Leopold-Franzens-Universität

universität innsbruck

Bachelorarbeit im Fach Physik

Über den Satz von Stone-von Neumann

Eine Untersuchung des von von Neumann erbrachten Beweises

Lukas Willmann

29. Juli 2021

Betreut durch Dr. Fritz Tobias,
Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.
Ich erkläre mich mit der Archivierung der vorliegenden Bachelorarbeit einverstanden.

Innsbruck, am 29. Juli 2021 Lukas Willmann

1 Einleitung

In der klassischen Physik ist bei gegebenen Rahmenbedingungen, d.h. Masse und Felder, die Entwicklung eines Zustandes eindeutig durch Ort und Impuls bestimmt. In der Quantenphysik wird dazu das wesentlich komplexere Konstrukt einer Wellenfunktion verwendet. Diese ist bereits bei einem Teilchen im eindimensionalen Raum Element eines Hilbertraumes der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ und damit im Gegensatz zum klassischen Fall nicht endlichdimensional. Es stellt sich somit die Frage, ob diese Beschreibung der Quantenphysik, zum Beispiel im Wellenbild, also mit den Schrödingerschen Orts- und Impulsoperatoren, die einfachst mögliche ist. Diese Frage soll der Satz von Stone-von Neumann beantworten, in dem er die Darstellungen der Orts- und Impulsoperatoren klassifiziert. Dabei bleiben wir der Vorstellung treu, dass Messergebnisse Eigenwerte selbst-adjungierter Operatoren sind. Des Weiteren setzen wir voraus, dass die Kommutatorrelationen für den Orts- und Impulsoperator $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$, welche sich in vielerlei Hinsicht als essentiell erwiesen haben, weiterhin gültig sind. So besagt der Satz von Stone-von Neumann, dass der Hilbertraum, auf dem die verallgemeinerte Orts- und Impulsoperator wirken, bereits bis auf Isomorphie einer direkten Summe von $L^2(\mathbb{R})$ gleicht und die Orts- und Impulsoperatoren auf den einzelnen $L^2(\mathbb{R})$ Unterräumen der Schrödingerschen Darstellung entsprechen. Unter Isomorphismus versteht man hierbei die Konjugation mit einer unitären Abbildung. Somit ist der $L^2(\mathbb{R})$ tatsächlich der grundlegendste Raum der Wellenfunktionen. Beispielsweise könnte man eine Wellenfunktion auch als Tupel $(\varphi, \psi) \in L^2(\mathbb{R})^2$ beschreiben. Damit wären die Operatoren der Form $(\varphi, \psi) \mapsto (A\varphi, A\psi)$ und ihre Eigenvektoren (ϕ_i, ϕ_j) mit ϕ_i, ϕ_j Eigenvektoren von A zum selben Eigenwert.

In dieser Arbeit soll der Beweis des Satzes von Stone-von Neumann nachvollzogen, sowie mit Beispielen illustriert werden. Von besonderer Bedeutung ist es dabei, die Idee zu dem endgültigen Beweisansatz zu vermitteln. Auch konnte durch eine Vereinfachung auf das, in verbreiteten Beweisen auftretende, explizite Ausrechnen eines Gaußschen Integrales vollständig verzichtet werden. Dies macht den Beweis etwas übersichtlicher und konzeptionell leichter zu fassen. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den Fall eines Ein-Teilchensystems in einer Dimension. Der Beweis funktioniert fast analog für mehrere Dimensionen und Vielteilchensysteme, mit endlich vielen Teilchen wie in [7] gezeigt wird.

2 Grundlagen

2.1 Grundlegende Überlegungen zu den Darstellungen der Kanonischen Kommutatorrelation

Ein endlichdimensionaler Raum lässt sich für die Repräsentation der kanonischen Kommutatorrelation ausschließen, denn es gilt $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$. Wenn Operatoren auf einem endlichen Raum die Kanonische Kommutatorrelation $AB - BA = \mathrm{i}\hbar$ erfüllen würden, so wäre aber $\mathrm{spur}(AB) - \mathrm{spur}(BA) \neq 0$. [1] Es lässt sich weiter zeigen, dass nicht beide Operatoren A, B beschränkt sein können. Nehmen wir das Gegenteil an. Es gilt allgemein für beschränkte Operatoren $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$, wie wir im folgenden zeigen werden. Angenommen es gibt eine Folge von Vektoren ψ_i, sodass die folgende Gleichung beliebig genau approximiert werden kann, das heißt AB hat einen verallgemeinerten Eigenwert λ.

$$AB\psi_i \simeq \lambda\psi_i \tag{2.1}$$

Somit folgern wir durch Multiplikation mit B, aufgrund der Beschränktheit, dass die folgende Gleichung beliebig genau approximiert werden kann:

$$BA(B\psi_i) \simeq \lambda B\psi_i \tag{2.2}$$

Falls ψ_i nicht gegen 0 konvergiert, so kann wegen (2.1) und $\lambda \neq 0$ auch $B\psi_i$ nicht gegen 0 konvergieren. Ansonsten wäre Gleichung (2.1) verletzt, da für beschränktes A, $\lim_{B\psi_i \to 0} AB\psi_i = 0$ gilt. AB hat also ebenfalls den verallgemeinerten Eigenwert λ. Aufgrund der Symmetrie ist die behauptete Aussage gezeigt. Wegen der Kommutatorrelation würde aber gelten, $\sigma(AB) = \sigma(BA) + \mathrm{i}\hbar$, wobei die Addition elementweise zu verstehen ist. Da das Spektrum selbst-adjungierter Operatoren nicht leer ist, erhalten wir einen Widerspruch. [2][S.738-739]

Nach den vorherigen Ausschlüssen möchten ich noch eine konstruktive Überlegung anstellen. Es seien A, B die Ersätze für den Orts- und Impulsoperator. Da der der Ersatz für den Ortsoperator per Annahme selbstadjungiert ist, kann man ihn diagonalisieren. Wir nehmen zusätzlich an, dass alle verallgemeinerten Eigenwerte Vielfachheit 1 haben. Dies ist eine starke Forderung, man könnte aber behaupten, dass sie gewissermaßen physikalisch gerechtfertigt ist. Wir fordern also $QAQ^{-1} = \hat{x}$. Wir transformieren nun durch Konjugation mit dieser unitären Abbildung Q und erhalten das Paar $\hat{x}, B'$, welches die Kanonischen Kommutatorrelationen erfüllt. Die kanonische Kommutatorrelation in der Form $(\mathrm{i}\hbar^{-1}B')\hat{x}\psi = \hat{x}(\mathrm{i}\hbar^{-1}B')\psi + \psi$ erinnert an die Produktregel mit $\mathrm{i}\hbar^{-1}B' = \partial_x$. Durch mehrmalige Anwendung der Kommutatorrelation erhält man $(\mathrm{i}\hbar^{-1}B')\hat{x}^n\psi = \hat{x}^n(\mathrm{i}\hbar^{-1}B')\psi + n\hat{x}^{n-1}\psi$. Dies lässt bereits vermuten, dass $(\mathrm{i}\hbar^{-1}B')$ ähnlich wie der Differenzialoperator wirkt. Um auf Polynome in x genau wie der Differenzialoperator zu wirken, müsste man zeigen, dass für ein ψ das Folgende gilt: $\mathrm{i}\hbar^{-1}B'\psi = \psi'$ und $\psi'(x) \neq 0$ Allerdings sieht man leicht, dass dies nicht gelten muss, zum Beispiel erfüllt $-\mathrm{i}\hbar\partial_x + f$ mit f einer Funktion nach x die selbe Kommutatorrelation wie B' und zwar $[\hat{x}, \cdot] = i\hbar$, unterscheidet sich aber vom Differenzialoperator. Wir zeigen nun, dass B' bereits notwendigerweise von der Form $-\mathrm{i}\hbar\partial_x + f$ ist. Es gilt $[\hat{x}, B' + \mathrm{i}\hbar\partial_x] = 0$. Analog zum endlichdimensionalen Fall lassen sich kommutierende Operatoren gleichzeitig diagonalisieren. Somit lässt sich der selbst adjungierte Operator $B' + \mathrm{i}\hbar\partial_x$ gemeinsam mit $\hat{x}$ diagonalisieren. Das heißt $B' + \mathrm{i}\hbar\partial_x = f$, mit f einer Funktion nach x. Wir möchten eine Konjugation mit einer Funktion h finden, welche, die folgende Gleichung erfüllt: $g^{-1}(-\mathrm{i}\hbar\partial_x)g = -\mathrm{i}\hbar\partial_x + f(x)$. f ist selbst adjungiert uns somit reell. Diese Bedingung ist mit der Differenzialgleichung $-\mathrm{i}\hbar g^{-1}g' = f$ äquivalent. Diese Differenzialeichung ist ein klassischer Fall für Separation der Variablen. Ihre Lösung ist $h(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}$, wobei $G(x)$ die reelle Stammfunktion von g ist. Konjugieren mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}$ lässt den Ortsoperator $\hat{x}$ gleich und transformiert B' zum Impulsoperator $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$. Insgesamt erhält man durch Konjugation mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}Q$ die Transformation $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}QA(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}Q)^{-1} = \hat{x}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}QB(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hbar G(x)}Q)^{-1} = \hat{p}$. Dies ist eine Aussage vom ähnlichen Typ wie sie im Satz von Stone-von Neumann gezeigt werden soll, allerdings haben wir eine sehr starke Annahme gemacht und die Form des Impulsoperators nur für Polynome bestimmt. [3]

2.2 Motivation für den Satz von Stone–von Neumann

Mit der von Paul Dirac entwickelten algebraischen Methode lässt sich der quantenmechanische Oszillator beschreiben, indem ein Ab- und Aufstiegsoperator $\hat{a}, \hat{a}^*$ konstruiert wird.

