(1) Lineare Abbildungen: Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}, f \mapsto f\left(\frac{15}{42}\right)$

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2x - 3y + 1$

(d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x + 3y, -x + y)$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(2) Räume und Gruppen linearer Abbildungen: Es seien V und W Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{f\colon V \to W \text{ linear}\}$$

ein K-Vektorraum ist. Zeigen Sie weiters, dass

$$\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}_K(V,V) := \{f\colon V \to V \text{ linear und bijektiv}\}$$

mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe ist. Ist $\mathrm{GL}(V)$ eine kommutative Gruppe?
Anmerkung: Die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ wird als allgemeine lineare Gruppe („**g**eneral **l**inear group“) oder Automorphismengruppe bezeichnet.

(3) Ableitung von Polynomfunktionen: Es sei

$$\mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens 2 mit der Basis

$$\underline{v} = (1, x, x^2) := (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2).$$

Wir betrachten die aus der Analysis 1 bekannte Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}), f \mapsto f'.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ bezüglich der Basis $\underline{v} = (1, x, x^2)$. Bestimmen Sie weiters den Rang der Abbildungsmatrix. Welche Information über die Abbildung liefert dieser?

Wie sieht die Abbildungsmatrix aus, wenn wir statt $\mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ den Raum $\mathcal{P}_{\leq k}(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad höchstens k für ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Basis $(1, x, \ldots, x^k)$ betrachten?

(4) Basen und lineare Abbildungen: Es sei

$$\underline{v} = ((1,2,1),(1,0,1),(0,1,1)) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3 \qquad \text{und} \qquad \underline{w} = ((1,1,0),(1,2,0),(1,4,1)) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$$

und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3, \qquad f(v_2) = 2w_1 + 3w_2 - w_3, \qquad f(v_3) = w_1 - 2w_2 + w_3$$

definierte lineare Abbildung. Handelt es sich bei $\underline{v}$ und $\underline{w}$ um Basen von $\mathbb{R}^3$? Ist f ein Isomorphismus?

(5) Basiswechsel: Es sei $\underline{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hat bezüglich $\underline{e}$ die Abbildungsmatrix

$$M(T,\underline{e},\underline{e}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis $\underline{v}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass die Abbildungsmatrix $M(T,\underline{v},\underline{v})$ eine Diagonalmatrix ist.

(6) Lineare Abbildungen und konvexe Mengen:
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $k \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{conv}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ die konvexe Hülle der Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle linearen Abbildungen $f\colon V \to V$ die Beziehung

$$f(\operatorname{conv}(\{v_1, \ldots, v_k\}) = \operatorname{conv}(\{f(v_1), \ldots, f(v_k)\})$$

gilt.

(b) Wir betrachten das Einheitsquadrat $[0,1]^2 = \operatorname{conv}(\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\})$ in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen und skizzieren Sie das Bild $f_i([0,1]^2)$ unter den linearen Abbildungen, die durch die folgenden Abbildungsmatrizen gegeben sind. Berechnen Sie weiters jeweils das Volumen von $f_i([0,1]^2)$.

(i) $M(f_1,\underline{e},\underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $M(f_2,\underline{e},\underline{e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $M(f_3,\underline{e},\underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$