} \qquad \text{und} \qquad |||x||| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$$
zwei Normen auf $\mathcal{C}^1([a,b])$. Diese Normen sind äquivalent, denn
$$\forall\, x \in \mathcal{C}^1([a,b])\colon\ \|x\| \leq |||x||| \leq 2\|x\|\,.$$

Die Vollständigkeit von $\mathcal{C}^1([a,b])$ versehen mit $\|\cdot\|$ oder $|||\cdot|||$ folgt direkt aus einem bekannten Satz der Analysis. Analog gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass $\mathcal{C}^k([a,b])$ mit der durch

$$|||x||| = \sum_{i=1}^{k} \left\| x^{(i)} \right\|_\infty$$

definierten Norm ein Banachraum ist. Allgemeiner gilt für eine offene und beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}), |||\cdot||| \right)$$

ein Banachraum ist, wobei die Norm $|||\cdot|||$ durch

$$|||x||| = \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha x\|_\infty$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ den Raum der k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf Ω, deren Ableitungen bis zur k-ten Ordnung sich stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. $\diamond$

Beispiel 2.6 Wir betrachten die Folgenräume

$$\begin{aligned}
&d = \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \colon\ t_n = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \right\}, \\
&c_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{N}) = \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \colon\ \lim_{n\to\infty} t_n = 0 \right\}, \\
&c = \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \text{ konvergiert} \right\}, \\
&\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \text{ beschränkt} \right\}
\end{aligned}$$

jeweils versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Es handelt sich um Vektorräume, für welche

$$d \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$$

gilt. Wir zeigen nun, dass c und c_0 in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen sind, jedoch nicht d.

(1) *c ist abgeschlossen in $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$*: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset c$ mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty$ für ein $x \in \ell^\infty$. Wir müssen zeigen, dass $x \in c$, und verwenden dazu die Notation

$$x_n = \{x_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}, \quad x = \{x(m)\}_{m\in\mathbb{N}}, \quad x_n^\infty = \lim_{m\to\infty} x_n(m).$$

Für $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$ ist

$$\left| \lim_{n\to\infty} t_n \right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n| = \|\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$$

und daher $\{x_n^\infty\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Der Grenzwert $x^\infty = \lim_{n\to\infty} x_n^\infty$ existiert somit. Wir zeigen nun, dass $\lim_{m\to\infty} x(m) = x^\infty$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_N - x\|_\infty \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |x_N^\infty - x^\infty| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

Wir wählen $M \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, m \geq M\colon\ |x_N(m) - x_N^\infty| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

Für $m \geq M$ gilt dann

$$\begin{aligned}|x(m) - x^\infty| &\leq |x(m) - x_N(m)| + |x_N(m) - x_N^\infty| + |x_N^\infty - x^\infty| \\ &\leq \|x_N - x\|_\infty + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon\,.\end{aligned}$$

(2) c_0 *ist abgeschlossen in* $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$: Analog zu $\mathbb{C}_0$.

(3) d *ist nicht abgeschlossen in* $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$: Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$x_n = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right\} \quad \text{und} \quad x = \left\{\tfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Dann ist $x_n \in d$ und $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, jedoch $x \notin d$.

Die Räume $(c, \|\cdot\|_\infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sind also Banachräume, $(d, \|\cdot\|_\infty)$ ist jedoch kein Banachraum. ◇

Beispiel 2.7 (Die Folgenräume ℓ^p)
Für $1 \leq p < \infty$ betrachten wir

$$\ell^p = \left\{ x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}\colon\ \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty \right\}$$

und setzen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

für $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Wir zeigen, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist.

(1) ℓ^p *ist ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum*: Wir zeigen lediglich, dass für $x, y \in \ell^p$ auch $x + y \in \ell^p$. Dies folgt aus

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |x(n) - y(n)|^p \leq 2^p \sum_{n=1}^\infty \max\left\{|x(n)|^p, |y(n)|^p\right\} \leq 2^p \left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)\,.$$

(2) $\|\cdot\|_p$ *ist Norm auf* ℓ^p: Lediglich die Dreiecksungleichung ist nicht offensichtlich. Diese ist als Minkowski-Ungleichung bekannt.

(3) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *ist vollständig*: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ eine Cauchy-Folge. Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist $\{x_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Setze $x = \{\lim_{n\to\infty} x_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $x \in \ell^p$ und $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n, n' \geq N\colon\ \|x_n - x_{n'}\|_p \leq \varepsilon\,.$$

Für $M \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\forall\, n, n' \geq N\colon\ \left(\sum_{m=1}^{M} |x_n(m) - x_{n'}(m)|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n - x_{n'}\|_p \leq \varepsilon\,.$$

Durch Bilden des Grenzwertes $n' \to \infty$ erhalten wir

$$\forall\, M \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\colon\ \left(\sum_{m=1}^{M} |x_n(m) - x(m)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

und folglich

$$\forall\, n \geq N\colon\ \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_n(m) - x(m)|^p\right)^{1/p} = \|x_n - x\|_p \leq \varepsilon\,.$$

Insbesondere ist $x - x_N \in \ell^p$ und daher $x = (x - x_N) + x_N \in \ell^p$. ◇

Lemma 2.8 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) X ist vollständig.

(2) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, d. h. für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ gilt

$$\exists\, x \in X\colon\ \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \right\| = 0\,.$$

Beweis. Aufgabe (2.4). □

Definition 2.9 (Topologischer Vektorraum)
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$. Dann nennt man X einen **topologischen Vektorraum**, wenn

(1) die Addition $X \times X \to X \colon (x,y) \mapsto x + y$,

(2) die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times X \to X \colon\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

stetig sind.

Der nachfolgende Satz besagt insbesondere, dass jeder normierter Raum ein topologischer Vektorraum ist.

Satz 2.10 Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ Folgen mit $x_n \to x \in X$ und $y_n \to y \in X$ sowie $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{K}$ für $n \to \infty$. Dann gilt für $n \to \infty$:

(1) $x_n + y_n \to x + y$

(2) $\lambda_n x_n \to \lambda x$

(3) $\|x_n\| \to \|x\|$

Beweis. Der Beweis verbleibt als einfache Übung. □

Korollar 2.11 Ist U ein Untervektorraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, so ist auch $\overline{U}$ ein Untervektorraum von X.

Beweis. Es seien $x, y \in \overline{U}$. Dann existieren konvergente Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Da es sich bei U um einen Untervektorraum handelt, gilt $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$. Nun ist $x_n + y_n \to x + y$ für $n \to \infty$ und daher $x + y \in \overline{U}$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $n \to \infty$ gilt offensichtlich $U \ni \lambda x_n \to \lambda x$ und somit $\lambda x \in \overline{U}$. □

Satz 2.12 In einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis. Analysis 2. □

Lemma 2.13 (Rieszsches Lemma)
Es sei U ein abgeschlossener Untervektorraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ mit $U \neq X$. Dann gilt:

$$\forall\, \delta \in (0,1)\, \exists\, x_\delta \in X \text{ mit } \|x_\delta\| = 1\, \forall\, u \in U \colon\ \|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$$

Beweis. Sei $x \in X \setminus U$. Aus der Abgeschlossenheit von U folgt

$$d = \inf\{\|x - u\| \colon\ u \in U\} > 0\,.$$

Folglich ist $d < \frac{d}{1-\delta}$ und es existiert ein $u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Setze $x_\delta = \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}$. Für $u \in U$ ist nun

$$\|x_\delta - u\| = \frac{1}{\|x - u_\delta\|}\, \|x - (u_\delta + \|x - u_\delta\| u)\| \geq \frac{d}{\|x - u_\delta\|} > 1 - \delta\,. \qquad \square$$

In einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ bezeichne im Weiteren stets

$$B_X = \{x \in X\colon \|x\| \le 1\} \quad \text{bzw.} \quad S_X = \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$$

die **Einheitskugel** bzw. die **Einheitssphäre** in X.

Satz 2.14 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\dim X < \infty$.

(2) B_X ist kompakt.

(3) Jede beschränke Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sind klar, wir zeigen lediglich $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$. Angenommen, $\dim X = \infty$. Sei $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$. Setze $U_1 = \operatorname{lin}\{x_1\}$, dann ist U_1 endlichdimensional und somit abgeschlossen. Anwendung des Rieszschen Lemmas mit $\delta = 1/2$ liefert die Existenz eines $x_2 \in X$ mit $\|x_2\| = 1$ und $\|x_2 - x_1\| \ge 1/2$. Nun betrachten wir den Untervektorraum $\operatorname{lin}\{x_1, x_2\}$ und wenden das Rieszsche Lemma erneut an, um $x_3 \in X$ mit $\|x_3\| = 1$, $\|x_3 - x_1\| \ge 1/2$ und $\|x_3 - x_2\| \ge 1/2$ zu erhalten. Daraufhin betrachte man den Untervektorraum $U_3 = \operatorname{lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ und so weiter und so fort. Dieses Vorgehen liefert induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \ge 1/2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, welche keine konvergente Teilfolge besitzt. □

Definition 2.15 (Separabilität)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A} = X$ gibt.

Lemma 2.16 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) X ist separabel.

(2) Es gibt eine abzählbare Menge A mit $X = \overline{\operatorname{lin} A}$.

