

- (1) LINEARE ABBILDUNGEN: Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}([0, 1])$ den Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]), f \mapsto g, g(t) = t^2 f(\frac{7}{19})$

(b) $\mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(\frac{19}{42})$

(c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4x + 1y, -2x + 3y)$.

(d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x - 4y + 2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- (2) RÄUME UND GRUPPEN LINEARER ABBILDUNGEN: Es seien V und W Vektorräume über K . Zeigen Sie, dass die Menge

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{f: V \rightarrow W \text{ linear}\}$$

ein K -Vektorraum ist. Zeigen Sie weiters, dass

$$\text{GL}(V) := \text{Aut}_K(V, V) := \{f: V \rightarrow V \text{ linear und bijektiv}\}$$

mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe ist. Ist $\text{GL}(V)$ eine kommutative Gruppe?

Anmerkung: Die Gruppe $\text{GL}(V)$ wird als allgemeine lineare Gruppe („general linear group“) oder Automorphismengruppe bezeichnet.

- (3) ABLEITUNG VON POLYNOMFUNKTIONEN: Es sei

$$\mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

der \mathbb{R} -Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens 2 mit der Basis

$$\underline{v} = (1, x, x^2) := (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2).$$

Wir betrachten die aus der Analysis 1 bekannte Abbildung

$$\frac{d}{dx}: \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}), f \mapsto f'.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{d}{dx}$ bezüglich der Basis $\underline{v} = (1, x, x^2)$. Bestimmen Sie weiters den Rang der Abbildungsmatrix. Welche Information über die Abbildung liefert dieser?

Wie sieht die Abbildungsmatrix aus, wenn wir statt $\mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ den Raum $\mathcal{P}_{\leq k}(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad höchstens k für ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Basis $(1, x, \dots, x^k)$ betrachten?

- (4) BASEN UND LINEARE ABBILDUNGEN: Es sei

$$\underline{v} = ((1, -2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1)) \in (\mathbb{R}^3)^3 \quad \text{und} \quad \underline{w} = ((0, 1, 1), (1, 2, -2), (2, -3, 1)) \in (\mathbb{R}^3)^3$$

und $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch

$$f(v_1) = 2w_1 - w_2 + w_3, \quad f(v_2) = -2w_1 + 2w_2 - 2w_3, \quad f(v_3) = w_1 - 3w_2 + 4w_3$$

definierte lineare Abbildung. Handelt es sich bei \underline{v} und \underline{w} um Basen von \mathbb{R}^3 ? Ist f ein Isomorphismus?

- (5) BASISWECHSEL: Es sei $\underline{e} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ die Standardbasis von \mathbb{R}^3 . Die lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat bezüglich \underline{e} die Abbildungsmatrix

$$M(T, \underline{e}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis \underline{v} von \mathbb{R}^3 so, dass die Abbildungsmatrix $M(T, \underline{v}, \underline{v})$ eine Diagonalmatrix ist.

- (6) LINEARE ABBILDUNGEN UND KONVEXE MENGEN:

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $k \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_k \in V$. Wir bezeichnen mit $\text{conv}(\{v_1, \dots, v_k\})$ die konvexe Hülle der Menge $\{v_1, \dots, v_k\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle linearen Abbildungen $f: V \rightarrow V$ die Beziehung

$$f(\text{conv}(\{v_1, \dots, v_k\})) = \text{conv}(\{f(v_1), \dots, f(v_k)\})$$

gilt.

- (b) Wir betrachten das Einheitsquadrat $[0, 1]^2 = \text{conv}(\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\})$ in \mathbb{R}^2 . Bestimmen und skizzieren Sie das Bild $f_i([0, 1]^2)$ unter den linearen Abbildungen, die durch die folgenden Abbildungsmatrizen gegeben sind. Berechnen Sie weiters jeweils das Volumen von $f_i([0, 1]^2)$.

$$(i) M(f_1, \underline{e}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (ii) M(f_2, \underline{e}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (iii) M(f_3, \underline{e}, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vokabeln

Abbildung

Vektorraum

Menge

Gruppe

Hintereinanderausführung

Rang

Polynom

Isomorphismus

konvexe Hülle

Einheitsquadrat

Vocabulary

mapping

vector space

set

group

composition

rank

polynomial

isomorphism

convex hull

unit square