Skriptum zum Praktikum Einführung in die Mathematik 2

Tobias Hell & Georg Spielberger

Letzte Änderung: 2. Februar 2011

Universität Innsbruck
WS 2010/11

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Präliminarien

Betrag einer reellen Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von x.

Quadratische Gleichungen

Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1.1}$$

Man nennt $D := p^2 - 4q$ die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (1.1). Es können die folgenden drei Fälle auftreten:

- $\mathbf{D = 0}$: Gleichung (1.1) besitzt eine reelle (doppelte) Lösung, nämlich
$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}.$$
- $\mathbf{D > 0}$: (1.1) hat zwei, voneinander verschiedene, reelle Lösungen. Diese lauten
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$
- $\mathbf{D < 0}$: Es existiert keine reelle Lösung der Gleichung (1.1).

Im Falle, dass $D \geq 0$, gilt weiters

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 + px + q, && \textit{(Zerlegung in Linearfaktoren)} \\ x_1 + x_2 = -p \quad &\text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q. && \textit{(Satz von Vieta)} \end{aligned}$$

Beweis: (a) Quadratisches Ergänzen von (1.1) führt auf

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0 \iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Da $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, besitzt die Gleichung nur dann eine reelle Lösung, falls die rechte Seite ebenfalls größer gleich Null ist. Sei also $D \geq 0$, so kann auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel gezogen werden. Somit erhält man

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \iff x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

(b) Setzen wir für x_1 und x_2 ein, so ergibt sich

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-p.$$

Genauso einfach sieht man, dass

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.$$

(c) Nun folgt direkt

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q.$$

Kapitel 2

Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

2.1 Grundlegendes

Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

und für $a \neq 0$ gilt

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten
Es sei $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Rechenregeln

Seien $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ (*"Bei gleicher Basis addieren sich die Exponenten."*)

$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

2.2 Beispiele

Beispiel 2.1. (*Kürzen von Hochzahlen*)
Für $x < 0$ ist die reelle Quadratwurzel $\sqrt{x^2}$ definiert, jedoch nicht $(\sqrt{x})^2$. Insbesondere dürfen im Allgemeinen Exponenten nicht ohne weiteres gekürzt werden. Für $x \in \mathbb{R}$ und gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Bei ungeradem n entfällt der Betrag, dass man diesen jedoch bei geradem n keinesfalls vernachlässigen darf, sieht man anhand des Beispiels

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1.$$

Beispiel 2.2. Vereinfache den Ausdruck

$$\frac{\left(18\sqrt{a}b^2\right)^3 \cdot \left(5a^3b\right)^4}{27 \cdot 2a^3b^4 \cdot \left(25a^3\sqrt{b}\right)^2} = (*)$$

soweit wie möglich.

Lösung: Um die Wohldefiniertheit von $(*)$ zu gewährleisten, muss folgendes verlangt werden:

- $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ wohldefiniert $\rightsquigarrow a, b \geq 0$
- a und b treten mit positivem Exponenten im Nenner auf $\rightsquigarrow a, b \neq 0$

Insgesamt: $a, b > 0$
Zum Vereinfachen des Terms empfiehlt es sich, die konstanten Faktoren soweit wie möglich zu faktorisieren:

$$\begin{aligned}(*) = \frac{\left(3^2 \cdot 2\sqrt{a}b^2\right)^3 \cdot \left(5a^3b\right)^4}{3^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot \left(5^2a^3\sqrt{b}\right)^2} &= \frac{3^6 \cdot 2^3 \cdot a^{3/2} \cdot b^6 \cdot 5^4 \cdot a^{12} \cdot b^4}{3^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot 5^4 \cdot a^6 b} = \\ &= \frac{3^3 \cdot 2^2 \cdot a^{27/2} \cdot b^{10}}{a^9 \cdot b^5} = 108\sqrt{a^9}b^5\end{aligned}$$

2.3 Aufgaben

Gib für folgende Ausdrücke sinnvolle Wertebereiche an und vereinfache soweit wie möglich:

(1) $\dfrac{c^{2n-x} \cdot d^{n+x}}{c^{n+2x} \cdot d^{2n-3x}} \cdot \dfrac{x^{2n+2} \cdot y^{3n+1}}{x^{2n+3} \cdot y^{2n+1}}$

(2) $\dfrac{x^{3-a}y^{2a+1}}{(x+y)^{a+1}} \left(\dfrac{(x+y)^{5a+4}}{x^{2a+1}y} : \dfrac{y^{a+2}}{x^{3a+2}(x+y)^{3+3a}} \right)$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{z^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}}}{\sqrt[6]{z \cdot \sqrt[4]{z^5}}} : \dfrac{\sqrt{z^5 \cdot \sqrt[4]{z^7}}}{\sqrt[9]{z^3 \cdot \sqrt{z}}}$

Kapitel 3

Ungleichungen und Beträge

3.1 Grundlegendes

Elementare Umformungen von Ungleichungen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $d > 0$. Dann gilt:

- $\triangleright$ $a < b \iff a + c < b + c$
- $\triangleright$ $a < b \iff a \cdot d < b \cdot d$
- $\triangleright$ $a < b \iff -b < -a$

(Bei Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl dreht sich also das Ungleichheitszeichen um.)