Beweis. Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar, wir zeigen die Umkehrung. Zuerst betrachten wir den Fall, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und setzen B gleich der $\mathbb{Q}$-linearen Hülle von A, also

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\colon\ n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}, x_i \in A \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Wir zeigen $\overline{B} = X$, also

$$\forall\, x \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, y \in B\colon\ \|x - y\| < \varepsilon\,.$$

Zu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir $y_0 \in \operatorname{lin} A$, sodass $\|x - y_0\| \le \varepsilon/2$. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in A$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Für $i = 1, \ldots, n$ wähle nun $\lambda_i' \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\lambda_i - \lambda_i'| \le \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|}\,.$$

Dann ist $y := \sum_{i=1}^n \lambda_i' x_i \in B$ und es gilt

$$\|x - y\| \le \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i - \lambda_i'| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \le \varepsilon\,.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ verwende $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ anstelle von $\mathbb{Q}$. □

Lemma 2.17
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) X ist separabel.

(2) Die Einheitssphäre $S_X = \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ ist separabel.

Beweis. Der Beweis ist eine Übung. Es sei bemerkt, dass in allgemeinen topologischen Räumen auch abgeschlossene Teilmengen von separablen Mengen nicht separabel sein müssen, vgl. Aufgabe (1.32). □

Beispiel 2.18

- Wir zeigen die Separabilität von $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty)$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne e_n den n-ten Einheitsvektor. Setze $A = \{e_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\ell^p = \overline{\operatorname{lin} A} = \overline{d}$, denn für $x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ gilt

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n x(i) e_i \right\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^\infty |x(i)|^p \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

- Analog zeigt man die Separabilität von $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

- $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ ist nicht separabel. Wir betrachten für $M \subset \mathbb{N}$ die Folge

$$\chi_M = \{\chi_M(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty\,.$$

Dann ist $\chi = \{\chi_M\colon\ M \subset \mathbb{N}\}$ überabzählbar und für $M \neq M'$ gilt $\|\chi_M - \chi_{M'}\|_\infty = 1$. Sei nun $A \subset \ell^\infty$ abzählbar. Für jedes $x \in A$ enthält die Menge $\{y \in \ell^\infty\colon\ \|x - y\| \le 1/4\}$ aufgrund der Dreiecksungleichung höchstens ein Element $y \in \chi$. Somit kann A nicht dicht liegen. ◇

2.2 Funktionale und Operatoren

In diesem Abschnitt widmen wir uns nun linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen. Im Weiteren seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ stets zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Definition 2.19 (Operator und Funktional)
Eine Abbildung zwischen X und Y nennt man auch einen **Operator**. Man bezeichnet eine Abbildung von X nach $\mathbb{K}$ als **Funktional**.

Für die Anwendung eines linearen Operators $T\colon X \to Y$ auf ein Element $x \in X$ ist auch die Schreibweise Tx anstelle von $T(x)$ gebräuchlich.

Satz 2.20 (Stetigkeit eines linearen Operators)
Es sei $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) T ist stetig.

(2) T ist stetig in 0.

(3) T ist gleichmäßig stetig.

(4) T ist Lipschitz-stetig.

(5) $\exists\, M \geq 0\, \forall\, x \in X\colon\ \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$

Beweis. Klarerweise gilt $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ und $(4) \Leftrightarrow (5)$. Wir zeigen $\neg(5) \Rightarrow \neg(2)$, wir nehmen also an, dass (5) nicht erfüllt wäre. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|Tx_n\| > \|x_n\|$. Setze nun

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}\,.$$

Dann gilt $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, jedoch

$$\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > 1\,.$$

Bei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ handelt es sich also um eine Nullfolge mit $Ty_n \not\longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Damit ist $\neg(2)$ gezeigt. $\square$

Definition 2.21 (Operatornorm)
Es sei $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt

$$\|T\| = \|T\|_{Y\leftarrow X} = \inf\{M \geq 0\colon\ \forall\, x \in X\colon\ \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\}$$

die **Operatornorm** von T.

Bemerkung.

- T ist stetig $\iff \|T\| < \infty$
- $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$
- Für stetiges T gilt für alle $x \in X$, dass $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$.
- Ist T stetig, so ist $T(B_X) = T\left(\{x \in X \colon \|x\|_X \leq 1\}\right)$ beschränkt. Somit ist das Bild jeder beschränkten Menge beschränkt und man spricht daher von einem **beschränkten Operator**.

Wir betrachten nun den Raum

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T \colon X \to Y \text{ linear und stetig}\} .$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um einen Vektorraum. Wir setzen des Weiteren $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$.

Satz 2.22

(1) Die Operatornorm $\| \cdot \|_{X \leftarrow Y}$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$.

(2) Ist Y vollständig, so auch $(\mathcal{L}(X, Y), \| \cdot \|_{X \leftarrow Y})$.

Beweis. Die definierenden Eigenschaften einer Norm für die Operatornorm nachzuweisen verbleibt als Übung. Wir widmen uns dem Beweis der zweiten Aussage. Es sei also Y vollständig. Ist $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Cauchy-Folge, dann ist für jedes $x \in X$ auch $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ eine Cauchy-Folge. Setze $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$. Die dadurch definierte Abbildung $T \colon X \to Y$ ist offensichtlich linear, es bleibt die Stetigkeit und $\|T_n - T\| \to 0$ zu zeigen. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, m, n \geq N \colon \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon .$$

Für $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ wähle $M = M(\varepsilon, x) \geq N$ mit

$$\|T_M x - Tx\| \leq \varepsilon .$$

Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_M x\| + \|T_M x - Tx\| \leq \|T_n - T_M\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

und daher gilt $\|T_n - T\| \leq 2\varepsilon$, woraus wir $\|T\| < \infty$ und $\|T_n - T\| \to 0$ erhalten. □

Bemerkung. Die Konvergenz $T_n \to T$ bezüglich $\| \cdot \|_{X \leftarrow Y}$ äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz $T_n x \to Tx$ auf B_X.

Satz 2.23 Es sei D ein dichter Unterraum von des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum sowie $T \in \mathcal{L}(D, Y)$. Dann existiert genau ein $\hat{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\hat{T}\big|_D = T$ und zusätzlich gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

Beweis. Es sei $x \in X$ und $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge und damit auch $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$. Wir setzen $\widehat{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Offenbar ist dann $\widehat{T}$ eine lineare und stetige Fortsetzung von T auf X. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, da ein Banachraum hausdorffsch ist und somit Grenzwerte eindeutig sind. □

Lemma 2.24 Es seien X, Y, Z normierte Räume sowie $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Dann ist $TS \in \mathcal{L}(X, Z)$ und

$$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Beweis. Die Linearität zeigt man durch simples Nachrechnen, die Stetigkeit folgt aus

$$\forall\, x \in X\colon\ \|T(Sx)\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$$

und damit außerdem $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. □

Definition 2.25 (Isomorphismus)
Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und T^{-1} stetig ist. Gilt $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$, dann nennt man T **isometrisch**. Existiert zwischen X und Y ein (isometrischer) Isomorphismus, so heißen X und Y **(isometrisch) isomorph**. Sind X und Y isomorph, so schreiben wir $X \simeq Y$.

Beispiel 2.26 Es ist $(c, \|\cdot\|_\infty) \simeq (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, denn der Operator

$$\begin{aligned} T\colon\ & c \to c_0 \\ & \{x_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \{y_n\}_{n=1}^\infty\,, \end{aligned}$$

wobei

$$y_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n\,, & n = 1\,, \\ x_{n-1} - \lim_{n\to\infty} x_n\,, & n \geq 2\,, \end{cases}$$

ist linear, stetig und bijektiv. Die Inverse ist durch

$$\begin{aligned} T^{-1}\colon\ & c_0 \to c \\ & \{y_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \{y_{n+1} + y_n\}_{n=1}^\infty\,, \end{aligned}$$

gegeben. ◇

Bemerkung. Es sei $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator.

- $\diamond$ Ist T bijektiv, so ist auch T^{-1} linear.
- $\diamond$ T ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$T \text{ surjektiv ist} \quad \text{und} \quad \exists\, m, M \geq 0\, \forall\, x \in x\colon\; m\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\,.$$

Satz 2.27 Es sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergiere in $\mathcal{L}(X)$. Dann ist $\mathrm{id} - T$ invertierbar und

$$(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n\,. \qquad \text{(\textit{Neumann-Reihe})}$$

Ist insbesondere X ein Banachraum und $\|T\| < 1$, so gilt außerdem

$$\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}\,.$$

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ setze $S_m = \sum_{n=0}^{m} T^n$. Dann ist

$$(\mathrm{id} - T)S_m = S_m(\mathrm{id} - T) = \mathrm{id} - T^{m+1}\,.$$

Die Reihenglieder einer absolut konvergenten Reihe bilden in einem normierten Raum eine Nullfolge. Außerdem sind für festes R die Abbildungen $S \mapsto RS$ und $S \mapsto SR$ stetig auf $\mathcal{L}(X)$. Damit folgt

$$\mathrm{id} = \lim_{m\to\infty} (\mathrm{id} - T^{m+1}) = \lim_{m\to\infty} (\mathrm{id} - T)S_m = (\mathrm{id} - T) \lim_{m\to\infty} S_m$$

und

$$\mathrm{id} = \lim_{m\to\infty} S_m(\mathrm{id} - T)\,. \qquad \square$$

2.3 Dualräume

Im Weiteren bezeichne $(X, \|\cdot\|)$ einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 2.28 (Algebraischer und topologischer Dualraum)

(1) Den Raum der linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit

$$X^* := L(X, \mathbb{K}) = \{T\colon\; X \to \mathbb{K} \text{ linear}\}\,,$$

dieser heißt **algebraischer Dualraum** von X.