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + \mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \qquad \hat{a}^* = \frac{m\omega\hat{x} - \mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \tag{2.3}$$

Der Hamilton Operator des harmonischen Oszillators lässt sich damit wie folgend beschreiben:

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^*\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.4}$$

Alleine aufgrund der Kommutatorrelation, die von $\hat{x}, \hat{p}$ vererbt wird: $[\hat{a}, \hat{a}^*] = 1$, lässt sich zeigen, dass der Abstiegsoperator einen Eigenwert von H auf einen um $\hbar\omega$ niedrigeren Eigenwert abbildet und der Aufstiegsoperator einen Eigenwert von H auf einen um $\hbar\omega$ höheren Eigenwert abbildet. Anstelle von H wird der vereinfachte Operator $N = \hat{a}^*\hat{a}$ verwendet, welcher offensichtlich die selben Eigenvektoren hat. Da N selbst-adjungiert ist gibt es mindestens einen Eigenvektor. Dabei gilt für einen Eigenvektor φ zum Eigenwert n ,$N\phi = n\phi$

$$N(\hat{a}\phi) = \hat{a}^*\hat{a}(\hat{a}\phi) = \hat{a}(\hat{a}^*\hat{a} - 1)\phi = (n-1)\hat{a}\phi \tag{2.5}$$

$$N(\hat{a}^*\phi) = \hat{a}^*\hat{a}(\hat{a}^*\phi) = \hat{a}^*(\hat{a}^*\hat{a} + 1)\phi = (n+1)\hat{a}^*\phi \tag{2.6}$$

Ein Zustand $\hat{a}\phi$ kann nur null sein, falls ϕ Eigenwert $n = 0$ hat.

$$0 = \hat{a}^*0 = \hat{a}^*(\hat{a}\phi) = n\phi \tag{2.7}$$

Außerdem sind alle Eigenwerte n nichtnegativ.

$$n\langle\phi, \phi\rangle = \langle N\phi, \phi\rangle = \langle\hat{a}^*\hat{a}\phi, \phi\rangle = \langle\hat{a}\phi, \hat{a}\phi\rangle \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Damit müssen die Eigenwerte bereits aus $\mathbb{N}_0$ sein. Ansonsten könnten wir den Operator $\hat{a}$ auf einen nicht ganzzahligen Eigenvektor anwenden und würden immer einen aufgrund (2.7) von Null verschiedenen Eigenvektor zu einem niedrigeren Eigenwert erhalten. Irgendwann wären diese aber negativ. Des Weiteren können wir so folgern, dass jeder Eigenvektor ϕ durch wiederholtes Anwenden von $\hat{a}$ irgendwann auf 0 abgebildet wird. Umgekehrt ist ein Vektor ϕ_0 aus dem Kern von $\hat{a}$ offensichtlich ein Eigenvektor von N zum Eigenwert 0, $\hat{a}^*\hat{a}\phi_0 = 0\phi_0$. Durch n-maliges Anwenden von $\hat{a}^*$ erhalten wir also einen Eigen- oder Nullvektor $(\hat{a}^*)^n\phi_0 = \phi_n$ zum

Eigenwert n. Es bleibt noch zu zeigen, dass ϕ_n kein Nullvektor ist. Als Induktionsanfang ist ϕ_0 nicht null. Als Induktionsschritt wäre nun $\phi_n = 0$, so würde gelten:

$$0 = \hat{a}\hat{a}^*\phi_{n-1} = (\hat{a}^*\hat{a} + 1)\phi_{n-1} = n\phi_{n-1} \tag{2.9}$$

Was einen Widerspruch mit der Induktionsannahme $\phi_{n-1} \neq 0$ bildet. Ein Zustand $\hat{a}^*\varphi$ ist also genau dann Eigenwert von N zum Eigenwert $n+1$, wenn φ Eigenvektor zum Eigenwert n ist. Wählen wir nun eine Orthogonalbasis von $\ker \hat{a}$, bestehend aus $\{\phi_{0,i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$. So bilden die $(\hat{a}^*)^n\phi_{0,i} = \phi_{n,i}$ ein Erzeugendensystem des Eigenraums zum Eigenwert n. Es bleibt außerdem die Orthogonalität der $\phi_{n,i}$ erhalten.

$$\langle\phi_{n,i}, \phi_{n,j}\rangle = \langle\hat{a}^*\phi_{n-1,i}, \hat{a}^*\phi_{n-1,j}\rangle = \langle\phi_{n-1,i}, \hat{a}\hat{a}^*\phi_{n-1,j}\rangle = n\langle\phi_{n-1,i}, \phi_{n-1,j}\rangle \tag{2.10}$$

Mit Induktion gilt somit:

$$\langle\phi_{n,i}, \phi_{n,j}\rangle = \delta_{i,j} n! \tag{2.11}$$

Es bildet $\{\phi_{n,i}\}_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ damit ein Orthogonalsystem. Da N, beziehungsweise H selbstadjungiert ist, spannen dessen Eigenvektoren $\{\phi_{n,i}\}_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ den gesamten Hilbertraum auf. Außerdem sind bei dem harmonischen Osszilator die Eigenwerte nicht entartet: $\{\phi_{n,i}\}_{n,i\in\mathbb{N}_0}$=$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. [4][S. 442-448]

Da wir, bis auf den letzten Satz, nur Argumente verwendet haben, die auf der Kommutatorrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ und der Selbstadjungiertheit beruhen, gelten diese auch, wenn wir anstelle des Orts- und Impulsoperators zwei andere selbstadjungierte Operatoren A, B aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ verwenden, die dieselbe Kommutatorrelation erfüllen. Es seien $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*$ die analog definierten Auf- und Abstiegsoperatoren und $\{\xi_{n,i}\}_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ die analog bestimmte Eigenbasis. Wir bezeichnen $V_i = \operatorname{Span}\{\xi_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Somit lässt sich eine Abbildung $U_i : V_i \to L^2(\mathbb{R})$ definieren, welche $\xi_{n,i}$ auf ϕ_n abbildet. Mit (2.11) lässt sich leicht überprüfen, dass diese Abbildung unitär ist. Es gilt nun für alle ϕ_n:

$$U_i\hat{\alpha}^*U_i^{-1}\phi_n = U_i\hat{\alpha}^*\xi_{n,i} = U_i\phi_{n+1,i} = \phi_{n+1} = \hat{a}^*\phi_n \tag{2.12}$$

Somit ist das Resultat auch im Spann der Eigenvektoren, dem ganzen Raum, gültig.

$$U_i\hat{\alpha}^*U_i^{-1} = \hat{a}^* \tag{2.13}$$

Wir adjungieren nun beide Seiten dieser Gleichung und erhalten aufgrund der Eindeutigkeit des Adjungierten auch bei Raumwechsel:

$$U_i\hat{\alpha}U_i^{-1} = \hat{a} \tag{2.14}$$

U_i transformiert also $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*$ zu $\hat{a}, \hat{a}^*$. Da $\hat{x}, \hat{p}$ und A, B je auf gleiche Weise als Linearkombination von $\hat{a}, \hat{a}^*$ bzw $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*$ geschrieben werden können, gilt weiter:

$$U_iAU_i^{-1} = \hat{x} \tag{2.15}$$

$$U_iBU_i^{-1} = \hat{p} \tag{2.16}$$

Damit können wir den V_i mit $L^2(\mathbb{R})$ und A, B mit $\hat{x}, \hat{p}$ identifizieren. Es verbleibt noch zu zeigen, dass der Spann der V_is, den wir als V bezeichnen, der Raum $\mathcal{H}$ ist. Wir zeigen, dass das orthogonale Komplement $V^\perp$ invariant unter der Abbildung $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*$ ist. Dazu sei $v \in V$, $u \in V^\perp$.

$$\langle\hat{\alpha}u, v\rangle = \langle u, \underbrace{\hat{\alpha}^*v}_{\in V}\rangle = 0 \tag{2.17}$$

Analog zeigt man die Invarianz unter $\hat{\alpha}^*$ und damit die Invarianz unter $\hat{\alpha}^*\hat{\alpha}$. Angenommen das othogonale Komplement wäre nun nicht leer, so würde es mindestens einen Eigenvektor von $\hat{\alpha}^*\hat{\alpha}$ aus $V^\perp$ geben. Auf diesen können wir solange $\hat{\alpha}$ anwenden, bis er null wird. So erhalten wir einen Vektor $u_0 \in V^*$ aus dem Kern von $\hat{\alpha}$. Damit haben wir einen Widerspruch zu Annahme, dass die $\{\varphi_{0,i}\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset V$ eine Basis des Kern $\hat{\alpha}$ bilden.