Diese und folgende Rechenregeln gelten analog für $>, \leq$ und $\geq$. Allgemeiner gilt:

Anwendung von monotonen Funktionen auf Ungleichungen

Seien $a, b \in D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann gilt:

$$a < b \iff f(a) < f(b)$$

Ist $g\colon D \to \mathbb{R}$ hingegen streng monoton fallend so ist

$$a < b \iff g(a) > g(b).$$

Achtung: $x \mapsto x^2$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, jedoch streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ (vgl. Abbildung 3.1), d.h. eine Ungleichung darf nur dann quadriert werden, wenn beide Seiten dasselbe Vorzeichen besitzen. Sind beide Seiten negativ, so muss beim Quadrieren das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

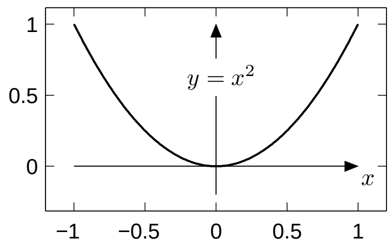

Abbildung 3.1: Standardparabel

3.2 Beispiele

Beispiel 3.1. (*Multiplikation mit negativen reellen Zahlen*)
An folgendem einfachen Beispiel sieht man, dass das Ungleichheitszeichen bei Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl umgedreht werden muss:

$$x < 3 \tag{3.1}$$

ist offensichtlich für $x = 2$ erfüllt. Multipliziert man (3.1) mit -1 und drehte das Ungleichheitszeichen nicht um, so erhielte man $-x < -3$, was offensichtlich für $x = 2$ nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.2. (*Auflösen von Beträgen*)

(1) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x| \leq 2.$$

Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $x \geq 0$: $x \leq 2$

2. Fall: $x < 0$: $-x \leq 2 \iff x \geq -2$

Somit lautet die Lösungsmenge der Ungleichung $\mathbb{L} = [-2, 2]$.
Kurz können diese Überlegungen wie folgt geschrieben werden:

$$|x| \leq 2 \iff (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee (x < 0 \wedge -x \leq 2) \iff -2 \leq x \leq 2$$

(2) $x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2$, ergibt sich durch das Ziehen der Quadratwurzel. Da beide Seiten der Ungleichung nicht negativ sind und $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wächst, ist dies zulässig.

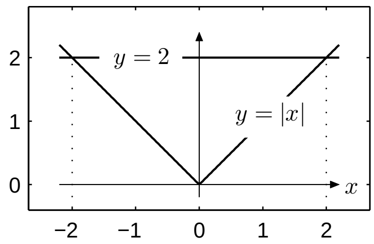

Abbildung 3.2: Graphische Veranschaulichung der Lösung der Ungleichung $|x| \leq 2$

(3) Eine alternative Schreibweise für eine Fallunterscheidung bietet das nächste Beispiel:

$$|x-3| \leq 5 \iff \begin{cases} x-3 \leq 5, & x \geq 3 \\ 3-x \leq 5, & x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 8, & x \geq 3 \\ x \geq -2, & x < 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in [-2,3) \cup [3,8] = [-2,8] = \mathbb{L}$$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.3. (*Quadratische Ungleichungen*)

(1) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Lösung: Man berechnet zuerst die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$, welche man mittels des Satzes von Vieta leicht als $x = -2, 3$ erkennt. Somit ist

$$x^2 - x - 6 < 0 \iff (x+2)(x-3) < 0,$$

was genau dann der Fall ist, wenn $x + 2$ und $x - 3$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Das kann nur passieren, wenn x zwischen den Nullstellen der nach oben geöffneten Parabel $x^2 - x - 6$ liegt. Daraus ergibt sich $\mathbb{L} = (-2, 3)$.