(2) Den Raum $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der linearen und stetigen Funktionale nennt man **topologischen Dualraum** von X.

Bemerkung.

- $(X', \|\cdot\|_{\mathbb{K}\leftarrow X})$ ist ein Banachraum.
- Offensichtlich ist $X' \subset X^*$.
- Ist $\dim X < \infty$, so gilt $X' = X^*$.

Beispiel 2.29 Sei $p \in [1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$(\ell^p)' \simeq \ell^q .$$

Wir zeigen die Aussage für $p \in (1, \infty)$, den Fall $p = 1$ beweist man ähnlich. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$T\colon \ \ell^q \to (\ell^p)'\colon \ x \mapsto \left[y \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n) \right] ,$$

wie wir sehen werden, handelt es sich hierbei um einen isometrischen Isomorphismus.

Wohldefiniertheit: Offensichtlich ist T linear und somit folgt die Wohldefiniertheit von T aus der Hölder-Ungleichung, denn für $x \in \ell^q$ und $y \in \ell^p$ ist

$$|(Tx)(y)| \leq \|x\|_q \|y\|_p$$

und somit $Tx \in \ell^p$. Außerdem haben wir damit gezeigt, dass $\|Tx\| \leq \|x\|_q$.

Injektivität: Aus $Tx = 0$ folgt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \ x(n) = (Tx)(e_n) = 0$$

und damit $x = 0$.

Surjektivität und Stetigkeit: Es sei $y' \in (\ell^p)'$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x(n) := y'(e_n)$ und $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Wir zeigen

$$x \in \ell^q , \quad Tx = y' \quad \text{und} \quad \|x\|_q \leq \|y'\| .$$

Dazu definieren wir eine weitere Folge $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ vermöge

$$z(n) = \begin{cases} \frac{|x(n)|^q}{|x(n)|} , & x(n) \neq 0 , \\ 0 , & x(n) = 0 . \end{cases}$$

Für $N \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\sum_{n=1}^{N} |z(n)|^p = \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^q$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^q = \sum_{n=1}^{N} x(n)z(n) = \sum_{n=1}^{N} y'(e_n)z(n) =$$
$$= y'\left(\sum_{n=1}^{N} z(n)e_n\right) \leq \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N} |z(n)|^p\right)^{1/p} = \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^q\right)^{1/p} .$$

Hieraus folgt, dass $x \in \ell^q$ und $\|x\|_q \leq \|y'\|$. Sowohl Tx als auch y' sind linear und stetig, diese stimmen offenbar auf d überein, somit auch auf $\overline{d} = \ell^p$, womit der Beweis der Aussage vollendet ist. ◇

Bemerkung. Analog zu obigem Beispiel zeigt man, dass für $p \in [1, \infty)$, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und einen σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ gilt, dass

$$(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu) .$$

2.4 Der Satz von Hahn-Banach

In diesem Abschnitt widmen wir uns einem grundlegenden Satz der Funktionalanalysis, dem Satz von Hahn-Banach in dreierlei Versionen.

Definition 2.30 (Sublineare Abbildung)
Es sei X ein Vektorraum. Die Abbildung $p\colon X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, wenn

(1) $\forall\, \lambda \geq 0 \,\forall\, x \in X\colon\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$,

(2) $\forall\, x, y \in X\colon\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Beispiel 2.31

(1) Jede Norm ist sublinear.

(2) Lineare Abbildungen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum sind sublinear.

Satz 2.32 (Satz von Hahn-Banach, reelle Version der linearen Algebra)
Es sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von X sowie $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine sublineare und $\ell\colon U \to \mathbb{R}$ lineare Abbildung mit

$$\forall\, x \in U\colon \ell(x) \leq p(x) .$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $L\colon X \to \mathbb{R}$ mit $L|_U = \ell$ und

$$\forall\, x \in X\colon L(x) \leq p(x) .$$

Beweis. Schritt 1: Fortsetzung um eine Dimension: Es sei $X \neq U$ und $u_1 \in X \setminus U$. Setze

$$U_1 = U \oplus \mathbb{R}u_1 \,.$$

Wir zeigen, dass

$$\exists\, L_1 \in U_1^* \colon \;\; L_1|_U = \ell \text{ und } L_1 \leq p|_{U_1} \,.$$

Beachte, dass für jedes $x \in U_1$ gilt, dass

$$\exists!\, u \in U \;\exists!\, \lambda \in \mathbb{R} \colon \; x = u + \lambda u_1 \,.$$

Zu $r \in \mathbb{R}$ definiere $L_r \in U_1^*$ vermöge

$$L_r(x) = L_r(u + \lambda u_1) = \ell(u) + \lambda r$$

für $x = u + \lambda u_1 \in U_1$. Es stellt sich nun die Frage, ob $r \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden kann, dass $L_r \leq p|_{U_1}$. Da

$$L_r \leq p|_{U_1} \iff \forall\, u \in U \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \colon \; L_r(u + \lambda u_1) \leq p(u + \lambda u_1) \,,$$

unterscheiden wir die folgenden drei Fälle.
Fall 1: $\lambda = 0$: Offensichtlich gilt $L_r(u) = \ell(u) \leq p(u)$ für alle $u \in U$.
Fall 2: $\lambda > 0$: In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \forall\, u \in U \colon \; \ell(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda u_1) &\iff \forall\, u \in U \colon \; r \leq p\left(\tfrac{u}{\lambda} + u_1\right) - \ell\left(\tfrac{u}{\lambda}\right) \\ &\iff \forall\, v \in V \colon \; r \leq p(v + u_1) - \ell(v) \,. \end{aligned}$$

Fall 3: $\lambda < 0$: Wir erhalten

$$\begin{aligned} \forall\, u \in U \colon \; \ell(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda u_1) &\iff \forall\, u \in U \colon \; r \geq \ell\left(-\tfrac{u}{\lambda}\right) - p\left(-\tfrac{u}{\lambda} - u_1\right) \\ &\iff \forall\, w \in U \colon \; r \geq \ell(w) - p(w - u_1) \,. \end{aligned}$$

Diese drei Fälle zusammengefasst liefern

$$L_r \leq p|_{U_1} \iff \forall\, v, w \in U \colon \; \ell(w) - p(w - u_1) \leq r \leq p(v + u_1) - \ell(v) \,.$$

So ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, falls

$$\forall\, v, w \in U \colon \; \ell(w) + \ell(v) \leq p(v + u_1) + p(w - u_1) \,.$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} \forall\, v, w \in U \colon \; \ell(w) + \ell(v) \leq \ell(v + w) \leq p(v + w) &= \\ = p(v + u_1 + w - u_1) &\leq p(v + u_1) + p(w - u_1) \end{aligned}$$

und damit die Aussage gezeigt.

Schritt 2: Fortsetzung auf X: Betrachte die partiell geordnete Menge $(A, \leq)$ mit

$$A = \{(V, L_V)\colon\ U \leq V \leq X, L_V \in V^*\colon\ L_V \leq p|_V \ \wedge\ L_V|_U = \ell\}$$

und Ordnung

$$(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) :\Longleftrightarrow\ V_1 \leq V_2 \ \wedge\ L_{V_2}|_{V_1} = L_{V_1}\,.$$

Da $(U, \ell) \in A$, ist $A \neq \varnothing$. Es sei nun

$$\{(V_i, L_{V_i})\}_{i \in I} \subset A$$

total geordnet. Wir setzen

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i \quad \text{und} \quad L_V(x) = L_{V_i}(x) \text{ für } x \in V_i\,.$$

Dann ist (V, L_V) eine obere Schranke von $\{(V_i, L_{V_i})\}_{i \in I}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es daher ein maximales Element $(V_0, L_{V_0}) \in A$. Nach dem ersten Beweisschritt ist $V_0 = X$ und somit $L = L_{V_0}$ eine Fortsetzung mit den gewünschten Eigenschaften. □

Um obigen Satz auf komplexe Vektorräume zu erweitern, werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 2.33 Es sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die Abbildung

$$\begin{aligned} j\colon\ \{h\colon\ X \to \mathbb{C} \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\} &\to \{\ell\colon\ X \to \mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\} \\ h &\mapsto \operatorname{Re} h \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, bijektiv und $\mathbb{R}$-linear. Im Fall, dass X normiert ist, gilt $\|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$ für $x' \in X'$.

Beweis. Wohldefiniertheit: Ist $h \in X^*$, so ist offenbar $\operatorname{Re} h$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung und somit j wohldefiniert.

Linearität: Dass es sich bei j um eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung handelt, ist offensichtlich.