Bei genauer Betrachtung ist der eben gezeigte Beweisansatz fehlerhaft. Das Problem besteht darin, dass es unter Umständen nicht möglich ist, die Operatoren $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*$ mehrmals hintereinander auszuführen. Es könnte sein, dass $\hat{\alpha}^*\xi_{n,i}$ nicht mehr im Definitionsbereich von $\hat{\alpha}^*$ ist. Tatsächlich stimmt nicht einmal die in der Einleitung genannte Prämisse, dass der hier als $\mathcal{H}$ bezeichnete Raum bis auf unitäre Konjugation der $L^2(\mathbb{R})$ ist. Ein solches Gegenbeispiel, das in der Referenz von diesem Abschnitt genauer beschrieben wird, ist der $L^2([-1,1])$ mit dem üblichen auf $[-1,1]$ eingeschränkten Ortsoperator und üblichen Impulsoperator, der zusätzlich auf die Funktionen $f : f(1) = f(-1)$ eingeschränkt wird. Strenggenommen ist dieser Impulsoperator nur symmetrisch, wir können aber einfach den selbstadjungierten Abschluss davon nehmen, wobei sich an unserem Problem nichts ändert. Für den standardmäßigen Hilbertraum der eindimensionalen Wellenfunktionen $L^2(\mathbb{R})$ gelten die obigen Aussagen jedoch, da der Kern von $\hat{\alpha}$ durch die einzelne normierte Wellenfunktion der Form $\phi_0(x) = ce^{-dx^2}$ gegeben ist. Man erkennt leicht, dass man auf diesen Grundzustand beliebig oft die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^*$ anwenden kann. Eine Aufgabe des ersten Abschnittes dieser Arbeit soll es sein, eine strengere Bedingung zu finden, welche solche Fälle wie den $L^2([1,-1])$ ausschließt. [5][S. 279-281]

3 Ein Beispiel für den Satz von Stone–von Neumann

In diesem Kapitel betrachten wir eine Gruppe von Transformationen. Diese Transformationen wirken auf Tupeln selbst-adjungierter Operatoren (A, B) auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, welche die Kommutatorrelation $[A, B] = \mathrm{i}$ erfüllen und bilden diese auf ebensolche ab, $T : (A, B) \mapsto (\tilde{A}, \tilde{B})$. Die zuvor genannten Kommutatorrelationen (CCR) unterscheiden sich zwar um $\hbar$ von der gewohnten des Ortes und Impulses, das stellt aber kein Problem dar, da zum Beispiel anstelle von $\hat{p}$, der Operator $B = \hbar^{-1}\hat{p}$ gewählt werden kann. Anschließend soll für jedes T, A und B eine unitäre Abbildung $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gefunden werden, sodass gilt:

$$U\tilde{A}U^{-1} = A \tag{3.1}$$

$$U\tilde{B}U^{-1} = B \tag{3.2}$$

In der Art und Weise, wie ich die Transformationen einführen werde, ist es vorteilhaft (3.1), (3.2) umzustellen.

$$U^{-1}AU = \tilde{A} \tag{3.3}$$

$$U^{-1}BU = \tilde{B} \tag{3.4}$$

Die wahrscheinlich einfachste der beschriebenen Transformationen ist:

$$\begin{aligned} A &\mapsto A + \lambda \\ B &\mapsto B \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sei U_λ eine entsprechende unitäre Abbildung. So übertragt sich die Gruppenstruktur der Transformationen gewissermaßen auf die U_λs. Allgemein gilt für affin lineare Transformationen $T_1 : (A, B) \mapsto (a_1A + b_1B + c_1C, a_2A + b_2B + c_2C)$, T_2 und die dazugehörigen unitären Abbildungen U_1, U_2, so dass die Einträge des affinen Teils A_1, A_2 von T_1 mit U_2 kommutiert:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2 \\ U_2^{-1}U_1^{-1}BU_1U_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_2^{-1}(a_1A + b_1B + c_1C)U_2 \\ U_2^{-1}(a_2A + b_2B + c_2C)U_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1U_2^{-1}AU_2 + b_1U_2^{-1}BU_2 + c_1C \\ a_2U_2^{-1}AU_2 + b_2U_2^{-1}BU_2 + c_2C \end{pmatrix} &= T_1 \begin{pmatrix} U_2^{-1}AU_2 \\ U_2^{-1}BU_2 \end{pmatrix} = \\ &= T_1 \left(T_2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Das heißt U_1U_2 ist die $T_1 \circ T_2$ entsprechende Transformation. In unserem Fall kommutieren die Transformationen. Somit gilt $U_\lambda U_\mu \cong U_{\lambda+\mu} \cong U_\mu U_\lambda$ sind die, der Addition von Q mit $\lambda + \mu$ entsprechende Abbildung. Wir wissen zwar noch nicht, dass es nur eine Abbildung gibt, die die Rolle von $U_{\lambda+\mu}$ erfüllt, was $U_{\lambda+\mu} = U_\lambda U_\mu$ bedeuten würde. Es ist jedoch zu vermuten, dass wir für jedes λ aus der Menge der Transformationen einen Vertreter auswählen können, sodass die

Menge der Vertreter eine Gruppe bilden. Wir suchen also nach einer kommutativen Gruppe mit Elementen $U(\lambda)$, sodass $U(\lambda+\mu) = U(\lambda)U(\mu)$. Es liegt nahe für $U(\lambda)$ das Exponential $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda M}$ eines selbst-adjungierten Operators M zu verwenden. Tatsächlich wird in Abschnitt 5 unter anderem gezeigt, dass sich solche kommutativen Gruppen immer als Exponential darstellen lassen. Wir nehmen probeweise an, dass das Exponential nach λ differenzierbar ist. So können wir (3.3) in $\lambda = 0$ ableiten.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda M} Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_0 (Q+\lambda) \tag{3.7}$$

Mit der Produktregel oder durch Umstellen von (3.7) vor dem Ableiten, falls an der Gültigkeit der Produktregel gezweifelt wird, erhalten wir:

$$-\mathrm{i}MA + \mathrm{i}AM = 1 \tag{3.8}$$

Etwas umgeformt:

$$[M, A] = \mathrm{i} \tag{3.9}$$

Analog erhält man durch Differenzieren von (3.4):

$$[M, B] = 0 \tag{3.10}$$

Das Gleichungssystem (3.9), (3.10) hat offensichtlich $-B$ als inhomogene Lösung. Dies legt die Wahl $M = -B$ nahe. Unter welchen Bedingungen die folgenden Gleichungen tatsächlich gelten und wie das Exponential für unbeschränkte Operatoren genau definiert ist, wird im nächsten Kapitel gezeigt.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda B} = A + \lambda \tag{3.11}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B} B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda B} = B \tag{3.12}$$

Als nächste Gruppe von Transformationen betrachten wir die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} A &\mapsto A + \lambda B \\ B &\mapsto B \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wieder bezeichnet U_λ die entsprechnde unitäre Abbildung. Auch hier überträgt sich die Gruppeneigenschaft auf diese Abbildungen, da es sich um kommutierende lineare Transformationen handelt. Mit genau dem selben Ansatz wie vorhin, erhalten wir Kommutatorgleichungen für den Exponenten M.

$$[M, A] = \mathrm{i}B \tag{3.14}$$

$$[M, B] = 0 \tag{3.15}$$

Es lässt sich leicht feststellen, dass diese Kommutatorrelationen von $M = -\frac{1}{2}B^2$ erfüllt werden. Es sollten also die folgenden Gleichungen gelten:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\frac{1}{2}P^2} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\frac{1}{2}B^2} = Q + \lambda B \tag{3.16}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\frac{1}{2}B^2} B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\frac{1}{2}B^2} = B \tag{3.17}$$

Wenn man noch mehr Beispiele für Transformationen, welche die Kommutatorrelation invariant lassen möchte, so könnte man höhere Potenzen von B verwenden, denn die Ausdrücke

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B^n} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda B^n}$ lassen sich, verglichen mit anderen Operatoren, leichter explizit ausrechnen.

Zu den beiden, vorher beschriebenen Transformationsgruppen lassen sich analog die Gruppen konstruieren, die gerade umgekehrt auf die Einträge des Tuplels (A, B) wirken.

$$\begin{aligned} B &\mapsto B + \lambda \\ A &\mapsto A \end{aligned} \tag{3.18}$$

sowie

$$\begin{aligned} B &\mapsto B + \lambda A \\ A &\mapsto A \end{aligned} \tag{3.19}$$

Die beiden Transformationen (3.13), (3.19) können als Zeilenadditionen aufgefasst werden. Diese generieren die linearen Abbildungen mit Determinante 1. Die anderen beiden Transformationen (3.5), (3.18) können als affine Verschiebung aufgefasst werden. Insgesamt entspricht die, von den vier Transformationen erzeugte Gruppe den affin-linearen Abbildungen, sodass der lineare Anteil Determinante 1 hat. Man könnte sich nun fragen, welche Gruppeneigenschaften der Transformationen sich auf die entsprechenden unitären Abbildungen überträgt. Die Ergebnisse aus (3.6) gelten natürlich auch hier. Allerdings ist die Gruppe dieser Transformationen im Allgemeinen nicht kommutativ und somit müssen es auch die unitären Abbildungen nicht sein. Aufgrund dieses Verhaltens können die unitären Abbildungen im Allgemeinen sehr kompliziert werden. Im schlechtesten Fall werden sechs Hintereinanderausführungen der Generatoren gebraucht, um eine Transformation zu bilden. Wie in 8.1 gezeigt wird, entfallen vier davon auf den linearen Teil.