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

(2) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x^2 + x - 2| \leq 4.$$

Lösung: $|x^2+x-2| \leq 4 \iff |x+2||x-1| \leq 4$

<u>1. Fall:</u> $x \in \mathbb{R} \setminus (-2,1)\colon x^2+x-6 \leq 0 \iff (x+3)(x-2) \leq 0 \iff x \in [-3,2]$
$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [-3,-2] \cup [1,2]$

<u>2. Fall:</u> $x \in (-2,1)\colon x^2+x+2 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-2,1)$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [-3,2]$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.4. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{5}{2x-2} \leq \frac{1}{x-3}.$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$

<u>1. Fall:</u> $x \in (1,3)\colon 5x-15 \geq 2x-2 \iff 3x \geq 13 \iff x \geq \frac{13}{3} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

<u>2. Fall:</u> $x \in \mathbb{R} \setminus [1,3]\colon 5x-15 \leq 2x-2 \iff x \leq \frac{13}{3} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-\infty,1] \cup \big(3, \frac{13}{3}\big]$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty,1) \cup (3, \frac{13}{3}]$

Übung: Veranschauliche die Lösung graphisch.

Beispiel 3.5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung

$$a < \sqrt{x-1}.$$

Lösung: $\mathbb{D} = [1,\infty)$

<u>1. Fall:</u> $a < 0$: Die Ungleichung ist erfüllt, da $\sqrt{x-1}$ für alle $x \geq 1$ nicht negativ ist.

<u>1. Fall:</u> $a \geq 0$: Da beide Seiten nicht negativ sind, darf quadriert werden:

$$a^2 < x-1 \iff x > a^2+1$$

Die Lösungsmenge hängt also von a ab: $\mathbb{L} = \begin{cases} (a^2+1,\infty), & a \geq 0 \\ [1,\infty), & a < 0 \end{cases}$

3.3 Aufgaben

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

(1) $(x+4)(6-x) \leq 0$

(2) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

(3) $\dfrac{2}{x+2} > \dfrac{1}{3x-1}$

(4) $4x^2 \leq 8x + 1$

(5) $\dfrac{1}{3-x} > 3 + x$

(6) $|2 - x^2| \geq x^2$

(7) $\left|\dfrac{3-6x}{1-x}\right| > 2$

(8) $|1 - x^2| \geq 2x + 2$

(9) $-x < \sqrt{36 - 2x^2}$

(10) $\dfrac{1}{x + |x+1|} < 2$

(11) $\dfrac{\frac{1}{2}x^2 - 6}{|x+4| - 2} < -2x + 3$

(12) $\big|x - |2-x|\big| < \big|x^2 - 1\big|$

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

4.1 Grundlegendes

Definitionen

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Dann heißen

- $\operatorname{Re} z = x$ *Realteil* und $\operatorname{Im} z = y$ *Imaginärteil* von z,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *Betrag* von z,
- $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ die *konjugierte komplexe Zahl* zu z.

Es gelten folgende Identitäten:

Wichtige Identitäten

- $\mathrm{i}^2 = -1$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi, \quad \psi \in \mathbb{R}$ (*Eulersche Formel*)
- $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad$ wobei $r = |z|$ und $\varphi = \arg_{\mathrm{H}} z$ (*Polardarstellung einer komplexen Zahl*)

4.2 Beispiele

Beispiel 4.1. (*Brüche komplexer Zahlen, "Reellmachen" des Nenners*)
Schreibe

$$z = \frac{2 - 3\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}}$$

in eine komplexe Zahl mit reellem Nenner um.

Lösung: Wir erweitern mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl, also $1 - 2\mathrm{i}$, und erhalten

$$z = \frac{2 - 3\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}} \cdot \frac{1 - 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{-4 - 7\mathrm{i}}{|1 + 2\mathrm{i}|^2} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}\,\mathrm{i}.$$

Beispiel 4.2. (*Wurzelziehen im Komplexen - Kartesische Koordinaten*)
Bestimme zu $z \in \mathbb{C}$ alle $w \in \mathbb{C}$, welche

$$w^2 = z$$

erfüllen, speziell für $z = 3 + 4\mathrm{i}$.

Lösung: Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$, wobei $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann muss für w die Gleichung

$$w^2 = (u + \mathrm{i}v)^2 = u^2 - v^2 + 2uv\mathrm{i} \stackrel{!}{=} x + \mathrm{i}y$$

erfüllen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$u^2 - v^2 = x \quad \text{und} \quad 2uv = y.$$

Wir nehmen $y \neq 0$ an, denn ansonsten wäre $z \in \mathbb{R}$, und erhalten aus der zweiten Gleichung $u = \frac{y}{2v}$ und durch Einsetzen eine biquadratische Gleichung in v, nämlich

$$\frac{y^2}{4v^2} - v^2 = x \iff 4v^4 + 4xv^2 - y^2 = 0.$$

Somit erhalten wir

$$v^2 = \frac{1}{2}(-x \pm |z|)$$

und da $|z| \geq x$, müssen wir uns für das positive Vorzeichen entscheiden, dann ist $v^2 \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}$. Schließlich führt dies auf die zwei Lösungen $w_1 = u_1 + v_1\mathrm{i}, w_2 = u_2 + v_2\mathrm{i}$, wobei

$$u_{1,2} = \pm \frac{y}{\sqrt{2(|z| - x)}} \quad \text{und} \quad v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