Injektivität: Es sei $h \in X^*$. Zu zeigen ist

$$\operatorname{Re} h \Longrightarrow h = 0\,.$$

Aus $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} \mathrm{i} z$ für $z \in \mathbb{C}$ folgt für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$h(x) = \operatorname{Re} h(x) + \mathrm{i} \operatorname{Im} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - \mathrm{i} \operatorname{Re} \mathrm{i} h(x) = \operatorname{Re} h(x) - \mathrm{i} \operatorname{Re} h(\mathrm{i} x) = 0\,.$$

Surjektivität: Es sei $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Wir konstruieren $h \in X^*$ mit $\operatorname{Re} h = \ell$. Für $x \in X$ setze

$$h(x) = \ell(x) - \mathrm{i}\ell(\mathrm{i}x)\,.$$

Offenbar ist $\operatorname{Re} h = \ell$ und h eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Es verbleibt damit lediglich zu zeigen, dass $h(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}h(x)$ für $x \in X$. Nun ist jedoch

$$h(\mathrm{i}x) = \ell(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\ell(-x) = \mathrm{i}\left(\ell(x) - \mathrm{i}\ell(\mathrm{i}x)\right) = \mathrm{i}h(x)\,.$$

X ist normiert: Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum und $x' \in X'$. Für alle $x \in X$ ist dann

$$|\operatorname{Re} x'(x)| \le |x'(x)| \le \|x'\|\|x\|$$

und folglich $\|\operatorname{Re} x'\| \le \|x'\|$, daher ist $\operatorname{Re} x'$ stetig. Wir zeigen, dass auch $\|x'\| \le \|\operatorname{Re} x'\|$ gilt. Sei dazu $x \in X$. Wir wähle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$x'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|x'(x)|\,.$$

Dann ist

$$|x'(x)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x'(x) = x'\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x\right) = \left|\operatorname{Re} x'\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x\right)\right| \le \|\operatorname{Re} x'\|\|x\|$$

und somit $\|x'\| \le \|\operatorname{Re} x'\|$. Damit haben wir gezeigt, dass $\|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$. □

Satz 2.34 (Satz von Hahn-Banach, Komplexe Version der LA)
Es sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von X sowie $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine sublineare und $\ell \in U^*$ mit

$$\operatorname{Re} \ell \le p|_U\ .$$

Dann:

$$\exists\, L \in X^*\colon\ \ L|_U = \ell \wedge \operatorname{Re} \ell \le p\,.$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.32 unter Zuhilfenahme der in Lemma 2.33 definierten Abbildungen j und j^{-1}. □

Wir werden nun die bisherigen algebraischen Aussagen auf die analytische Situation ummünzen.

Satz 2.35 (Satz von Hahn-Banach, analytische Version)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von X. Dann gilt:

$$\forall\, u' \in U'\ \exists\, x' \in X'\colon\ \ x'\big|_{U'} = u' \wedge \|x'\| = \|u'\|$$

Beweis. Fall 1: X ist $\mathbb{R}$-Vektorraum: Für $x \in X$ setzen wir $p(x) = \|u'\|\|x\|$. Nach Satz 2.32 existiert ein $x' \in X^*$ mit $x'|_U = u'$ und $x' \leq p$. Aus $x'(x-) \leq p(-x) = p(x)$ erhalten wir $\|x'\| \leq \|u'\|$. Außerdem ist

$$\|u'\| = \sup_{u \in B_U} |u'(u)| = \sup_{u \in B_U} |x'(u)| \leq \sup_{x \in B_X} |x'(x)| = \|x'\|$$

und somit $\|u'\| = \|x'\|$.

Fall 2: X ist $\mathbb{C}$-Vektorraum: Analog zum ersten Fall, finde man nach Satz 2.34 ein $x' \in X^*$ mit $x'|_U = u'$ und $\|\operatorname{Re} x'\| = \|u'\|$. Nun ist jedoch $\|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$ und damit die Aussage gezeigt. □

Korollar 2.36 (Existenz nicht-trivialer Funktionale)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

$$\forall\, x \in X \setminus \{0\}\, \exists\, x' \in X' \colon\ \|x'\| = 1 \,\wedge\, x'(x) = \|x\|\,.$$

Speziell:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \text{ mit } x_1 \neq x_2\, \exists\, x' \in X' \colon\ x'(x_1) \neq x'(x_2)$$

Beweis. Wir wählen $U = \operatorname{lin}\{x\}$ und setzen

$$u' \colon U \to \mathbb{K} \colon\ \lambda x \mapsto \lambda \|x\|$$

zu $x' \in X'$ mit $\|x'\| = \|u'\|$ fort. Für den Zusatz betrachte man $x = x_1 - x_2$. □

Korollar 2.37 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Weiters sei $x \in X \setminus U$. Dann gilt

$$\exists\, x' \in X' \colon\ x'\big|_U = 0 \,\wedge\, x'(x) \neq 0\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Quotientenabbildung

$$\omega \colon X \to X/U \colon x \to [x]\,.$$

Man beachte, dass die Abgeschlossenheit von U äquivalent zur Stetigkeit von ω ist. Es ist $\omega(x) \neq 0$ und $\omega|_U = 0$. Man finde nun ein $\ell \in (X/U)'$ mit $\ell(\omega(x)) \neq 0$ und setze schließlich $x' = \ell \circ \omega$. □

Definition 2.38 (Totale Menge)
Es sei X ein topologischer Vektorraum und $M \subset X$. Die Menge M heißt **total** in X. falls $\overline{\operatorname{lin} M} = X$.

Beispiel 2.39

(1) In $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist $M = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nach dem Weierstrassschen Approximationssatz eine totale Menge.

(2) In $(L^2(0,2\pi), \|\cdot\|_2)$ ist $M = \{\mathrm{e}^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ eine totale Menge. Dies bedeutet, dass jede L^2-Funktionen als Fourierreihe dargestellt werden kann.

Satz 2.40 (Charakterisierung totaler Mengen)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset X$. Dann gilt

$$M \text{ total in } X \iff \forall x' \in X' : \big(x'|_M = 0 \Rightarrow x' = 0\big)$$

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei $x' \in X'$ mit $x'|_M = 0$. Dann folgt aus der Linearität von x', dass auch $x'|_{\operatorname{lin} M} = 0$. Sei $x \in X$, dann wählen wir zu $\varepsilon > 0$ beliebig ein $u \in \operatorname{lin} M$ mit $\|x - u\| < \varepsilon$. Damit gilt

$$|x'(x)| = |x'(x) - x'(u)| = |x'(x-u)| \le \|x'\|\|x-u\| < \varepsilon\|x'\|,$$

also ist $x' = 0$.

„ $\Leftarrow$ “: Indirekt: Angenommen $\overline{\operatorname{lin} M} \neq X$, dann gibt es nach Korollar 2.36 ein $x' \in X'$ mit $x'|_M = 0 : x' \neq 0$. □

Satz 2.41 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, so gilt

$$X' \text{ separabel} \implies X \text{ separabel.}$$

Beweis. Ist X' separabel, so ist nach Lemma 2.17 auch $S_{X'} = \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$ separabel. Sei etwa $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $S_{X'}$. Zu $n \in \mathbb{N}$ können wir dann wegen $\|x'_n\| = 1$ ein $x_n \in S_X$ wählen, sodass $|x'_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}$ ist. Wir setzen $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen mittels Satz 2.40 indirekt, dass M total ist. Daraus folgt dann nach Lemma 2.16, dass X separabel ist.
Sei also $x' \in X'$ mit $x'|_M = 0$. Angenommen $x' \neq 0$, dann gilt $\|x'\| \neq 0$ und wir betrachten $y' = \frac{x'}{\|x'\|} \in S_{X'}$. Da $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\|y' - x'_{n_0}\| < \frac{1}{4}$. Es folgt

$$\tfrac{1}{2} \le |x'_{n_0}(x_{n_0})| = |x'_{n_0}(x_{n_0}) - y'(x_{n_0})| \le \|x'_{n_0} - y'\|\|x_{n_0}\| < \tfrac{1}{4},$$

womit wir bei einem Widerspruch angekommen sind. □

Korollar 2.42 $(\ell^\infty)'$ und ℓ^1 sind nicht isomorph.

Beweis. Der Raum ℓ^1 ist separabel. Wären also ℓ^1 und $(\ell^\infty)'$ isomorph, so müsste auch ℓ^∞ separabel sein. □

2.5 Das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit

Definition 2.43 (Magere Mengen)
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Man nennt eine Teilmenge $M \subset X$ **nirgends dicht**, falls $\left(\overline{M}\right)$?‘$\frac{1}{2} = \varnothing$.
- Die Menge $N \subset X$ heißt **mager** oder von **1. Kategorie**, wenn sich N als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben lässt.

Lemma 2.44 Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- $M \subset X$ ist nirgends dicht $\Rightarrow$ $\overline{X \setminus M} = X$
- Die abzählbare Vereinigung magerer Mengen ist mager.
- Teilmengen magerer Mengen sind mager.

Beweis. Der erste Punkt ist eine Übung, die anderen sind trivial. □

Bemerkung. Magere Mengen sind klein im topologischen Sinn, dieser unterscheidet sich aber wesentlich vom maßtheoretischen. Es gibt sowohl magere Teilmengen von $\mathbb{R}$, die keine Lebesgue-Nullmengen sind, als auch Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}$, die nicht mager sind, vgl. Aufgabe (2.22).

Satz 2.45 (Satz von Baire)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
Der Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Teilmengen von X ist dicht in X.