Wir wollen nun noch eine Transformation betrachten, die von den vier vorhin beschriebenen Transformationen (3.5),(3.13),(3.18),(3.19) erzeugt wird.

$$\begin{aligned} A &\mapsto -B \\ B &\mapsto A \end{aligned} \tag{3.20}$$

Wir könnten eine entsprechende Abbildung finden, in dem wir die Transformation in die vorhin beschriebenen Generatoren zerlegen. Dies würde drei Schritte benötigen. Eine einfachere Darstellung erhalten wir, indem wir (3.20) als Element einer kommutativen Gruppe linearer Transformationen auffassen. Eine solche wäre die $SO(2)$.

$$\begin{aligned} A &\mapsto \cos(\alpha)A - \sin(\alpha)B \\ B &\mapsto \sin(\alpha)A + \cos(\alpha)B \end{aligned} \tag{3.21}$$

Wie in den vorherigen Fällen verwenden wir einen Exponentialansatz $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha M}$ und erhalten für dieses M die Kommutatorgleichungen:

$$\begin{aligned} [M, A] &= -\mathrm{i}B \\ [M, B] &= \mathrm{i}A \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ein solches M ist der vereinfachte Hamiltonoperator des harmonischen Osszilators $M = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$. Es gilt also hoffentlich.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\frac{1}{2}(A^2+B^2)} Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\frac{1}{2}(A^2+B^2)} &= \cos(\alpha)A - \sin(\alpha)B \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\frac{1}{2}(A^2+B^2)} P \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\frac{1}{2}(A^2+B^2)} &= \sin(\alpha)A + \cos(\alpha)B : \end{aligned} \tag{3.23}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu erhalten wir das gewünschte Ergebnis. Dieses Ergebniss ist nicht verwunderlich, da zumindest aus der klassischen Physik bekannt ist, dass die Zeitentwicklung eines Harmonischen Oszillator eine Drehung in dem Phasenraum ist. Für den standardmäßigen Orts- und Impulsoperator (P, Q) ist mit der Fouriertransformation F bereits eine unitäre Abbildung bekannt, die durch konjugieren gleich transformiert. Es gilt damit:

$$\begin{aligned}(PFf)(\lambda) = P\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = (Fxf)(\lambda)\end{aligned} \tag{3.24}$$

Woraus $F^{-1}PF = Q$ folgt. Für die andere Gleichung formen wir um: $F^{-1}QF = (F^2)^{-1}PF^2$. Es ist bekannt, dass $F^2 f(x) = f(-x)$, womit wir die gewünschte Aussage $F^{-1}QF = -P$ erhalten. Nach dem Satz von Plancherel ist die Fouriertransformation unitär. Es stellt sich die Frage, inwiefern sich diese Idee verallgemeinern lässt. Wenn eine unitäre Abbildung die Gleichung

$$U^{-1}AU = -B \tag{3.25}$$

erfüllt, dann muss U Eigenvektoren ϕ_λ von B auf Eigenvektoren von A zum additiv inversen Eigenwert abbilden $AU\phi_\lambda = -\lambda U\phi_\lambda$. Im Gegenbeispiel aus der Sektion 2.2, wurden Operatoren A, B auf dem $L^2([-1,1])$ vorgestellt, sodass $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n x}, n \in \mathbb{N}$ Eigenvektoren von B sind. [5][S.245] Der Grundsatz der Fourierreihenentwicklung besagt, dass diese Eigenvektoren sogar eine Eigenbasis bilden. Die Fourierreihenentwicklung selbst ist eine entsprechende unitäre Abbildung, die Eigenwerte des Impulsoperators auf Eigenwerte einer Art Ortsoperator abbildet. Allerdings wirkt dieser Ortsoperator auf dem Raum der quadratintegrierbaren Folgen und nicht auf $L^2([-1,1])$. Tatsächlich hat der Ortsoperator auf $L^2([-1,1])$ ein kontinuierliches Spektrum, also wenn man strikt ist, hat er gar keine echten Eigenwerte. Damit kann es eine solche Abbildung, die Gleichung (3.25) erfüllt, hierbei gar nicht geben. Das Problem, dass sich bei dem obigen Überlegungen ergibt ist, dass das entsprechende Exponential nicht die vorausgesetzten Eigenschaften erfüllt. Im Kern haben wir wieder die selben Probleme mit der Hintereinanderausführung von A und B, wie im ersten Abschnitt. Diese Hintereinanderausführung wird zu Beispiel bei der Berechnung der Kommutatoren verwendet. Dennoch wurde in dieser Sektion mit dem Exponential eine wichtige Zutat für den tatsächlichen Beweis für das Stone Von Neumann Theorem gefunden.

4 Exponentierte Kommutatorrelation

Wie man in den beiden vorherigen Abschnitten gesehen hat, ist die kanonische Kommutatorrelation (CCR) für zwei Operatoren keine hinreichende Bedingung dafür, dass diese Operatoren bis auf Konjugation mit einer unitären Abbildung einer direkten Summe der üblichen Orts- und Impulsoperatoren gleichen. Eine hinreichende und sogar äquivalente Bedingung stellt die exponentierte kanonische Kommutatorrelation (expCCR) da. Diese trifft Aussagen über die Operatoren $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda A}$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B}$. Zunächst muss jedoch das Exponential eines unbeschränkten, selbstadjungierten Operators definiert werden. Dabei kann nicht auf eine Reihenentwicklung zurückgegriffen werden, da diese nicht konvergieren muss. An Stelle dessen wird der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren verwendet.

Definition 1 (Operatorexponential)**.** *[5][S. 214] Es sei A ein normaler Operator auf $\mathcal{H}$, $\sigma(A)$ das Spektrum von A und $d\mu^A$ das dazugehörige Spektralmaß. So gibt es nach dem Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren eine Spektralzerlegung von A.*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A(\lambda) \tag{4.1}$$

Das Operatorexponential von itA ist damit wie folgend definiert:

$$e^{itA} = \int_{\sigma(A)} e^{it\lambda} d\mu^A(\lambda) \tag{4.2}$$

Man sieht dass diese Definition für beschränkte Operatoren mit der Exponentialreihe übereinstimmt. Außerdem ist für einen selbstadjungierten Operator A das Exponential $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ unitär. [5][S. 207-213]

Damit können wir nun endlich die exponentierte Kommutatorrelationen definieren.

Definition 2 (exponentierte CCR)**.** *Es seien A, B selbst-adjungierte Operatoren, so bezeichnet man die folgende Gleichung als exponentierte CCR:*

$$e^{itA} e^{isB} = e^{-ist} e^{isB} e^{itA} \tag{4.3}$$

Eine Anregung für diese Definition liefert die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Laut dieser gilt für beschränkte Operatoren A, B:

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[[A,B],B])+\cdots} \tag{4.4}$$

Falls der Kommutator $[A, B]$ sowohl mit A als auch mit B kommutiert, so gilt insbesondere:

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = \mathrm{e}^{[A,B]} \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[B,A]} = \mathrm{e}^{[A,B]} \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A \tag{4.5}$$

[5][S.281-282] Da die Orts- und Impulsoperatoren unbeschränkt sind, muss aus der CCR nicht die exponentierte CCR folgen, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird. Umgekehrt folgt die gewöhnliche Kommutatorrelation aus der exponentierten CCR. Um dies zu zeigen, bietet es sich

an, die Gleichung (4.3) nach a und b in null abzuleiten. Dazu benötigen wir ein paar grundlegende Regeln für das Differenzieren von operatorwertigen Funktionen. Als das Differenzial am Punkt a einer solchen Funktion $X(t)$ bezeichnet man den folgend definierten Operator.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a X(t)\psi = \lim_{h\to 0} \frac{X(a+h)\psi - X(a)\psi}{h} \tag{4.6}$$

Man sieht leicht, dass diese Abbildung tatsächlich linear ist. Der Definitionsbereich dieses Operators ist der Vektorraum, für dessen Elemente dieser Grenzwert existiert. Es ist zu erwarten, dass das Exponential $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ in 0 auf dem Definitionsbereich von A existiert und gleich $\mathrm{i}A$ ist. Ein Beweis davon findet sich in [5][S. 209]. Die Produktregel lässt sich für Funktionen mit beschränkten Einträgen $X(t)$, $Y(t)$ ähnlich wie im skalaren Fall, für entsprechenden Definitionsbereich nachrechnen:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a X(t)Y(t)\psi = \lim_{h\to 0} \frac{X(a+h)Y(a+h)\psi - X(a)Y(a)\psi}{h} =\\ = \lim_{h\to 0} (X(a)(Y(a+h) - Y(a))\psi + (X(a+h) - X(a))Y(a)\psi +\\ +(X(a+h) - X(a))(Y(a+h) - Y(a))\psi)/h =\\ = X(a)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a Y(t)\psi + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a X(t)Y(a)\psi + \lim_{h\to 0}(X(a+h) - X(a))\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a Y(t) =\\ = X(a)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a Y(t)\psi + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_a X(t)Y(a)\psi\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit diesen Erkenntnissen können wir nun (4.3) nach t in 0 ableiten. Der Definitionsbereich ist dabei der von A da außer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ alle Faktoren skalar oder konstant sind. Wir erhalten:

$$\mathrm{i}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}sB} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sB}\mathrm{i}A - \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}sB} \tag{4.8}$$

Diese Gleichung lässt sich zur später definierten semi-exponentierten CCR umstellen. Um endgültig zur CCR zu gelangen, differenzieren wir (4.8) nach s in 0.

$$\mathrm{i}^2AB = \mathrm{i}^2BA - \mathrm{i} \tag{4.9}$$

So erhalten wir, bis auf Division mit i, die gewöhnliche kanonische Kommutatorrelation.

Definition 3 (semi-exponentierte CCR)**.** *Es seien A, B selbst-adjungierte Operatoren, so bezeichnet man die folgende Gleichung als semi-exponentierte CCR:*

$$e^{-isB}Ae^{isB} = A - s \tag{4.10}$$

Gleichungen dieser Form sind im vorigen Kapitel als unitäre Konjugationen zum Beispiel in (3.11) vorgekommen. Tatsächlich ist die semi-exponentiert CCR sogar zur exponentierten CCR äquivalent. Um dies zu zeigen, kann die Gleichung (4.10) mit it multipliziert und das Operatorexponential gebildet werden. Wir stellen fest, dass Konjugation mit einem unitären Operator das Spektrum nicht verändert. Somit können wir das Operatorexponential wie folgt ausrechnen:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sB}\int_{\sigma(A)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{d}\mu^A(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB} = \int_{\sigma(A)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\lambda-s)}\mathrm{d}\mu^A(\lambda) \tag{4.11}$$

Dieses Ergebnis können wir wieder mit der Definition 1 umschreiben und erhalten eine offensichtlich zur exponentierten CCR äquivalente Gleichung.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sB}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sB} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts} \tag{4.12}$$

Die in dem Kapitel 3 verwendeten Gleichungen implizieren also bereits die exponentierten CCR.