Speziell für $z = 3 + 4\mathrm{i}$:

$$w_1 = 2 + \mathrm{i} = -w_2.$$

Beispiel 4.3. (*Wurzelziehen im Komplexen - Polarkoordinaten*)
Bestimme wie im vorangegangen Beispiel zu $z \in \mathbb{C}$ alle $w \in \mathbb{C}$, welche

$$w^2 = z$$

erfüllen, speziell für $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

Lösung: Sei $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ die Darstellung von z in Polarkoordinaten. Dann ist

$$w_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \quad \text{und} \quad w_2 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi/2+\pi)},$$

da $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.
<u>Speziell für $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$:</u>

$$r = 2, \varphi = \arctan\sqrt{3} = \pi/3 \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = -w_2$$

4.3 Aufgaben

Bestimme $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und $\overline{z}$ für

(1) $z = 3 + 4\mathrm{i}$,

(2) $z = \dfrac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$,

(3) $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$,

(4) $z = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}$.

Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen:

(5) $z^2 = 2 + 2\mathrm{i}$

(6) $z^2 - 4z + 5 = 0$

(7) $4z^2 - 8z + 13 = 0$

(8) $(1 + 5\mathrm{i})z^2 + (4 + 8\mathrm{i})z + 4 - 4\mathrm{i} = 0$

Kapitel 5
Algebraische, rationale und Wurzelgleichungen

5.1 Beispiele

Beispiel 5.1. (*Biquadratische Gleichung*)
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$4z^4 + 7z^2 - 2 = 0$$

über $\mathbb{C}$.

Lösung: Wir setzen $u = z^2$, lösen zuerst die quadratische Gleichung

$$4u^2 + 7u - 2 = 0$$

und erhalten $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = -2$. Wurzelziehen führt auf

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\,\mathrm{i}, -\sqrt{2}\,\mathrm{i} \right\}.$$

Beispiel 5.2. (*Rationale Gleichung*)
Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x-1}{6x+4} - \frac{2x+2}{9x-6} + \frac{x+1}{9x^2-4} = \frac{1}{6}. \quad (*)$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2/3, 2/3\}$

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \frac{3x-3}{3x+2} - \frac{4x+4}{3x-2} + \frac{6x+6}{(3x+2)(3x-2)} = 1 \iff \\
\iff & (3x-3)(3x-2) - (4x+4)(3x+2) + 6x + 6 = 9x^2 - 4 \iff \\
\iff & 12x^2 + 29x - 8 = 0 \iff x \in \left\{ -\frac{8}{3}, \frac{1}{4} \right\} = \mathbb{L}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.3. (*Wurzelgleichung*)
Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x-3}.$$

Lösung: $4x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{4}$, $x+4 \geq 0 \iff x \geq -4$, $x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$
$\Rightarrow \mathbb{D} = [3, \infty)$
Für $x \geq 3$ ist $\sqrt{4x+1} \geq \sqrt{x+4}$ und somit sind beide Seiten der Gleichung nicht negativ. Quadrieren erhält somit die Lösungsmenge der Gleichung und führt auf

$$4x+1+x+4-2\sqrt{(4x+1)(x+4)} = x-3 \iff 2x+4 = \sqrt{(4x+1)(x+4)}.$$

Wiederum sind beide Seiten der Gleichung für $x \geq 3$ nicht negativ und erneutes Quadrieren liefert

$$4x^2+16x+16 = 4x^2+17x+4 \iff x = 12.$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{12\}$

5.2 Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge folgender biquadratischer Gleichungen über $\mathbb{C}$:

(1) $x^4 + x^2 - 2 = 0$ (2) $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichungen:

(3) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{4x^3 - 4x}$ (4) $-x = \sqrt{x+4}$

(5) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2$ (6) $\sqrt{6+x} = \sqrt{10-4x} - \sqrt{x}$

Kapitel 6

Trigonometrische Funktionen

6.1 Grundlegendes

Aus dem Satz von Pythagoras folgt für $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und Folgerungen

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ▷ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- ▷ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

- ▷ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- ▷ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- ▷ $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- ▷ $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$

Periodizität und Parität

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

- ▷ $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ (sin *und* cos *sind* 2π*-periodisch*)
- ▷ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (sin *ist eine ungerade Funktion*)
- ▷ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (cos *ist eine gerade Funktion*)

Spezielle Phasenverschiebungen

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ▷ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$
- ▷ $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$
- ▷ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$
- ▷ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

Definition von Tangens und Cotangens

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\triangleright\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad\qquad \triangleright\ \cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

Additionstheoreme für Tangens und Cotangens

$$\triangleright\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad\qquad \triangleright\ \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha \pm \tan\beta}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/
$\cot\alpha$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Tabelle 6.1: Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen

6.2 Beispiele

Beispiel 6.1. Man zeige

$$\cos^2(5\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = 1.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= [\cos\ \text{ist}\ 2\pi\text{-periodisch}] = \cos^2(\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = [\cos(\beta + \pi) = -\cos\beta] = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta\right] = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \\
&= [\text{Pythagoras}] = 1 = \text{RHS}
\end{aligned}$$

Bemerkung: LHS steht für *left-hand side*, RHS für *right-hand side*, also für die linke bzw. rechte Seite der Gleichung.