Beweis. Es seien $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offene dichte Teilmengen von X und $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Weiters sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wir zeigen $\exists m \in M \colon m \in B_\varepsilon(x_0)$.
Da O_1 dicht in X ist gilt $O_1 \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$. Weil der Durchschnitt weiters offen ist, können wir ein $x_1 \in O_1 \cap B_\varepsilon(x_0)$ und ein $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$ wählen, sodass $B_{\tilde{\varepsilon}_1}(x_1) \subset O_1 \cap B_\varepsilon(x_0)$.
Wir setzen $\varepsilon_1 := \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_1 \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, dann gilt sogar

$$\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset O_1 \cap B_\varepsilon(x_0)\ .$$

O_2 ist dicht in X, damit gilt wieder $O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \varnothing$ und analog zu oben gibt es ein $x_2 \in O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1)$ und ein ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$ so, dass

$$\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_1 \cap O_2 \cap B_\varepsilon(x_0)\ .$$

Induktiv konstruieren wir also Folgen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\varepsilon_n \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon_{n-1}, \text{ also } \varepsilon_n \leq 2^{-n}\varepsilon$$

und

$$\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset O_n \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i \cap B_\varepsilon(x_0)\,.$$

Insbesondere gilt $\forall n > N\colon x_n \in B_{\varepsilon_N}(x_N) \subset B_{\varepsilon 2^{-N}}(x_N)$ und damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, gibt es ein $m \in X$ mit $m = \lim_{n\to\infty} x_n$. Nach Konstruktion ist $m \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$ und da $\forall n \geq 2\colon x_n \in \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset B_\varepsilon(x_0)$ auch in $B_\varepsilon(x_0)$. □

Bemerkung.

- ◇ Der Beweis funktioniert komplett analog für vollständige metrische Räume, insbesondere gilt der Satz auch für abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen.
- ◇ Die Vollständigkeit ist wichtig, wie folgendes Beispiel zeigt: Man betrachte eine Abzählung von $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Dann ist $O_n := \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$ offen und dicht in $\mathbb{Q}$, aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing$ ist nicht dicht in $\mathbb{Q}$.

Korollar 2.46 (Bairscher Kategoriensatz)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
Das Kompliment einer mageren Menge $N \subset X$ ist dicht in X, es gilt also $\overline{X \setminus N} = X$.

Beweis. Sei N mager, also $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit $(\overline{M_n})^\circ = \varnothing$. Es gilt

$$X \setminus N = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus M_n) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \overline{M_n})\,.$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X \setminus \overline{M_n}$ offen und wegen $\overline{X \setminus \overline{M_n}} = X \setminus (\overline{M_n})^\circ = X$ dicht in X. Nach dem Satz von Baire ist dann $X \setminus N$ dicht in X. □

Korollar 2.47
Ein Banachraum ist als Teilmenge von seiner selbst nicht mager, also von 2. Kategorie.

Beweis. Sonst wäre $X \setminus X = \varnothing$ dicht in X. Da $\varnothing$ abgeschlossen ist, wäre dann $X = \varnothing$ und weil X ein Vektorraum ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Definition 2.48 (Konvexe Mengen)
Es sei V ein reeller Vektorraum. Man nennt $M \subset V$ **konvex**, wenn alle Verbindungsstrecken zwischen Punkten aus M in M liegen, also

$$\forall x, y \in M,\ \forall \lambda \in [0,1]\colon \lambda x + (1-\lambda) y \in M\,.$$

Beispiel 2.49 In einem normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ sind Bälle konvexe Mengen. Sei dazu $z \in X$ und $r > 0$ beliebig, dann gilt für $x, y \in B_r(z)$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig

$$\|z - (\lambda x + (1-\lambda)y)\| = \|\lambda(z-x) + (1-\lambda)(z-y)\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r \ ,$$

also ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_r(z)$.
Analog kann man zeigen, dass abgeschlossene Bälle konvex sind. ◇

Lemma 2.50 (lineare Abbildungen erhalten Konvexität)
Es seien V und W reelle Vektorräume und $T\colon V \to W$ linear. Ist $M \subset V$ konvex, so ist auch $T(M) \subset W$ konvex.

Beweis. Seien $a, b \in T(M)$, dann gibt es $x, y \in M$ mit $a = T(x)$ und $b = T(y)$. Da M konvex ist, folgt $\forall \lambda \in [0,1]\colon \lambda x + (1-\lambda)y \in M$. Somit ist

$$\forall \lambda \in [0,1]\colon \lambda a + (1-\lambda)b = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) = T(x + (1-\lambda)y) \in T(M)\,. \qquad \square$$

Lemma 2.51 (Abschluss konvexer Mengen ist konvex)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum und $M \subset X$ konvex. Dann ist $\overline{M}$ konvex.

Beweis. Seien $x, y \in \overline{M}$ und $\lambda \in [0,1]$. Wir wählen eine Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x und eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert y. Die durch $z_n := \lambda x_n + (1-\lambda)y_n$ definierte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geht wegen

$$\|z_n - z\| \le \lambda\|x_n - x\| + (1-\lambda)\|y_n - y\| \le \max\{\|x_n - x\|, \|y_n - y\|\} \to 0$$

gegen z und weil $\overline{M}$ abgeschlossen ist, gilt $z \in \overline{M}$. □

Lemma 2.52 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum und $M \subset X$ konvex. Gibt es ein $x \in M$ so, dass M zugleich Umgebung von x und von $-x$ ist, so ist M auch Umgebung von 0. (Die Umkehrung gilt natürlich auch.)

Beweis. Ist M Umgebung von x und von $-x$, so gibt es $r_1, r_2 > 0$, sodass $B_{r_1}(x) \subset M$ und $B_{r_2}(-x) \subset M$ ist. Wir wählen $r = \min\{r_1, r_2\}$ und zeigen $B_r(0) \subset M$. Sei dazu $z \in B_r(0)$, dann gilt $x + z \in B_{r_1}(x)$ und $-x + z \in B_{r_2}(-x)$ und damit folgt aus der Konvexität von M auch $z = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(-x+z) \in M$. □

Satz 2.53 (Banach–Steinhaus)
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Vektorraum. Weiters sei I eine beliebige Indexmenge und zu $i \in I$ sei $T_i \in \mathcal{L}(X, Y)$. Es gilt

$$\forall x \in X\colon \sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y < \infty \ \Rightarrow\ \sup_{i\in I} \|T_i\|_{Y\leftarrow X} < \infty\,.$$

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $E_n := \{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y \leq n\}$. Dann ist $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Weiters ist für jedes n die Menge

$$E_n = \cap_{i\in I} \left(\|\cdot\|_Y \circ T_i\right)^{-1}([0,n])$$

abgeschlossen. Nach KOROLLAR 2.47 gibt es damit ein $N \in \mathbb{N}$ mit $E_N^\circ \neq \varnothing$, also gibt es ein $y \in E_N$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(y) \subset E_N$ gilt. Das bedeutet aber, dass

$$\forall x \in B_\varepsilon(0) : \; x + y \in E_N \,.$$

Zu $z \in E_N$ ist auch $-z \in E_n$ und damit folgt $-y \in E_N$, also sogar

$$\forall x \in B_\varepsilon(0) : \; x - y \in E_N \,.$$

Da zu $x+y$ und $x-y$ aus E_n wegen $\|T_i\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)\| \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ auch der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke in E_n liegt, gilt

$$\forall x \in B_\varepsilon(0) : \; x = \tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2} \in E_N \,.$$

Das bedeutet aber

$$\forall x \in B_\varepsilon(0), \forall i \in I : \; \|T_i x\| \leq N \,,$$

also $\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{N}{\varepsilon} < \infty$. □

2.6 DER SATZ VON DER OFFENEN ABBILDUNG

DEFINITION 2.54 (OFFENE ABBILDUNG)
Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet, d. h. $\forall O \in \mathcal{T}_X : \; f(O) \in \mathcal{T}_Y$.

BEMERKUNG.

- ◇ Ist f bijektiv, dann ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist.
- ◇ Für offene Abbildung müssen im Allgemeinen die Bilder abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein. Man betrachte dazu die Projektion

  $$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \; (x,y)^T \mapsto x$$

  und die abgeschlossene Menge $A = \{(x,y)^T : xy \geq 1\}$. Dann ist p offen aber $p(A) =]0, \infty[$.

LEMMA 2.55 (OFFENE LINEARE ABBILDUNGEN)
Es seien X und Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) T ist offen

(2) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, r > 0\colon\ T(B_\varepsilon(0)) \supset B_r(0)$ (Bilder von Nullumgebungen sind 0–Umgebungen)

(3) $\exists\, r > 0\colon\ T(B_1(0)) \supset B_r(0)$ (das Bild der Einheitskugel ist eine Nullumgebung)

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): $0 \in T(B_\varepsilon(0))$ offen.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $O \subset X$ offen und $x \in O$ beliebig. Dann gibt es

$$\varepsilon > 0\colon\ O \supset B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(0) + x\,.$$

Es gilt also $T(O) \supset T(B_\varepsilon(x) + x) = T(B_\varepsilon(x)) + T(x)$. Nach (2) können wir ein $r > 0$ wählen mit $T(O) \supset B_r(0) + T(x)$. Damit ist für jedes offene O und für jedes $x \in O$ auch $T(x)$ ein innerer Punkt von $T(O)$, also T eine offene Abbildung.
(2) $\Rightarrow$ (3): Dies ist offensichtlich.
(3) $\Rightarrow$ (2): $T(B_1(0)) \supset B_r(0) \overset{T(\lambda x)=\lambda T(x)}{\Longrightarrow} T(B_\varepsilon(0)) \supset B_{r/\varepsilon}(0)$ □

Beispiel 2.56 Die Abbildung aus Aufgabe (2.14) ist nicht offen, da das Bild der Einheitskugel keine Nullumgebung ist.