Die Gruppen $V(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$, $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}$ lassen sich zu einer gesamten Gruppe mit den erzeugenden Elementen $S(s,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}st}V(s)U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}st}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}$ zusammenfassen. Der Phasenfaktor ist dabei so gewählt, dass $S(s,t)^* = S(s,t)^{-1} = S(-s,-t)$ gilt. Im Allgemeinen lässt sich die exponentierte CCR wie folgend auf $S(s,t)$ übertragen:

$$S(a,b)S(c,d) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(ad-bc)}S(a+c,b+d) \tag{4.13}$$

In dem man $b = c = 0$ setzt, erhält man aus (4.13) wieder die gewöhnliche exponentierte CCR. Die Gleichung (4.13) ist also äquivalent zur exponentierte CCR. [5][S. 283-284]

Es lässt sich eine, zu der exponentierten CCR äquivalente Bedingung formulieren, ohne das Operatorexponential von den entsprechenden selbstadjungierten Operatoren zu verwenden. Eine solche Bedingung ist in dem Artikel [6] gegeben. Bei dem Beweis des Satz von Stone-von Neumann scheint man dem Operatorexponential jedoch nicht einfach ausweichen zu können. Bereits in den Beispielen in Sektion 3 wird intensiv von den Exponentialen Gebrauch gemacht.

5 Satz von Stone

Der Satz von Stone ist für den Beweis des Satz von Stone- von Neumann nicht notwendig. Er erlaubt es jedoch, bestimmte Gruppen, deren Elemente durch unitäre Abbildungen repräsentier werden, mit einer Exponentialgruppe $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda A}|\lambda \in \mathbb{R}\}$ zu identifizieren und gibt so dem Satz von Stone- von Neumann einen breiteren Kontext.

Theorem 1 (Satz von Stone)**.** *[5][S. 207-213] Es sei $G = \{(T(t))_{t\in\mathbb{R}}\}$ eine, durch unitäre Abbildungen auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dargestellte Gruppe die, die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- *$T(\cdot)$ ist ein Homomorphismus: $T(a)T(b) = T(a+b)$*
- *G ist stark stetig: $\forall\psi \in \mathcal{H} \lim_{x\to a} T(x)\psi = T(a)\psi$*

So gilt für diese Gruppe G:

- *Es existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{T(h)\psi-\psi}{h}$ für Vektoren ψ aus einem dichten Unterraum von $\mathcal{H}$*
- *Der durch diesen Grenzwert definierte Operator A, $A\psi = -i\lim_{x\to a} \frac{T(h)\psi-\psi}{h}$ ist selbst-adjungiert.*
- *$T(t) = e^{itA}$*

Ein Beweis dieses Theorems findet sich in der angegebenen Referenz. Dort wird auch mit dem Spektralkalkül gezeigt, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ für jedes selbst-adjungierte A eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe, stark stetige Gruppe ist.

Mit dem Satz von Stone lässt sich einfach eine explizite Form der Exponentiale der standardmäßigen, reduzierten Orts- und Impulsoperatoren finden. Für den Ort X sieht man ohnehin unmittelbar aus der Definition: $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\psi(x)$. Für den Impuls würde man für ähnliches eine Fouriertransformation benötigen. Etwas eleganter ist es, die eindeutige stark stetige Operatorgruppe $T(a)$ zu finden, so dass $-\mathrm{i}\psi' = -\mathrm{i}\lim_{x\to a} \frac{T(h)\psi-\psi}{h}$ gilt. Dieser ist unschwer erkenntlich der Translationsoperator. Die starke Stetigkeit des Translationsoperators ist eigentlich nur auf den Bereich der stetigen Funktionen offensichtlich, wir können dieses Problem umgehen, in dem wir eine beliebige quadratintegrierbare Funktion durch stetige Funktionen approximieren. Mit dieser expliziten Darstellung wird offensichtlich, dass für den standardmäßigen Orts- und Impulsoperator die exponentierte CCR stimmt.

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}T_s\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\psi(x+s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x+s)}\psi(x+s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}(T_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\psi)(x) \tag{5.1}$$

Die exponentierten Kommutatorrelationen gelten jedoch nicht für alle Operatoren, welche die CCR erfüllen. Ein entsprechendes Gegenbeispiel bilden die Orts- und Impulsoperatoren auf $L^2([-1,1])$, welche bereits in den vorherigen Kapiteln verwendet wurden. Das Exponential des Ortsoperators lässt sich wieder unmittelbar aus der Definition ablesen $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\psi(x)$.

Für den Impuls gilt mit gleichem Argument wie vorhin $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tP}\psi)(x) = \psi_{per}(x+t)$, wobei die Funktion ψ_{per}, um das Problem des Definitionsbereiches zu umgehen, hierbei als periodische Funktion interpretiert wird. Das heißt $\psi_{per}(x+t) := \psi(x+t+2n)$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt wird, dass das Argument $x+t+2n$ im Definitionsbereich $[-1,1]$ und möglichst klein ist. Damit lässt sich der Gruppenkommutator wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sP}\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\psi_{per}(x+s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-\mathrm{Mod}_2(x+s))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{Mod}_2(x+s)}\psi_{per}(x+s) =\\ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-\mathrm{Mod}_2(x+s))}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sP}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\psi)(x)\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Mod}_2(x) := x \bmod 2$.

Die Gleichung (4.13) zeigt $S(as,bs)S(at,bt) = S(a(s+t), b(s+t))$. Außerdem ist $S(at,bt)$ als Komposition stark stetiger Funktionen wieder stark stetig. Differenzieren von $S(at,bt)$ in $t=0$ gibt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 S(at,bt) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}abt^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}atA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}btB} = \mathrm{i}aA + \mathrm{i}bB \tag{5.3}$$

Woraus wir mit dem Satz von Stone $S(s,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(sA+tB)}$ folgern. [5][S. 284-286]

6 Irreduzibilität

Sucht man eine möglichst einfache Darstellung der Orts- und Impulsoperatoren oder bestimmter Algebren im Allgemeinen, so ist die Irreduzibilität eine nützliche Bedingung.

Definition 4 (Irreduzibilität)**.** *[5][S. 286] Operatorengruppen U, V (die die exponentierte CCR erfüllen) heißen irreduzible Darstellung auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, falls für einen Unterraum W, der unter Multiplikation mit U, V, sowie Grenzwerten abgeschlossen ist, gilt: $W = \{0\}$ oder $W = \mathcal{H}$.*

Eine oft nützlichere Charakterisierung der Irreduzibilität ist die folgende: Für einen Nichtnull-Vektor $w \in \mathcal{H}$ ist der davon unter Operation von U, V, Linearkombinationen und Grenzwerten erzeugte Raum gleich $\mathcal{H}$. Dieser erzeugte Raum hat, aufgrund der Kommutatorrelationen und der Tatsache, dass der Grenzwert linear ist, die Form $\overline{\mathrm{Span}(\{U(a)V(b)w | a, b \in \mathbb{R}\})}$.

Ein rigoroser Beweis für die Irreduzibilität der standardmäßigen Orts- und Impulsoperatoren wird im nächsten Kapitel gegeben. Aufgrund der Wichtigkeit des Resultates soll im Folgenden die Irreduzibilität heuristisch argumentiert werden. Angenommen es ist eine Wellenfunktion ψ ungleich Null gegeben, so gibt es ein Intervall I, in dem sie bis auf eine Nullmenge überall von Null verschieden ist. Im von diesen Vektor erzeugten Raum befinden sich Ausdrücke der Form $\sum_i \lambda_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_i X}\psi$. Mit Grenzwertbildung erhalten wir ein entsprechendes Integral $\int_{\mathbb{R}} \lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\mathrm{d}t\psi$. Mit $\int_{\mathbb{R}} \lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\mathrm{d}t$ lässt sich über eine Fourier-Transformation eine beliebige Wellenfunktion bauen. Insbesondere können wir damit eine Funktion generieren, welche ψ im Bereich I beliebig formt und ansonsten gleich Null setzt. Irgendeine Wellenfunktion $f \in \mathcal{H}$ lässt sich in Stücke des Intervalls I gliedern. Mit dem Translationsoperator lassen sich passend geformte Stücke auf die richtige Position bringen, sodass die Linearkombination davon f ergibt. Es ist also der gesamte Hilbertraum im Abschluss.

7 Beweis des Satzes von Stone Von Neumann

In diesem Abschnitt soll der Satz von Stone-von Neumann präzise formuliert werden, die Beweisidee veranschaulicht und mit Beispielen illustriert werden sowie schlussendlich ein Beweis geliefert werden.

Theorem 2 (Satz von Stone-von Neumann)**.** *[7] Es seien U und V unitäre, einparametrische, stark stetige Operatorengruppen auf dem Raum $\mathcal{H}$, welche die exponentierten Kommutatorrelationen erfüllen und $S(s,t) = e^{i\frac{1}{2}st}V(s)U(t)$ die dazugehörige Zusammenfassung. So lässt sich $\mathcal{H}$ als direkte Summe von topologisch und unter U und V abgeschlossenen Unterräumen $\{W_i\}$ zerlegen, sodass für diese Unterräume gilt: Es existiert eine unitäre Abbildung $Q_i \colon W_i \mapsto L^2(\mathbb{R})$, mit:*

$$Q_i S(s,t) Q_i^{-1} = S_s(s,t) \tag{7.1}$$

Dabei bezeichnet $S_s(s,t) = e^{i\frac{1}{2}st}e^{isX}e^{itP}$ mit $X\psi(x) = x\psi(x)$ und $P\psi(x) = -i\psi'(x)$. Falls U und V irreduzibel sind, so gibt es offensichtlich nur einen invarianten Unterraum außer null, $W = \mathcal{H}$. Die dazugehörige unitäre Abbildung Q ist bis auf eine Konstante vom Betrag Eins bestimmt.

