Die Welt der nicht-expansiven Abbildungen auf einer konvexen Menge.[1]

Michael Dymond

Universität Innsbruck

2. Dezember 2015

[1] Eine Zusammenarbeit mit Christian Bargetz.

Kontraktionen.

Es sei C eine 'schöne' Teilmenge eines Vektorraums V. Es sei $d : V \times V \to [0, \infty)$ die Abstand-Abbildung. Das heißt:

$$d(y, x) = \text{der Abstand zwischen } x \text{ und } y$$

für alle $x, y \in V$.

Definition

Eine Abbildung $f : C \to C$ heißt Kontraktion, falls es $\lambda \in [0, 1)$ gibt, so dass

$$d(f(y), f(x)) \leq \lambda d(y, x)$$

für alle $x, y \in C$ gilt.

Der Banach'sche Fixpunktsatz

Theorem (Banach, 1922)

Jede Kontraktion $f : C \to C$ besitzt einen eindeutigen Fixpunkt x_0. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$$

für alle $x \in C$.

Der Abstand zwischen zwei Abbildungen.

Definition

Es seien $f, g : C \to C$ Abbildungen. Der Abstand zwischen f und g wird als

$$d_\infty(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) \colon x \in C\}$$

definiert.

Definition

Sei $f : C \to C$ eine Abbildung und $r > 0$. Der Ball mit Mittelpunkt f und Radius r wird als

$$B(f, r) = \{g : C \to C \colon d_\infty(f, g) < r\}$$

definiert.

Die Welt der Kontraktionen ist nicht vollständig.

- **Problem**: Der Raum $\mathcal{N}$ aller Kontraktionen $f : C \to C$ ist *kein vollständiger Raum.*

  [Hardy, "A Mathematician's Apology", 1941]
  "The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics."

Der Welt der nicht-expansiven Abbildungen.

- Um den Raum $\mathcal{N}$ aller Kontraktionen $f : C \to C$ *vollständig* zu machen, müssen wir die "fehlenden Abbildungen" hinzufügen.

Definition

Eine Abbildung $f : C \to C$ heißt *nicht expansiv*, falls es $\lambda \in [0, 1]$ gibt, so dass

$$d(f(y), f(x)) \leq \lambda d(y, x)$$

für alle $x, y \in C$ gilt.

- Der Raum $\mathcal{M}$ aller nicht expansiven Abbildungen ist vollständig.

Wie viele nicht-expansive Abbildungen sind Kontraktionen?

- Der Raum $\mathcal{N}$ aller Kontraktionen $f : C \to C$ ist eine Teilmenge des Raums $\mathcal{M}$ aller nicht-expansiven Abbildungen $f : C \to C$.
- **Frage:** Wie groß ist die Teilmenge $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$?

Poröse Mengen.

Definition

- Eine Teilmenge P eines metrischen Raums $\mathcal{M}$ heißt *porös*, falls man beliebig in der Nähe von jedem Punkt in P eine große Lücke finden kann.
- Eine Teilmenge E von $\mathcal{M}$ heißt σ-Porös, falls sie von porösen Teilmengen aufgebaut werden kann.

- σ-Poröse Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums $\mathcal{M}$ sind *winzige* Teilmengen von $\mathcal{M}$.

Fast alle nicht-expansiven Abbildungen sind keine Kontraktionen.

Theorem (Bargetz, D., 2015)

Die Menge $\mathcal{N}$ aller Kontraktionen $f : C \to C$ ist eine σ-Poröse Teilmenge des Raums $\mathcal{M}$ aller nicht-expansiven Abbildungen $f : C \to C$. Das heißt $\mathcal{N}$ ist eine winzige Teilmenge von $\mathcal{M}$.

Laufende Forschung.

- Wie würde sich die Lage ändern, wenn C keine Teilmenge eines Vektorraums sondern eine Teilmenge eines metrischen Raums wäre?

Vielen Dank!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!