Beispiel 6.2. Bestimme die Definitionsmenge folgender trigonometrischer Gleichung und verifiziere diese:

$$\frac{\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{LHS} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \text{RHS}$$

Beispiel 6.3. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha. \quad (*)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(*) &\iff 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha \iff \sin\alpha = 0 \vee \cos\alpha = 1 \iff \\ &\iff \alpha = k\pi \vee \alpha = 2k\pi \iff \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$

Beispiel 6.4. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}(*) &\iff 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \iff \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \vee \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \vee \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2k+1)\pi \colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$

Beispiel 6.5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos^2\alpha + 3 = \sin^2\alpha + 5\cos\alpha.$$

Lösung: Verwendung von $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ liefert

$$\begin{aligned}2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0 &\iff (\cos\alpha - 2)\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \\ &\iff \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

da für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass $|\cos\alpha| \leq 1$. Somit ist $\mathbb{L} = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

6.3 Aufgaben

Man bestimme den Definitionsbereich folgender Gleichungen und verifiziere diese:

(1) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+5\pi\right)\cos^3\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin^3\left(\frac{\alpha}{2}+3\pi\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)$

(2) $2\sin^2\alpha = 1-\cos(2\alpha)$

(3) $2\cos^2\alpha = 1+\cos(2\alpha)$

(4) $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(5) $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(6) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(7) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge folgender trigonometrischer Gleichungen:

(8) $|\sin\alpha| = \dfrac{1}{2}$

(9) $2\sin(2\alpha)\tan\alpha = 3$

(10) $\sin\alpha + 2\cot\alpha = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

(11) $2\cos^2\alpha + (1+\sqrt{3})\sin\alpha = 2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

KAPITEL 7

EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

7.1 Grundlegendes

Sei $a > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{R} \to (0, \infty) \colon x \mapsto a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a. Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen.

Für $a \neq 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\log_a \colon (0, \infty) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \log_a(x)$$

heißt *Logarithmusfunktion* zur Basis a. Zur Basis e bzw. 10 schreibt man

$$\ln := \log := \log_{\mathrm{e}} \ \ (\textit{Logarithmus naturalis}) \qquad \text{und} \qquad \lg := \log_{10}.$$

Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Seien $a > 0$ mit $a \neq 1$, $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

7.2 Beispiele

Beispiel 7.1. (*Umrechnen von Logarithmen*)
Seien $a, b > 0$ mit $a \neq 1 \neq b$ und $x > 0$. Unter Verwendung der Identität $x = b^{\log_b x}$ erhält man

$$\log_a x = \log_a \left(b^{\log_b x}\right) = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich also nur durch eine multiplikative Konstante.

Beispiel 7.2. Seien $a > 0$ mit $a \neq 1$ und $x \cdot y > 0$. Bei der Verwendung der Logarithmusregeln ist Vorsicht geboten:

$$\log_a(xy) = \log_a |xy| = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

Beispiel 7.3. Vereinfache $\sqrt[3]{\mathrm{e}}^{6 \ln 2}$.

Lösung: $\sqrt[3]{\mathrm{e}}^{6 \ln 2} = \mathrm{e}^{\frac{6}{3} \ln 2} = \mathrm{e}^{2 \ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 4} = 4$

Beispiel 7.4. Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache anschließend soweit wie möglich:

$$\log \frac{x^3}{y^2}.$$

Lösung: $\frac{x^3}{y^2}$ ist für $y \neq 0$ definiert. Damit auch $\log \frac{x^3}{y^2}$ wohldefiniert ist, muss verlangt werden, dass $\frac{x^3}{y^2} > 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x > 0$ ist. Somit ergibt sich für den Gültigkeitsbereich: $x > 0, y \neq 0$. Vereinfachen:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log |y|$$

Beispiel 7.5. (Exponentialgleichungen)

(1) Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Lösung:

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \iff (3^x + 1)(3^x - 3) = 0 \iff x = 1,$$

da $\{x \in \mathbb{R} \colon 3^x = -1\} = \emptyset$. Daher ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

(2) Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$x^{2x} = x.$$

Lösung: $\mathbb{D} = (0, \infty)$

$$x^{2x} = x \overset{x>0}{\iff} 2x \log x = \log x \iff x \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{L}$$