In der obigen Fassung wurde das Theorem für abstrakte Gruppen U und V formuliert. Nach dem Satz von Stone lassen sich diese jedoch einfach durch $V = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$, $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}$ mit den Generatoren A, B ersetzen. Um tatsächlich die in der Einleitung formulierte Aussage

$$\begin{aligned} Q_i A Q_i^{-1} &= X \\ Q_i B Q_i^{-1} &= P \end{aligned} \tag{7.2}$$

zu erhalten, müsste man (7.1) nach s, beziehungsweise nach t in $(0,0)$ ableiten.
Die Grundidee für den Beweis des Satz von Stone-von Neumann ist die folgende. Wir beginnen mit einem Nicht-Null Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ und betrachten den davon unter S erzeugten abgeschlossenen Unterraum W. So ist das orthogonale Komplement $W^\perp$ ebenfalls unter S abgeschlossen, wie die folgende Rechnung zeigt. Es sei $v \in W^\perp$ so gilt $\forall w \in W$

$$\langle w, S(s,t)v \rangle = \langle S(-s,-t)w, v \rangle = 0 \tag{7.3}$$

Was nichts anderes bedeutet als $S(s,t)v \in W^\perp$. Das orthogonale Komplement ist offensichtlich unter Linearkombinationen, aber auch unter Grenzwerten abgeschlossen. Dazu sei v der Grenzwert von $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}, v_n \in W^\perp$, so gilt $\forall w \in W$:

$$|\langle w, v \rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle w, v - v_n \rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle v - v_n, v - v_n \rangle \langle w, w \rangle} = 0 \tag{7.4}$$

Damit lassen sich induktiv, topologisch und unter U und V abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$ abspalten. Wir hoffen und werden später beweisen, dass wir auch überabzählbare $\{\xi_i\}_i$ finden können, sodass die von den ξ_is erzeugten Räume abgeschlossenen sind und deren direkte Summe

den ganzen $\mathcal{H}$ aufspannt.
Es sollen nun unitäre Abbildungen

$$Q_i : \sum_j \lambda_j S(a_j, b_j)\xi_i \mapsto \sum_j \lambda_j S_s(a_j, b_j)\xi_s \tag{7.5}$$

für ein geeignetes $0 \neq \xi_s \in L^2(\mathbb{R})$ gefunden werden. Das Summenzeichen steht hier für eine Summe und einen potentiellen Grenzwert hinter der Summe. Strenggenommen müssten wir diese Abbildungen als (linkstotale) Relationen definieren, da wir die (Rechts)-Eindeutigkeit noch nicht nachgewiesen haben. Wenn diese Relationen tatsächlich unitäre Abbildungen sind, dann erfüllen diese bereits die Rollen der Q_is aus (7.1). Dazu sei $\sum_j \lambda_j S_s(a_j, b_j)\xi_s \in L^2(\mathbb{R})$ ein generisches Element im Bild von Q_i. Um Übersichtlichkeit zu wahren, unterdrücken wir im Folgenden den Index i. So ist mit (4.13):

$$\begin{aligned} QS(s,t)Q^{-1}\sum_i \lambda_i S_s(a_i, b_i)\xi_s &= Q\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(sb_i - ta_i)}\lambda_i S(a_i + s, b_i + t)\xi = \\ &= \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(sb_i - ta_i)}\lambda_i S_s(a_i + s, b_i + t)\xi = S_s(s,t)\sum_i \lambda_i S_s(a_i, b_i)\xi_s \end{aligned} \tag{7.6}$$

was die Aussage zeigt.
Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften die ξs erfüllen muss, dass die oben beschriebenen Abbildungen Q wohldefiniert und bijektiv sind, die zusätzlich geforderte Unitarität lassen wir vorerst außer Acht. Dazu betrachten wir als Beispiel den $L^2(\mathbb{R})^n$ mit der standardmäßigen Orts- und Impulsgruppe, die allerdings auf jeden Eintrag wirkt. Falls der Satz von Stone-von Neumann wahr ist, so ist dieses Beispiel bereits generisch, zumindest wenn man von unendlichen, direkten Summen absieht. Wir wählen $\xi = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. Unter der Annahme, dass die standardmäßigen Orts- und Impulsgruppen auf $L^2(\mathbb{R})$ irreduzibel sind, ist die Surjektivität von Q gegeben. Dass die Abbildung Q wohldefiniert und injektiv ist, ist damit äquivalent, dass die LHS von (7.5) genau dann 0, ist falls die RHS 0 ist. Außerdem muss der Definitionsbereich von Q irreduzibel, sein da der Bildbereich irreduzibel ist. Damit der Definitionsbereich irreduzibel ist, ist es notwendig und hinreichend, dass falls für ein k $\varepsilon_k \neq 0$ und $\sum_j \lambda_j S(a_j, b_j)\varepsilon_k = 0$ ist, so sind auch alle anderen Komponenten 0: $\forall k : \sum_j \lambda_j S(a_j, b_j)\varepsilon_k = 0$. Wir können diese Bedingungen (Definitionsbereich irreduzibel, wohldefiniert und injektiv) kompakt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & & \forall k, j \in \{1, \cdots, n\} \cup \{s\} : \\ \varepsilon_k \neq 0 \wedge \sum_i \lambda_i S_k(a_i, b_i)\varepsilon_k = 0 \quad &\Rightarrow & \sum_i \lambda_i S_j(a_i, b_i)\varepsilon_j = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Dabei ist für $k \in \{1, \cdots, n\}$: $S_k(s,t) = S(s,t), \varepsilon_k = \varepsilon$ und $S_s(s,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}st}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tP}$, $\varepsilon_s = \xi_s$ Diese Bedingung ist im Allgemeinen jedoch falsch, denn es ist wie im vorherigen Kapitel mit $\sum_i \lambda_i S(a_i, b_i)$ möglich, eine Multiplikation mit einer Stufenfunktion zu bauen. Diese Multiplikation ergibt für manche ε_i Null, während sie für andere ε_j nicht 0 ergibt. Somit ist die Wahl von ξ jedenfalls nicht beliebig. Es liegt nahe, wie in Kapitel 2.2 eine Verallgemeinerung des Grundzustands eines harmonischen Oszillators für ξ zu verwenden. Tatsächlich muss Q falls es existiert einen Grundzustand, das heißt einen normierter Vektor aus dem Kern des Absteigeoperators $\hat{\alpha}$, auf einen Grundzustand im $L^2(\mathbb{R})$, also ein normierter Vektor aus dem Kern von dem Schrödinger-Absteigeoperators $\hat{a}$ abbilden, wie man mit (7.2) sieht.

$$\begin{aligned} 0 = \hat{a}\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \mathrm{i}P)\psi_s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(QAQ^{-1} + \mathrm{i}QPQ^{-1})\psi_s = \\ &= Q\frac{1}{\sqrt{2}}(A + \mathrm{i}P)Q^{-1}\psi_s = Q\alpha\psi \Rightarrow 0 = \hat{\alpha}\psi \end{aligned} \tag{7.8}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass der Kern des Abstiegsoperators $\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A+\mathrm{i}B)$ auf dem $L^2(\mathbb{R})^n$ die Form $\varepsilon = (\lambda_1\varepsilon_s, \cdots, \lambda_n\varepsilon_s)$ besitzt, wobei ε_s nun der Grundzustand im eindimensionalen Fall ist. Dieser Grundzustand $(\lambda_1\varepsilon_s, \cdots, \lambda_n\varepsilon_s)$ erfüllt jedoch (7.7), womit der erste Teil unseres Arguments für das genannte Beispiel gesichert ist. Um dieses Argument nun allgemein ohne Voraussetzungen zu fassen, soll der Grundzustand, genauer die Projektion auf den Grundzustand $|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$, durch die unitären Gruppen $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}$, $V(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$, beziehungsweise S ausgedrückt werden. Wir machen den von der Weyl-Quantisierung inspirierten Ansatz:

$$|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b := P_f \tag{7.9}$$

Dabei ist f eine zahlenwertige Funktion und $S(a,b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}ab}V(a)U(b)$. Dieser Operator P_f ist genau dann eine orthogonale Projektion auf Grundzustände, falls er selbstadjungiert und idempotent ist, sowie die folgende Gleichung gilt:

$$\hat{\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = 0 \tag{7.10}$$

Diese Gleichung lässt sich mit einer dem Feynman Integral Trick ähnlichen Methode wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} 0 = \sqrt{2}\hat{\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)(A+\mathrm{i}B)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)\left(-\mathrm{i}\partial_a - \frac{1}{2}b + \partial_b + \mathrm{i}\frac{1}{2}a\right)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \stackrel{*}{=} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Damit das Integral konvergiert, nehmen wir an, dass der Integrand im unendlichen verschwindet. Somit können wir durch partielle Integration die Differentialoperatoren auf den anderen Faktor übertragen, wobei sich das Vorzeichen vor dem Differentialoperator ändert:

$$\stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\mathrm{i}\partial_a - \frac{1}{2}b - \partial_b + \mathrm{i}\frac{1}{2}a\right)f(a,b)\right)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{7.12}$$

Diese Gleichung ist offensichtlich erfüllt, falls der Integrand gleich 0 ist.

$$\left(\mathrm{i}\partial_a - \frac{1}{2}b - \partial_b + \mathrm{i}\frac{1}{2}a\right)f(a,b) = 0 \tag{7.13}$$

Wie wir später in 4 zeigen werden, ist dies tatsächlich notwendig, um die Gleichung (7.10) zu erfüllen. Dass P_f selbstadjungiert ist, ist (für stetiges f) damit äquivalent, dass $\overline{f(-a,-b)} = f(a,b)$, wie wir ebenfalls später zeigen. Dieses Bedingung sowie die DGl (7.10) werden von den folgenden Funktionen erfüllt:

$$y(a,b) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(a^2+b^2)} \qquad C \in \mathbb{C} \tag{7.14}$$

Hier sollen nun einige grundlegende Eigenschaften des Integrals P_f gezeigt werden, welche im weiteren Verlauf des Beweises von Nutzen sind.