Satz 2.57 (Satz von der offenen Abbildungen)
Es seien X und Y Banachräume. Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv, dann ist T offen.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen $\exists\, r_0 > 0\colon\ B_{r_0}(0) \subset \overline{T(B_1(0))}\,.$
Nachdem T surjektiv ist, gilt $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B_n(0))$. Aus Korollar 2.47 ($Y$ ist vollständig) schließen wir auf die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit $(\overline{T(B_N(0))})^\circ \neq \varnothing$. Das heißt

$$\exists\, y_0 \in \overline{T(B_N(0))}\ \exists\, r > 0\colon\ B_r(y_0) \subset \overline{T(B_N(0))}\,,$$

oder mit $y = (y_0 + y) - y$,

$$\forall\, y \in B_r(0)\colon\ y_0 + y \in \overline{T(B_N(0))}\ .$$

Andererseits ist $T(B_N(0))$ symmetrisch um 0, da für beliebiges $z \in T(B_N(0))$ gilt, dass

$$\exists\, x \in X \text{ mit } \|x\| < N\colon\ z = T(x)\,, \qquad \text{also } -z = -T(x) = T(-x) \in T(B_N(0))\,.$$

Damit ist auch $\overline{T(B_N(0))}$ symmetrisch und folglich $B_r(-y_0) \subset \overline{T(B_N(0))}$. Analog zu oben folgt dann

$$\forall y \in B_r(0)\colon\ -y_0 + y \in \overline{T(B_N(0))}\,.$$

Insgesamt erhalten wir, weil $\overline{T(B_N(0))}$ nach Lemma 2.50 und Lemma 2.51 konvex ist,

$$y \in B_r(0) \Longrightarrow y = \tfrac{1}{2}(y_0 + y) + \tfrac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T(B_N(0))}$$

und damit zu $r_0 = \frac{r}{N}$, dass

$$B_{r_0}(0) \subset \overline{T(B_1(0))} \,.$$

<u>Schritt 2:</u> Wir zeigen, dass sogar $B_{r_0}(0) \subset T(B_1(0))$ gilt.
Sei $y \in B_{r_0}(0)$. Wir wählen r_1 mit $\|y\| < r_1 < r_0$ und setzen $\overline{y} := \frac{r_0}{r_1} y$, dann gilt $\|\overline{y}\| < r_0$. Es ist also $\overline{y} \in B_{r_0}(0)$ und damit $\overline{y} \in \overline{T(B_1(0))}$. Also gibt es ein $y_0 \in T(B_1(0))$ — und damit ein $x_0 \in B_1(0)$ so, dass $T(x_0) = y_0$ — mit

$$\|\overline{y} - y_0\| < \alpha r_0 \text{ für } \alpha \text{ so klein, dass } \tfrac{r_1}{r_0}\tfrac{1}{1-\alpha} < 1 \,.$$

Nun betrachten wir $\frac{1}{\alpha}(\overline{y} - y_0) \in B_{r_0}(0)$.
Wieder existiert $y_1 \in T(B_1(0))$ — und damit $x_1 \in B_1(0)$ so, dass $T(x_1) = y_1$ — mit

$$\|\tfrac{\overline{y}-y_0}{\alpha} - y_1\| < \alpha r_0, \text{ also } \|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2 r_0 \,.$$

Also gibt es zu $\frac{1}{\alpha^2}\left(\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)\right) \in B_{r_0}(0)$ wieder ein $y_2 \in T(B_1(0))$, das Bild eines $x_2 \in B_1(0)$ ist, mit

$$\|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\| < \alpha^3 r_0 \,.$$

Induktiv erhalten wir ein Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_1(0)$ mit

$$\left\|\overline{y} - T\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i x_i\right)\right\| = \left\|\overline{y} - \sum_{i=0}^{n} \alpha^i y_i\right\| < \alpha^{n+1} r_0 \,. \tag{$*$}$$

Da $\alpha < 1$, konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i$ absolut und wegen der Vollständigkeit von X existiert $\overline{x} := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i \in X$. Nach $(*)$ ist $T(\overline{x}) = \overline{y}$. Setzt man jetzt $x := \frac{r_1}{r_0}\overline{x}$, dann ist $T(x) = y$ und es gilt

$$\|x\| = \frac{r_1}{r_0}\|\overline{x}\| \le \frac{r_1}{r_0}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \|x_i\| < \frac{r_1}{r_0}\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{r_1}{r_0}\frac{1}{1-\alpha} < 1$$

also $y \in T(B_1(0))$. □

Bemerkung. Schritt 1 lässt sich mithilfe von Lemma 2.52 wesentlich eleganter erledigen, dies bleibt dem Leser überlassen.

Korollar 2.58
Sind X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so ist T^{-1} stetig.

Beweis. Klar. □

Bemerkung. Aufgabe (2.14) zeigt, dass die Aussage für nicht vollständige normierte Räume falsch ist.

KOROLLAR 2.59 Es sei X ein Vektorraum, der mit $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ ein Banachraum ist. Gibt es ein $M > 0$, sodass $\forall x \in X\colon \|x\| < M|||x|||$ gilt, so sind $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ bereits äquivalent.

Beweis. Die Identität $\mathrm{id}\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ ist stetig und bijektiv, also nach vorherigem Korollar bereits ein Isomorphismus. □

KOROLLAR 2.60 Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektiv.
Wir bezeichnen mit $\mathrm{im}(T)$ das Bild $T(X)$ von T, das natürlich ein Untervektorraum von Y ist. Dann gilt

$$T^{-1}\colon \ \mathrm{im}(T) \to X \text{ stetig} \iff \mathrm{im}(T) \text{ abgeschlossen.}$$

Beweis. $\underline{\Leftarrow}$: Ist $\mathrm{im}(T)$ abgeschlossen, so ist $\mathrm{im}(T)$ ein Banachraum. Weil $T\colon X \to \mathrm{im}(T)$ stetig, linear und bijektiv ist, ist nach KOROLLAR 2.58 die Inverse stetig.

$\underline{\Rightarrow}$: Ist T^{-1} stetig, so ist T ein Isomorphismus zwischen dem vollständigen Raum X und dem Unterraum $\mathrm{im}(T)$ von Y. Damit muss $\mathrm{im}(T)$ auch vollständig und folglich abgeschlossen in Y sein muss. □

2.7 HILBERTRÄUME

DEFINITION 2.61 (SKALARPRODUKT)
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** auf X , wenn sie folgenden Bedingungen genügt

- ◇ $\forall x_1, x_2, y \in X \, \forall \lambda \in \mathbb{K}\colon \ \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle$ **(linear im 1. Argument)**
- ◇ $\forall x, y \in X\colon \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ **(hermitesch)**
- ◇ $\forall x \in X\colon \ \langle x, x\rangle \geq 0$ und $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ **(definit)**

LEMMA 2.62 Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf X. Es gilt

- ◇ $\forall\, x, y \in X\colon \ |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ **(Cauchy–Schwarz-Ungleichung)**
- ◇ $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ definiert eine Norm auf X, diese nennt man die **vom Skalarprodukt induzierte Norm**.

Beweis. Aus der Linearen Algebra bekannt. □

DEFINITION 2.63 (HILBERTRAUM)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

- ◇ Man nennt $(X, \|\cdot\|)$ einen **Prähilbertraum**, wenn es ein Skalarprodukt auf X gibt, sodass $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm ist.

- $\diamond$ Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Prähilbertraum und vollständig (mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm), so nennt man $(X, \|\cdot\|)$ einen **Hilbertraum**.

Satz 2.64 (Parallelogramm–Identität)
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn

$$\forall\, x, y \in X\colon\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,. \qquad \text{(Parallelogramm-Identität)}$$

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{aligned}$$

$\underline{\Leftarrow}$: Man setzt

$$\langle x, y\rangle := \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

und rechnet nach, dass dadurch tatsächlich ein Skalarprodukt gegeben ist. Der komplizierteste Punkt ist die Linearität im ersten Argument, vgl. [7, Satz V.1.7, S. 205] □

Es ist also egal, ob man in einem Prähilbertraum die Norm oder das Skalarprodukt angibt, da man nach obiger Überlegung das Skalarprodukt aus der Norm zurückgewinnen kann. Es ist daher auch gebräuchlich einen Prähilbertraum als $(X, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ anzugeben.

Lemma 2.65 (Stetigkeit des Skalarprodukts)
Es sei $(X, , \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, dann ist $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon\ X \times X \to \mathbb{K}$ stetig.

Beweis. Für (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $X \times X$ beliebig gilt

$$|\langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle| = |\langle x_1 - x_2, y_1\rangle + \langle x_2, y_1 - y_2\rangle| \le \|x_1 - x_2\|\|y_1\| + \|x_2\|\|y_1 - y_2\|$$

und damit ist $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ stetig. □

Beispiel 2.66 Die folgenden Räume sind Hilberträume:

- $\diamond$ ℓ^2 mit $\langle (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}$.
- $\diamond$ $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

Definition 2.67 (Orthogonalität)
Es sei $(X, , \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum. Die Vektoren $x, y \in X$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$ ist. Man schreibt $x \perp y$.
Ist $M \subset X$, dann heißt die Mengen

$$M^\perp = \{x \in X\colon\ \forall\, y \in M \text{ ist } \langle x, y\rangle = 0\}$$

orthogonales Komplement von M. Das orthogonale Komplement von M ist ein Untervektorraum von X.