Beispiel 7.6. (Logarithmische Gleichung)
Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichungen:

$$\log(2x+2) + \log(3x-4) = \log(4x^2-4)$$

Lösung: $2x+2>0 \iff x>-1$, $3x-4>0 \iff x>\frac{4}{3}$, $4x^2-4>0 \iff |x|>1$
$\Rightarrow \mathbb{D} = \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

$$\log(2x+2) + \log(3x-4) = \log(2x+2) + \log(2x-2) \iff$$
$$\log(3x-4) = \log(2x-2) \iff 3x-4 = 2x-2 \iff x = 2$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$

7.3 Aufgaben

Vereinfache:

$$(1) \quad \sqrt[5]{10}^{\,2\lg 32} \qquad\qquad (2) \quad \sqrt{\mathrm{e}}^{\,\frac{2}{3}\ln 3}$$

Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache:

$$(3) \quad \log_3 \frac{9x^4}{y^6} \qquad\qquad (4) \quad \ln\sqrt{x^2-y}$$

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

$$(5) \quad a\left(a^{x-3}\right)^{x+2} = a^{3x+5}\left(a^x\right)^{x-6} \text{ für } a \in (0,\infty) \qquad (6) \quad 4^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}} + 1 = 0$$

$$(7) \quad \log(x^3(x-1)) + 3\log\frac{1}{x} = \log(2-x) \qquad (8) \quad \frac{2}{\lg x + 2} - \frac{3}{\lg x - 4} = 2$$

Kapitel 8

Folgen und Reihen

8.1 Grundlegendes

Grenzwertsätze

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot a$
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

Im letzten Punkt muss natürlich gelten, dass $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$.

Folgendarstellung und Reihendarstellung von e^x

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

8.2 Beispiele

Beispiel 8.1. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{3n^4 + 2n^2 + 1}{4n^4 + n^3 + 5n}.$$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}} = \frac{3}{4}$$

Beispiel 8.2. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$b_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Lösung: Verwendung der algebraischen Identität $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ führt auf

$$b_n = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \to \frac{1}{2} \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 8.3. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$c_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \\ &= [n \to n+1] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{=1} = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Beispiel 8.4. Untersuche ob die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{3j}}{8^{2j}} = (*)$$

konvergiert und berechne im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

Lösung:

$$(*) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8^j}{8^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{8^j}$$

Die Reihe ist konvergent, da $1/8 < 1$. Berechnung des Reihenwertes:

$$(*) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{8^{j+1}} = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{8^j} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

Beispiel 8.5. Bestimme für welche $x, y \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{3j}}{y^{2j}}$$

konvergiert. Berechne sodann den Reihenwert.

Lösung:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{3j}}{y^{2j}} = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn

$$\left| \frac{-x^3}{y^2} \right| < 1 \iff |x|^3 < y^2.$$

Berechnung des Reihenwerts:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^{j+2} = \frac{x^6}{y^4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^j =$$

$$= \frac{x^6}{y^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^3}{y^2}} = \frac{x^6}{y^2(y^2 + x^3)}$$

8.3 Aufgaben

Untersuche die jeweilige Folge auf Konvergenz und berechne, falls möglich, den Grenzwert.

(1) $a_n = \dfrac{42n^{42} + 17n^{17}}{13n^{37} + 31n^{41}}$

(2) $b_n = \dfrac{3n^2 + 1}{2n^3 + n}$

(3) $c_n = \sqrt{n^3 + 2\sqrt{n^3}} - \sqrt{n^3}$

(4) $d_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$

(5) $e_n = \left(1 - \dfrac{3}{2n} \right)^{\frac{n}{3}+2}$

(6) $f_n = \left(\dfrac{n^2 - 4n + 4}{n^2 + 2n + 1} \right)^n$

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechne, falls möglich, den Reihenwert.

$$(7) \quad \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{3^{2j}}{4^j} \qquad\qquad (8) \quad \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{6^{2j}}$$

Bestimme für welche $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren und bestimme sodann den Reihenwert.

$$(9) \quad \sum_{j=-2}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \right)^j \qquad (10) \quad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{4j} \left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{y^2} \right)^{2j}$$

Kapitel 9
Grenzwerte und Stetigkeit

9.1 Grundlegendes

Sei $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $x \in D$ stetige Funktion. Dann gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x).$$

Im Fall der Stetigkeit können also Grenzwert und Funktionsauswertung vertauscht werden.

Wichtige Grenzwerte

$$\triangleright \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \triangleright \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

9.2 Beispiele

Beispiel 9.1. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}.$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

Bemerkung: Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-9}{x-3}$ besitzt demnach in $x=3$ eine hebbare Singularität, d.h. sie kann dort stetig fortgesetzt werden, und zwar zu $x \mapsto x+3$.