Lemma 1. *[7] Das Integral in (7.9) existiert, falls $\int_{\mathbb{R}^2}|f(a,b)|\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ existiert.*

Dazu stellen wir fest, dass $S(a,b)$ stetig in a, b ist. Außerdem ist die Norm des Integrals beschränkt:

$$\forall v : \|P_f v\| \leq \int_{\mathbb{R}^2}\|U(a)V(b)f(a,b)v\|\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}^2}|f(a,b)|\mathrm{d}a\mathrm{d}b\|v\| \tag{7.15}$$

Lemma 2. *[7] Es gilt $P_f^* = P_g$ mit $g(a,b) = \overline{f(-a,-b)}$*

Dazu zeigen wir, dass das Adjungierte mit dem Integral vertauscht werden kann, wenn wir über eine hinreichend reguläre, parametrische Familie von Operatoren integrieren. Hinreichend regulär bedeutet, dass der Satz von Fubini für das Integral über die Parameter und das Integral im Skalarprodukt gilt. Das ist für stetiges f der Fall.

$$\left\langle \psi, \int_{\mathbb{R}^2} A(a)\mathrm{d}a\varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, A(a)\varphi \rangle \mathrm{d}a = \int_{\mathbb{R}^2} \langle A(a)^*\psi, g\rangle \mathrm{d}a = \left\langle \int_{\mathbb{R}^2} A(a)^*\mathrm{d}a\psi, \varphi \right\rangle \tag{7.16}$$

Mit diesem Resultat und einer Spiegelung als Koordinatentransformation können wir P_f^* umschreiben:

$$P_f^* = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f(a,b)} S(-a,-b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f(-a,-b)} S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{7.17}$$

Lemma 3. *[7] Es gilt $S(s,t)P_f = P_g$, $P_f S(s,t) = P_h$ und $S(-s,-t)P_f S(s,t) = P_j$ mit*

$$\begin{aligned} g(a,b) &= e^{i\frac{1}{2}(at-sb)} f(a-s, b-t) \\ h(a,b) &= e^{-i\frac{1}{2}(at-sb)} f(a-s, b-t) \\ j(a,b) &= e^{-i(at-sb)} f(a,b) \end{aligned} \tag{7.18}$$

Für den Beweis bietet sich wieder eine einfache Koordinatentransformation an.

$$\begin{aligned} S(s,t)P_f &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)S(s,t)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(sb-at)} S(a+s, b+t)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a-s, b-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(s(b-t)-(a-s)t)} S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(a-s, b-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(at-sb)} S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \end{aligned} \tag{7.19}$$

Die zweite Gleichung lässt sich analog beweisen. Die dritte folgt durch Anwendung der ersten und zweiten. [7]

Lemma 4. *[7] Es sei $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Falls $P_f = 0$, so gilt außer auf einer Nullmenge $f = 0$.*

Mit der dritten Gleichung in (3) folgern wir aus $P_f = 0$:

$$0 = \langle \psi, S(-a,-b)P_f S(a,b)\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(at-sb)} f(a,b) \langle \psi, S(a,b)\phi \rangle \mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{7.20}$$

Das Integral auf der rechten Seite entspricht der inversen Fouriertransformation von $f(a,b)\langle \psi, S(a,b)\phi \rangle$ am Punkt $(t,-s)$. Da dieses für alle $(t,-s)$ gleich null ist, gilt folglich auf einer dichten Menge $f(a,b)\langle \psi, S(a,b)\phi \rangle = 0$. Da $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ist, gibt es ein ϕ, sodass $S(a_0,b_0)\phi \neq 0$. Wählt man $\psi = S(a_0,b_0)\phi$, so gilt $\langle \psi, S(a_0,b_0)\phi \rangle = |S(a_0,b_0)\phi|^2 \neq 0$. Da der Ausdruck stetig ist, gilt sogar auf einer Umgebung von (a_0, b_0), dass $\langle\psi, S(a,b)\phi\rangle \neq 0$. Somit ist auf einer dichten Menge dieser Umgebung $f(a,b) = 0$. Der ganze Raum lässt sich durch abzählbare Vereinigungen von Umgebungen überdecken. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, ist auf dem ganzen Raum bis auf eine Nullmenge $f = 0$. [5][Seite 289]

Lemma 5. *[7] Es gilt $P_f P_g = P_h$ mit:*

$$h(\alpha,\beta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\frac{1}{2}(a\beta - b\alpha)} f(a,b) g(\alpha - a, \beta - b) da db \tag{7.21}$$

Der Beweis lässt sich wieder durch einfaches Nachrechnen erbringen.

$$\begin{aligned} P_f P_g = \int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \int_{\mathbb{R}^2} g(a,b)S(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ = \int_{\mathbb{R}^4} f(a,b)g(c,d)S(a,b)S(c,d)\mathrm{d}c\mathrm{d}d\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \\ = \int_{\mathbb{R}^4} f(a,b)g(c,d)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(ad-bc)}S(a+c, b+d)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\mathrm{d}b = \end{aligned} \tag{7.22}$$

Mit der Koordinatentransformation $\alpha = a + c, \beta = b + d \Rightarrow \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\mathrm{d}d$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} f(a,b)g(\alpha - a, \beta - b)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(a(\beta-b)-b(\alpha-a))}S(\alpha,\beta)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \\ = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(a,b)g(\alpha - a, \beta - b)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(a\beta - b\alpha)}\mathrm{d}a\mathrm{d}bS(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \end{aligned} \tag{7.23}$$

Auf unserem Weg zum Beweis des Satz von Stone-von Neumann muss noch ein Hilfssatz gezeigt werden.

Lemma 6. *[7] Es sei $P_y \neq 0$ ein wie in (7.9) definierter Operator, der (7.10) erfüllt, zum Beispiel mit $y(a,b) = e^{-\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$. So gilt für alle s,t:*

$$P_y S(s,t) P_y = c(s,t) P_y \tag{7.24}$$

Dabei ist für fixes y, $c(s,t)$ eine, von der Wahl der Gruppen U, V, beziehungsweise S unabhängige Funktion. Insbesondere ist P_y, bis auf eine Konstante c_0, eine Projektion. Es gilt $c_0 \neq 0$.

Betrachten wir zuerst das Beispiel des $L^2(\mathbb{R})$ mit der standardmäßigen Orts- und Impulsgruppe. Da hierbei der Kern des Abstiegsoperators $\hat{a}$ eindimensional ist, gilt aufgrund (7.10), dass P_y höchstens eindimensionales Bild hat. Wegen 4 hat P_y genau eindimensionales Bild. Ein selbstadjungierter Operator mit eindimensionalen Bild ist, bis auf eine Konstante, ein eindimensionaler Projektor. Somit gilt weiter $P_y = \lambda |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0|$. Dabei ist $\langle\varphi_0|$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt offensichtlich $\lambda |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0| S_s(s,t)\lambda |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0| = c(s,t)\lambda |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0|$ mit $c(s,t) = \lambda \langle\varphi_0| S_s(s,t) |\varphi_0\rangle$ und $c_0 = c(0,0) = \lambda \langle\varphi_0, \varphi_0\rangle \neq 0$. Dies entspricht bereits (7.24).

Wir wollen (7.24) nun allgemein beweisen. Wir verwenden Lemma 3 und dann Lemma 5, um zu zeigen, dass die LHS als P_f geschrieben werden kann, so dass für f gilt:

$$f(\alpha,\beta)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(a\beta-b\alpha)}y(a,b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}((\alpha-a)t-(\beta-b)s)}y(\alpha-a-s,\beta-b-t)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{7.25}$$

Die genaue Form dieses Integrals ist irrelevant. Wichtig ist nur, dass das als solches definierte f unabhängig von der Wahl von S ist. Auf Grund der Stetigkeit von f ist nach Lemma 4 die Gleichung (7.24) genau dann wahr, falls $f=c(s,t)y$. Für die standardmäßigen Orts- und Impulsgruppen S haben wir (7.24) und somit $f=c(s,t)y$ bereits gezeigt. Da f unabhängig von der Wahl von S ist, stimmt $f=c(s,t)y$ und somit (7.24) bereits allgemein.