Satz 2.68 (Projektionssatz)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum und $A \subsetneq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Weiters sei $x \in X \setminus A$ und $\delta := \inf_{w \in A} \|x - w\|$. Dann gilt:

- $\diamond$ $\delta > 0$
- $\diamond$ $\exists!\, p_A(x) \in A\colon\ \|x - p_A(x)\| = \delta$
- $\diamond$ $x - p_A(x) \in A^\perp$

Man nennt $p_A(x)$ die **orthogonale Projektion** von x auf A .

Beweis. (1): Angenommen $\delta = 0$, dann gibt es eine Folge in A, die gegen x konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist aber dann $x \in A$. Widerspruch.
(2): Wir zeigen zuerst, dass das Infimum angenommen wird. Sei dazu $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} \|x - w_n\| = \delta$. Wir zeigen, dass $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Aufgrund der Parallelogramm-Identität gilt

$$\|w_n - w_m\|^2 = \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\left(\|w_n - x\|^2 + \|w_m - x\|^2\right) - \|w_n + w_m - 2x\|^2 .$$

nun ist $\frac{1}{2}(w_m - w_n) \in A$ und damit

$$\|\tfrac{1}{2}(w_m - w_n) - x\| \geq \delta \ .$$

Wir erhalten

$$0 \leq \|w_n - w_m\|^2 \leq 2\left(\|(w_n - x)\|^2 + \|(w_m - x)\|^2\right) - 4\delta \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

also ist $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wir setzen $p_A(x) = \lim_{n\to\infty} w_n$ dann ist, wegen der Abgeschlossenheit von A, $p_A(x) \in A$ und es gilt

$$\|x - p_A(x)\| = \|x - \lim_{n\to\infty} w_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x - w_n\| = \delta\,.$$

Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Parallelogramm-Identität. Ist nämlich $\widetilde{w} \in A$ mit $\|x - \widetilde{w}\| = \|x - p_A(x)\| = \delta$, so gilt

$$\begin{aligned}\|p_A(x) - \widetilde{w}\|^2 &= \|p_A(x) - x) - (\widetilde{w} - x)\|^2 = \\ &= 2\left(\|p_A(x) - x\|^2 + \|\widetilde{w} - x\|^2\right) - 4\|\tfrac{p_A(x)+\widetilde{w}}{2} - x\|^2 \leq 2(\delta + \delta) - 4\delta \leq 0\end{aligned}$$

und damit $\widetilde{w} = p_A(x)$.
(3): Sei $w \in A$ beliebig. Wir definieren

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|x - p_A(x) + tw\|^2 .$$

Dann hat g ein lokales Minimum bei $t = 0$, also gilt

$$\begin{aligned} 0 = g'(t)|_{t=0} &= \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x - p_A(x) + tw, x - p_A(x) + tw\rangle\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \left(2\,\mathrm{Re}\langle x - p_A(x), w\rangle + 2t\|w\|^2\right)\Big|_{t=0} = 2\,\mathrm{Re}\langle x - p_A(x), w\rangle\,. \end{aligned}$$

Analog erhält man $\mathrm{Im}\langle x - p_A(x), w\rangle = 0$, indem man t durch $\mathrm{i}t$ ersetzt. Da $w \in A$ beliebig war, gilt $x - p_A(x) \in A^\perp$. □

KOROLLAR 2.69 Ein beliebiges $x \in X$ die eindeutige Zerlegung $x = p_A(x) + x^\perp$ mit $x^\perp \in A^\perp$. Ist A ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraumes X, so gilt $X = A \oplus A^\perp$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus SATZ 2.68. □

DEFINITION UND LEMMA 2.70 (ORTHOGONALE PROJEKTION)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum und $A \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum.
Die Abbildung

$$p_A\colon\ X \to A,\ x = p_A(x) + x^\perp \mapsto p_A(x)$$

nennt man **orthogonale Projektion** auf A. Die Abbildung p_A ist linear und ein Projektionsoperator, d. h. $p_A^2 = p_A$. Ist $A \neq \{0\}$, so gilt $\|p_A\| = 1$.

Beweis. Die Linearität und $p^2 = p$ sind klar. Weiters gilt

$$\frac{\|p_A(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|p_A(x)\|}{\|p_A(x) + x^\perp\|} = \frac{\|p_A(x)\|}{\sqrt{\langle p_A(x) + x^\perp, p_A(x) + x^\perp\rangle}} = \frac{\|p_A(x)\|}{\sqrt{\|p_A(x)\|^2 + \|x^\perp\|^2}} \leq 1$$

und damit $\|p_A\| \leq 1$. Ist $A \neq \{0\}$, so gilt für $w \in A \setminus \{0\}$ auch $\|p_A(w)\| = \|w\| \neq 0$ und damit $\|p_A\| = 1$. □

SATZ 2.71 (RIESZSCHER DARSTELLUNGSSATZ)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum und $T \in X'$. Dann existiert genau ein $t \in X$, sodass

$$\forall x \in X\colon\ Tx = \langle x, t\rangle\,.$$

Weiters gilt $\|T\|_{X \leftarrow \mathbb{C}} = \|t\|_X$.

BEMERKUNG. In obiger Situation schreibt man für t oft auch $t(T)$ um zu verdeutlichen, zu welchem Operator T der Vektor t der **Riesz–Repräsentant** ist. Kurz schreibt man auch oft

$$T = \langle\,\cdot\,, t(T)\rangle\,.$$

Beweis. Existenz: Ist $T = 0$, so wählt man $t(T) = 0$. Wir können also im Weiteren annehmen, dass $T \neq 0$ ist. Es sei K der Kern von T. Weil T stetig ist, ist K ein abgeschlossener Untervektorraum von X. Nach Korollar 2.69 ist dann $X = K \oplus K^\perp$ und weil $T \neq 0$ ist, gilt $K^\perp \neq \{0\}$. Wir wählen ein $v \in K^\perp \setminus \{0\}$. Dann gilt $T(v) \neq 0$ und

$$\forall\, w \in K^\perp\colon\ w - \frac{T(w)}{T(v)} v \in K^\perp\,.$$

Andererseits gilt

$$\forall\, w \in K^\perp\colon\ T\left(w - \frac{T(w)}{T(v)} v\right) = T(w) - T(w) = 0\,,$$

also auch

$$\forall\, w \in K^\perp\colon\ w - \frac{T(w)}{T(v)} v \in K\ .$$

Insgesamt ist

$$\forall w \in K^\perp\colon\ w - \frac{T(w)}{T(v)} v \in K \cap K^\perp = \{0\}\ ,$$

also $\forall\, w \in K^\perp$ und für ein geeignetes $\alpha(w) \in \mathbb{K}$ der Vektor $w - \alpha(w)v = 0$. Damit ist $\dim K^\perp = 1$. Der Vektorraum $K^\perp$ wird also bereits von v aufgespannt.
Einen beliebigen Vektor $x \in X$ kann man damit eindeutig schreiben als $x = x_1 + \alpha(x)v$ mit $x_1 \in K$. Es gilt

$$T(x) = T(x_1) + \alpha(x)T(v) \quad \text{und damit} \quad \alpha(x) = \frac{T(x)}{T(v)}\ .$$

Setzen wir

$$t(T) := \overline{T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)} \frac{v}{\|v\|} = \frac{\overline{T(v)}}{\|v\|^2} v\ ,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\langle x, t(T)\rangle = \langle x_1 + \alpha(x)v, t(T)\rangle = \frac{T(v)}{\|v\|^2}\left\langle x_1 + \frac{T(x)}{T(v)}v, v\right\rangle &= \\ = \frac{T(v)}{\|v\|^2}\left(\langle x_1, v\rangle + \frac{T(x)}{T(v)}\|v\|^2\right) &= T(x)\ .\end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir die Eindeutigkeit von $t(T)$. Sei dazu $u \in X$ so, dass

$$\forall x \in X\colon\ T(x) = \langle x, t(T)\rangle = \langle x, u\rangle\,.$$

Dann gilt $\forall x \in X\colon \langle x, t(T) - u\rangle = 0$. Setzt man insbesondere $x = t(T) - u$, so erhält man $\langle t(T) - u, t(T) - u\rangle = 0$ also $t(T) = u$.
Es bleibt noch $\|t(T)\| = \|T\|$ zu zeigen. Einerseits gilt

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \frac{\langle x, t(T)\rangle}{\|x\|} \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|t(T)\|\,,$$

andererseits

$$\|t(T)\| = \sqrt{\langle t(T), t(T)\rangle} = \frac{|T(v)|}{\|v\|} \leq \|T\|\,. \qquad \square$$

Korollar 2.72 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum, dann gilt $X \simeq X'$.

- ◇ Ist X ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, so ist der sogenannte **Riesz-Isomorphismus**

  $$R\colon\ X' \to X,\ T \mapsto t(T)$$

  linear und isometrisch. Seine Umkehrabbildung $R^{-1}\colon\ X \to X',\ x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$ ist natürlich stetig. R ist also tatsächlich ein Isomorphismus.

- ◇ Für einen $\mathbb{C}$–Vektorraum X ist obige Abbildung antilinear, d. h. für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $t(\lambda T) = \overline{\lambda}\, t(T)$. Nichtsdestotrotz wird sie üblicherweise als Riesz-Isomorphismus bezeichnet.