Beispiel 9.2. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = (*).$$

Lösung: Variante 1:

$$(*) = \left[1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$$

$$= [z \mapsto z^2 \text{ stetig}] = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Variante 2:

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

9.3 Aufgaben

Berechne folgende Grenzwerte:

(1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ (2) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ (4) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

Bestimme jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert an den angegebenen Stellen.

(5) $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ bei $x = -1$ (6) $f_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$ bei $x = -1$

(7) $g_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$ bei $x = -1, 1$ (8) $g_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}$ bei $x = -1, 1$

Kapitel 10

Differentialrechnung

10.1 Grundlegendes

Differentiationsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $(f + \lambda \cdot g)' = f' + \lambda \cdot g'$ (*Linearität*)
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (*Produktregel*)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (*Quotientenregel*)
- $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ (*Kettenregel*)

(Für die Quotientenregel muss natürlich $g(x) \neq 0$ erfüllt sein. Die Kettenregel gilt nur, falls die Hintereinanderausführung existiert.)

Ableitung elementarer Funktionen

Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\lambda = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$

10.2 Beispiele

Beispiel 10.1. (*Produktregel*)
Differenziere

$$f(z) = z^2 \mathrm{e}^z \sin z.$$

Lösung: Anwendung der Produktregel liefert

$$f'(z) = 2z\mathrm{e}^z \sin z + f(z) + z^2\mathrm{e}^z \cos z = z\mathrm{e}^z((2+z)\sin z + z\cos z).$$

Beispiel 10.2. (*Quotientenregel*)
Berechne die Ableitung von $\tan x$.

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = [\text{Quotientenregel}] = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Beispiel 10.3. (*Kettenregel*)
Differenziere

$$g(y) = \sin \mathrm{e}^{\tan y^5}.$$

Lösung: Durch dreimaliges Anwenden der Kettenregel erhalten wir

$$g'(y) = \cos\left(\mathrm{e}^{\tan y^5}\right) \cdot \mathrm{e}^{\tan y^5} \cdot (1 + \tan^2 y^5) \cdot 5y^4.$$

Beispiel 10.4. (*Ableitung der Umkehrfunktion*)

(1) Sei $f\colon D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar. Weiters sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist auch f^{-1} auf B differenzierbar. Wir bestimmen die Ableitung von f^{-1} wie folgt: Für $y \in B$ ist

$$x(y) = f^{-1}(y) \iff f(x(y)) = y.$$

Implizites Differenzieren nach y (Anwendung der Kettenregel) ergibt

$$f'(x(y)) \cdot x'(y) = 1.$$

Da $f'(x(y)) \neq 0$ gilt weiters

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

Durch Einsetzen von $x(y) = f^{-1}(y)$ erhalten wir die *Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion*:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(2) Bestimme die Ableitung von $\ln|x|$.

Lösung: Anwendung der oben geschilderten Vorgehensweise auf $\ln|x|$ für $x \neq 0$:

$$y(x) = \ln|x| \iff \mathrm{e}^{y(x)} = |x|.$$

Da $(|x|)' = \operatorname{sign} x$ für $x \neq 0$, führt implizites Differenzieren nach x auf

$$\mathrm{e}^{y(x)} y'(x) = \operatorname{sign} x \iff (\ln|x|)' = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

10.3 Aufgaben

Bestimme jeweils die Ableitung der angegebenen Funktion. (Es braucht nicht untersucht zu werden, wo die Funktionen definiert bzw. differenzierbar sind.)

(1) $f_1(k) = 4k^x,\ x \neq 0$

(2) $f_2(z) = \sin^2 z$

(3) $f_3(x) = x^3 \mathrm{e}^x \tan x$

(4) $f_4(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$

(5) $f_5(x) = \sinh x := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$

(6) $f_6(x) = \cosh x := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$

(7) $f_7(a) = \cot a$

(8) $f_8(b) = \dfrac{\sqrt{b}}{\sin^4 b}$

(9) $f_9(a) = \sqrt{\sinh \mathrm{e}^{a^{13}/2}}$

(10) $g_1(c) = \dfrac{\cos c^2 + c^3}{\mathrm{e}^{\sin c - 2c^3}}$

(11) $g_2(x) = \arcsin x$

(12) $g_3(x) = \arccos x$

(13) $g_4(x) = \arctan x$

(14) $g_5(x) = \operatorname{arsinh} x$

(15) $g_6(x) = \operatorname{arcosh} x$

(16) $g_7(x) = \operatorname{artanh} x$

(17) $g_8(x) = a^x,\ a > 0$

(18) $g_9(x) = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$

(19) $h_1(z) = (\sin z)^{\cos z}$

(20) $h_2(u) = (\tan u)^{(\tan u)^{\tan u}}$

Kapitel 11

Integralrechnung

11.1 Grundlegendes

Im Folgenden steht c für eine reelle Konstante.