[5][S.288-289]

Nun haben wir alle nötigen Hilfssätze hergeleitet. Bevor wir den Satz von Stone-von Neumann beweisen, zeigen wir die Irreduzibilität der standardmäßigen Orts- und Impulsgruppen U,V. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es sei W ein unter Linearkombinationen, Grenzwerten und Anwenden von U,V abgeschlossener Unterraum mit $W\neq\{0\}$, $W\neq\mathcal{H}$. Wie wir uns bereits bei (7.3) überlegt haben, ist $W^\perp$ ebenfalls invariant und $W^\perp\neq\{0\}$. Somit haben die Operatoren $P_y|_W$, $P_y|_{W^\perp}$ mit y definiert wie im vorherigen Lemma und S_s eingeschränkt auf W, beziehungsweise $W^\perp$ mindestens eindimensionales Bild. Daraus folgt mit Lemma 4, dass $P_y=P_y|_W+P_y|_{W^\perp}$ ein mindestens 2-dimensionales Bild hat, ein Widerspruch mit der bekannten Tatsache, dass der Abstiegeoperator $\hat{a}$ der schrödingerschen Operatoren eindimensionalen Kern hat, da eben $\hat{a}P_y=0$ gilt. [5][Seite 290]

In den folgenden Absätzen vollenden wir den Beweis des Satz von Stone-von Neumann. Zuerst zeigen wir, dass für eine Orthonormalbasis $\xi_i\in\mathrm{Im}(P_y)$ die davon, unter S erzeugten, topologisch abgeschlossenen Unterraume W_i, $|\xi_i|^2=1$ orhogonal zueinander sind. Für analoges ξ_s aus dem Schrödingerraum folgt aus der eben gezeigten Irreduzibilität, dass der dazugehörige abgeschlossene Unterraum W_s der Schrödingerraum $L^2(\mathbb{R})$ ist. Weiter zeigen wir, dass die in (7.5) definierten Relationen $Q_i\subset W_i\times L^2(\mathbb{R})$ mit diesen ξ_i Skalarprodukt erhaltend ist. Skalarprodukt erhaltend bedeutet, dass für $(u,\tilde{u})\in Q,(v,\tilde{v})\in Q$ gilt: $\langle u,v\rangle=\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle$. Es scheint hilfreich, das Skalarprodukt der Linearkombinationen, aus denen die W_i bestehen, zu betrachten:

$$\left\langle\sum_k\lambda_kS(a_k,b_k)\xi_i,\sum_k\mu_kS(a_k,b_k)\xi_j\right\rangle=\sum_{k,l}\lambda_k\mu_l\left\langle S(a_k,b_k)\xi_i,S(c_l,d_l)\xi_j\right\rangle \tag{7.26}$$

Wir betrachten die Summanden näher. Da $\xi\in\mathrm{Im}(P_y)$ und P_y bis auf eine Konstante $c_0\neq0$ eine selbst-adjungierte Projektion ist, gilt $c_0\xi=P_y\xi$ und somit mit (7.24):

$$\begin{aligned}c_0^2\langle S(s,t)\xi_i,S(q,r)\xi_j\rangle=\langle S(s,t)P_y\xi_i,S(q,r)P_y\xi_j\rangle=\\=\langle\xi_i,P_yS^{-1}(s,t)S(q,r)P_y\xi_j\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}sr-tq}\langle\xi_i,P_yS(q-s,r-t)P_y\xi_j\rangle=\\=c(q-s,r-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}sr-tq}\langle\xi_i,P_y\xi_j\rangle=c_0c(q-s,r-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}sr-tq}\delta_{i,j}\end{aligned} \tag{7.27}$$

Damit ist nicht nur gezeigt, dass die W_i orthogonal sind. Da die Funktion c unabhängig von der Wahl von S ist, sieht man auch, dass das Skalarprodukt unabhängig von der Wahl des S ist. Denn es gilt:

$$\langle S(s,t)\xi_i,S(q,r)\xi_i\rangle=\langle S_s(s,t)\xi_s,S_s(q,r)\xi_s\rangle \tag{7.28}$$

Wobei S_s für die Zusammenfassung der Exponentiale der standardmäßigen, Schrödingerschen Operatoren steht.

Die in (7.5) definierte Relation erhält für geeignete ξ_i tatsächlich das Skalarprodukt. Die Relation ist per Konstruktion linear, tatsächlich sind alle Skalarprodukt erhaltende Relationen linear, wie in Anhang 8.2 gezeigt. Mit dieser Linearität zeigen wir, dass die Relation (rechts)-eindeutig, also eine Funktion ist. Dazu sei $(u, \tilde{u}) \in Q, (v, \tilde{u}) \in Q$ also wegen der Linearität $(u - v, 0) \in Q$, somit $|u - v| = 0$, also $u = v$. Diese Funktion Q ist surjektiv, da das Bild von Q ein unter S_s invarianter Unterraum von $L^2(\mathbb{R})$ ist. Der einzige invariante Unterraum des irreduziblen $L^2(\mathbb{R})$ ist aber der ganze Raum. Es ist also die in (7.5) definierte Funktion $Q : W \to L^2(\mathbb{R})$ tatsächlich eine unitäre Abbildung.
Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die W_is den gesamten Hilbertraum $\mathcal{H}$ aufspannen. Ihr Span $\bigoplus_i W_i$ ist jedenfalls invariant unter S. Somit ist, wie bereits mit Gleichung (7.3) gezeigt, auch das Komplement invariant unter S. Falls $\bigoplus_i W_i$ nicht der ganze $\mathcal{H}$ ist, so ist das Komplement nicht $\{0\}$. Somit ist nach Lemma 4 die Einschränkung von P_y auf das Komplement nicht Null. Die steht aber im Widerspruch dazu, dass die ξ_i eine Basis von $\mathrm{Im}(P_y)$ bilden. Damit müssen die W_is den gesamten Hilbertraum aufspannen und wir haben die Hauptaussage des Satz von Stone-von Neumann bewiesen.
Als letztes beweisen wir die Anmerkung, dass im irreduziblen Fall die dazugehörige unitäre Abbildung Q bis auf eine Konstante vom Betrag Eins bestimmt ist. Wegen der Irreduzibilität gibt es nur ein $W = \mathcal{H}$ und somit nur eine Abbildung $Q : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R})$. Diese muss offensichtlich die Absteigeoperatoren $\hat{\alpha}$ auf dem Raum $\mathcal{H}$ und $\hat{a}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ miteinander durch Konjugation identifizieren. Daraus folgt, dass Q einen Vektor $\xi \in \ker \hat{\alpha}$ auf einen Vektor $\xi_s \in \ker \hat{a}$ abgebildet werden muss. Es sind aber beide Projektoren eindimensional. Damit ist die unitäre Abbildung Q auf dem Unterraum $\ker \hat{\alpha}$ bis auf eine Konstante vom Betrag Eins bestimmt. Da $\xi \in \ker \hat{\alpha}$, $\xi \neq 0$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ erzeugt, ist damit bereits die gesamte Abbildung Q bis auf eine Konstante vom Betrag Eins bestimmt. [5][S.291-292]

Literaturverzeichnis

[1] Tobias Fritz. On infinite-dimensional state spaces. Abgerufen am: 23.07.2021.

[2] Aurel Wintner. The unboundedness of quantum-mechanical matrices. *Phys. Rev.*, 71:738–739, May 1947.

[3] Igor Mol. Igor mols kommentar zu der frage: Does the canonical commutation relation fix the form of the momentum operator? Abgerufen am: am 23.07.2021.

[4] Laloë Frank Cohen-Tannoudji Claude, Diu Bernard. *Quantenmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2009.

[5] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer Verlag, New York, 2013.

[6] Leonard Huang. On infinite-dimensional state spaces. Abgerufen am: 23.07.2021.

[7] John (Janos) v. Neumann. Die eindeutigkeit der schrödingerschen operatoren., 1932. Abgerufen am: am 12.05.2021.

[8] Väisälä Jussi. A proof of the mazur-ulam theorem. Abgerufen am: 23.07.2021.

8 Anhang

8.1 Zerlegung einer 2×2 Matrix mit Determinante Eins

Wir wollen eine Matrix mit Determinante Eins durch möglichst wenige Zeilenadditionen darstellen. So bleibt uns offensichtlich nichts anderes übrig, als abwechselnd eine Skalierung der oberen zur unteren Zeile und der unteren zur obere Zeile zu addieren, bis es möglich ist, diese Skalierungsparameter so zu wählen, dass man die gewünschte Matrix erhält. Wegen der drei freien Parameter einer Matrix mit Determinante Eins benötigt man mindestens drei Umformungen. Wir unterscheiden den Fall, dass die Gegendiagonale einen Nicht-Null-Eintrag hat. Dieser ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der oberen Zeile. So reichen drei Umformungen tatsächlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+ab & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+ab & b \\ a+c+abc & 1+bc \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Da $b \neq 0$, können die Diagonaleinträge mit a, c frei gewählt werden. Der verbleibende Eintrag folgt der Zwangsbedingung. Betrachten wir nun den Fall, dass die Gegendiagonale Null ist. In diesem Fall sind nach drei Umformungen die Diagonaleiträge gleich, wie man aus der Symmetrie und (8.1) sieht. Wir benötigen also mindestens eine weitere Umformung. Vier Umformungen reichen auch aus, wie die folgende Sequenz zeigt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

8.2 Skalarprodukt erhaltende Relationen sind lineare unitäre Abbildungen

Es soll gezeigt werden, dass eine, das Skalarprodukt erhaltende Relation, schon eine lineare Abbildung ist, die auf entsprechenden Bild- und Definitionsbereichen unitär ist.

Den Definitionsbereich schränken wir auf jene Elemente ein, die tatsächlich auch mit einem anderen in Relation stehen. Wir zeigen zuerst, dass die Relation eine Funktion ist. Dazu braucht man also noch die Linkstotalität:
Sei $(x, a), (x, b) \in Q$, so folgt:

$$\begin{aligned} \langle a-b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle - 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,x\rangle + \langle x,x\rangle = 0 \\ \Rightarrow\ a-b=0\ \Rightarrow a=b \end{aligned} \tag{8.3}$$

Q ist also eine Funktion. Wir zeigen außerdem, dass Q 0 auf 0 abbildet.

$$\langle Q(0), Q(0)\rangle = \langle 0,0\rangle = 0\ \Rightarrow\ Q(0) = 0 \tag{8.4}$$

Da wir den Zielbereich auf das Bild einschränken, ist die Funktion automatisch surjektiv.
Der Beweis dafür, dass diese Funktion Q linear und unitär ist, folgt aus dem Satz von Mazur-Ulam.

Theorem 3 (Mazur-Ulam)**.** *[8] Eine surjektive Isometrie $f: V \mapsto W$ zwischen normierten Vektorräumen ist eine affine Abbildung.*

Ein Beweis findet sich in [8]