Beispiel 2.73 Wir betrachten $L^2(]0,\infty[)$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon\ L^2(]0,\infty[) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = \int_0^\infty f\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = \mathrm{e}^x - 1$ gilt

$$T(f) = \int_0^\infty f\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{f(y)}{y+1}\,\mathrm{d}y = \left\langle f, \tfrac{1}{1+\cdot}\right\rangle\,,$$

also ist $x \mapsto \frac{1}{1+x} \in L^2(]0,\infty[)$ der Riesz–Repräsentant von T. Insbesondere ist damit T stetig und linear. ◇

Aufgaben

(2.1) Zeigen Sie, dass c_0 abgeschlossen ist in $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$.

(2.2) Hölder-Ungleichung für Folgenräume: Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ das punktweise Produkt xy in ℓ^1 liegt und $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$ gilt.

(2.3) Es sei T eine kompakte Teilmenge eines lokalkompakten Raumes. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}_0(T), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

(2.4) Beweisen Sie Lemma 2.8.

(2.5) Betrachten Sie $I : \mathcal{C}_b([0,1]) \to \mathcal{C}_b([0,1])$, $f \mapsto (x \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung linear ist. Ist sie stetig und was ist die Operatornorm?

(2.6) Betrachten Sie $\mathcal{C}^1([a,b])$ mit der Norm $|||x||| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Operatornorm von $D : \big(\mathcal{C}^1([a,b]), |||\cdot|||\big) \to (\mathcal{C}_b([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto f'$ gleich eins ist.
Hinweis: Finden Sie einen Funktionenfolge für die $|||f_n|||$ gegen den gleichen Wert wie $\|f_n'\|_\infty$ konvergiert.

(2.7) Es seien X und Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt **kompakt**, wenn für alle *beschränkten* Mengen $B \subset X$ das Bild relativ kompakt in Y ist, d. h. $\overline{T(B)} \subset Y$ ist kompakt. Zeigen Sie, dass kompakte lineare Abbildungen beschränkt sind.

(2.8) Es sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die Identität $\mathrm{id}\colon X \to X$ genau dann kompakt ist, wenn X endlichdimensional ist.
Hinweis: Rieszsches Lemma.

(2.9) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{id} : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ kompakt ist. Man sagt $\mathcal{C}^1([a,b])$ bettet kompakt in $\mathcal{C}^0([a,b])$ ein.

(2.10) Zeigen Sie, dass die Abbildung I aus Aufgabe (2.5) kompakt ist.

(2.11) Es sei M ein lokalkompakter topologischer Raum und

$$\mathcal{C}_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \text{ stetig; } \forall\, \varepsilon \geq 0\colon\ |f|^{-1}([\varepsilon, \infty[) \text{ ist kompakt}\}\ .$$

Zeigen Sie, dass in $\mathcal{C}_0(M)$ gerade jene Funktionen aus $\mathcal{C}^b(M)$ enthalten sind, die durch $f(\infty) = 0$ stetig auf die Einpunktkompaktifizierung von M fortgesetzt werden können. Schließen Sie daraus insbesondere, dass $\mathcal{C}_0(M)$ ein Vektorraum ist.

(2.12) Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $b : V \times W \to \mathbb{R}$ bilinear. Zeigen Sie, dass b genau dann stetig auf $V \times W$ mit der Produkttopologie ist, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, sodaß $\forall v \in V\ w \in W\colon\ |b(v,w)| \leq C\|v\|_V\|w\|_W$. Betrachten Sie zu $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ speziell die Abbildung

$$b : l^p \times l^q \to \mathbb{R}\colon\ ((v_i)_{i\in\mathbb{N}}, (w_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i v_i w_i\ .$$

Ist b stetig?

(2.13) Es sei M ein topologischer Raum und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Man bezeichnet mit $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in M :\ f(x) \neq 0\}}$ den Träger von f. Betrachten Sie die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger

$$\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$$

mit der (für diesen Raum üblichen) Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ nicht vollständig ist.

(2.14) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \left(x \mapsto \tfrac{f(x)}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass L linear, stetig und bijektiv ist. Ist die Umkehrabbildung stetig?

(2.15) Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \ell^1 &\longrightarrow (c_0)' \\ x &\longmapsto Tx :\ y \mapsto Tx(y) := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus gegeben ist. $(c_0)'$ wird dabei mit der Operatornorm versehen.

(2.16) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \ell^1 &\longrightarrow (\ell^\infty)' \\ x &\longmapsto Tx :\ y \mapsto Tx(y) := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i \end{aligned}$$

linear und isometrisch, aber nicht surjektiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie die lineare und stetige (warum?) Grenzwertbildung auf den konvergenten Folgen und setzen Sie diese mittels des Satzes von Hahn-Banach auf ℓ^∞ fort.

(2.17) Es sie $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und U ein Untervektorraum von X. Es sei Π die kanonische Projektion

$$\Pi\colon X \to X/U\colon\ x \mapsto [x] = x + U \ .$$

Zeigen Sie, dass $\|[x]\|_{X/U} := \inf_{u\in U}\|x-u\|$ wohldefiniert und eine Halbnorm auf X/U ist. Halbnorm bedeutet dabei, dass $\|\cdot\|_{X/U}$ alle Eigenschaften einer Norm hat, bis auf möglicherweise $\|x\|_{X/U} = 0 \Rightarrow x = 0$. Zeigen Sie weiters, dass $\|\cdot\|_{X/U}$ genau dann eine Norm ist, wenn U abgeschlossen ist.
Zusatzaufgabe: Es sei X ein hausdorffscher topologischer Vektorraum und U ein Untervektorraum. Versieht man X/U mit der Quotiententopologie, so ist die kanonische Projektion stetig und offen. X/U ist ein topologischer Vektorraum. X/U ist genau dann hausdorffsch, wenn U abgeschlossen ist.

(2.18) Geben Sie einen nicht abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\mathbb{R})$ an.

(2.19) Betrachten Sie für $t \in [0,1]$ das Anfangswertproblem der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)\ , \qquad x(0) = 1\ ,$$

wobei a und b stetige Funktionen auf $[0,1]$ sind. Schreiben Sie das Anfangswertproblem in eine Integralgleichung um und zeigen Sie *mithilfe des Satzes über die Neumannreihe*, dass die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung besitzt.

(2.20) Es sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass es keine S, T aus $\mathcal{L}(X)$ gibt, sodass $ST - TS = \mathrm{id}$ gilt.
Hinweis: Es gilt $ST - TS = \mathrm{id} \Rightarrow ST^n - T^nS = nT^{n-1}$, was zu beweisen ist.

(2.21) Nach dem Lemma von Zorn hat jeder Vektorraum V eine "algebraische" Basis (oder Hamel-Basis). Das heißt es gibt eine Indexmenge I und eine Familie $(v_i)_{i\in I}$, sodass sich jedes Element $v \in V$ eindeutig als *endliche* Linearkombination von Elementen aus $(v_i)_{i\in I}$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass eine Hamelbasis eines Banachraums über $\mathbb{K}$ entweder endlich oder überabzählbar ist, d. h. es gibt keinen Banachraum abzählbarer Dimension.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass ein endlichdimensionaler Untervektorraum eines Banachraums abgeschlossen ist (Äquivalenz von Normen) und wenden Sie dann den Bairschen Kategoriensatz an.

(2.22) Es sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Auflistung der rationalen Zahlen und

$$O_{i,n} := \Big]q_i - 2^{-(i+1)}/n, q_i + 2^{-(i+1)}/n\Big[\ .$$

Weiters sei $P_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_{i,n}$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ eine Nullmenge ist, deren Komplement mager ist.

(2.23) Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$. Zeigen Sie: Existiert für alle $x \in X$ der Grenzwert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$, so ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(2.24) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie:

$$M \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \forall x' \in X'\colon\ x'(M) \text{ ist als Teilmenge von } \mathbb{K} \text{ beschränkt}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_x : X' \to \mathbb{K}\colon\ x' \mapsto x'(x)$.

(2.25) Betrachten Sie $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Zeigen Sie, dass man $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als abzählbaren Durchschnitt offener dichter Mengen schreiben kann. Schließen Sie daraus, dass man $\mathbb{Q}$ nicht als abzählbaren Schnitt offener Mengen schreiben kann.

(2.26) Finden Sie eine Teilmenge von $C([0,1])$, die punktweise aber nicht gleichmäßig beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es für jede punktweise beschränkte Familie $\mathcal{F}$ in $C([0,1])$ ein Intervall $I \subset [0,1]$ gibt, auf dem die Familie gleichmäßig beschränkt ist.
Hinweis: Zu $k \in \mathbb{N}$ ist $\{x \in [0,1] | \forall f \in \mathcal{F}\colon\ |f(x)| \leq k\}$ abgeschlossen.

Literaturverzeichnis

[1] Cigler, J. ; Reichel, H.-C.: *Topologie.* Zweite Auflage. BI – Bibliographisches Institut, 1987

[2] Dobrowolski, M.: *Angewandte Funktionalanalysis.* Zweite Auflage. Springer Verlag, 2010

[3] Heine, J.: *Topologie und Funktionalanalysis.* Zweite Auflage. Oldenbourg Verlag, 2002

[4] Jänich, K.: *Topologie.* Achte Auflage. Springer, 2005

[5] Querenburg, B. von: *Mengentheoretische Topologie.* Dritte Auflage. Springer, 2001

[6] Schubert, H.: *Topologie.* Erste Auflage. Teubner, 1964

[7] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* Siebte Auflage. Springer, 2011