Integrationsregeln

Seien f_L, g_L, f_S und $(f_S \circ g_S) \cdot g_S'$ integrierbar, g_S, f_P und g_P differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\displaystyle\int \Big(f_L(x) + \lambda \cdot g_L(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f_L(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int g_L(x)\,\mathrm{d}x$ (*Linearität*)
- $\displaystyle\int f_S\big(g_S(x)\big) g_S'(x)\,\mathrm{d}x = \int f_S(z)\,\mathrm{d}z\Big|_{z=g_S(x)}$ (*Substitutionsregel*)
- $\displaystyle\int f_P(x) \cdot g_P'(x)\,\mathrm{d}x = f_P(x) \cdot g_P(x) - \int f_P'(x) \cdot g_P(x)\,\mathrm{d}x$ (*Partielle Integration*)

Stammfunktionen elementarer Funktionen

Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- $\displaystyle\int x^\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$

11.2 Beispiele

Beispiel 11.1. (*Substitution*)

(1) Berechne $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 = u, 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\right] = \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u = $$
$$= -\frac{1}{3}\cos u + c = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$$

(2) Berechne $\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\tan x = z, \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}z\right] = \int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z + c = \mathrm{e}^{\tan x} + c$$

(3) Berechne $\int_1^{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \frac{\sqrt{4\ln x + 1}}{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

$$\int_1^{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \frac{\sqrt{4\ln x + 1}}{2x}\,\mathrm{d}x = \left[u = 4\ln x + 1, \mathrm{d}u = \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\,\sqrt{u^3}\Big|_{u=1}^{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{12}$$

Beispiel 11.2. (*Partielle Integration*)

(1) Berechne $\int z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$.

Lösung:

$$\int z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = [\text{partielle Integration}] = z\mathrm{e}^z - \int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z(z-1) + c$$

(2) Berechne $\int \ln|x|\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

$$\int 1 \cdot \ln|x|\,\mathrm{d}x = [\text{partiell}] = x\ln|x| - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x(\ln|x| - 1) + c$$

(3) Berechne $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lösung: Partielle Integration liefert

$$-\frac{1}{x}\ln x\Big|_{x=1}^{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

11.3 Aufgaben

Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}y$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \arcsin a\,\mathrm{d}a$

(6) $\displaystyle\int \arctan b\,\mathrm{d}b$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} u^2\cos(3u)\,\mathrm{d}u$

(8) $\displaystyle\int \ln(1+w^2)\,\mathrm{d}w$

(9) $\displaystyle\int_b^c a^x\,\mathrm{d}x,\ a>0,\ b,c\in\mathbb{R}$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin(2z)-\sin z}{\sqrt{\sin^2 z+\cos z}}\,\mathrm{d}z$

(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{9^x+1}\,\mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$

Kapitel 12

Anwendungen zur Differential- und Integralrechnung

12.1 Grundlegendes

Anwendungen zur Differentialrechnung

Sei $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar. Dann ist die *Tangente* t_a an den Graphen von f im Punkt $x = a$ gegeben durch

$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Für $\alpha = \sphericalangle(t, x\text{-Achse})$ gilt $\tan(\alpha) = f'(a)$.

Anwendungen zur Integralrechnung

Rotationskörper: Das *Volumen des Drehkörpers*, welcher durch Rotation des Graphen der integrierbaren Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ um die x-Achse entsteht, ist

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

bei Rotation um die y-Achse

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bogenlänge: Sei f nun zusätzlich differenzierbar. Die *Bogenlänge* des Graphen von f ist durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

gegeben.

Mantelfläche: Die *Mantelfläche des Drehkörpers*, welcher durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht, ist

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

12.2 Aufgaben

(1) Bestimme die Tangente an den Graphen der Funktion $f_1(x) = x^2 \ln |x|$ im Punkt $x = -\mathrm{e}$.

(2) Bestimme die Tangenten mit Steigung -3 an den Graphen der Funktion $f_2(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

(3) Bestimme jene x_0, für welche die Tangente bei $x = x_0$ an den Graphen von $f_3(x) = x|x-2|$ die x-Achse unter einem Winkel von $135°$ schneidet.

(4) Berechne das Volumen des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f_4\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tan x$$

um die x-Achse entsteht.

(5) Berechne das Volumen des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f_5\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin x$$

um die y-Achse entsteht.

(6) Berechne die Bogenlänge des Graphen der Funktion $f_6(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}$, $0 \le x \le 1$.

(7) Berechne die Mantelfläche des Drehkörpers, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion $f_7(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, um die x-Achse entsteht.