universität innsbruck

Gödels Unvollständigkeitssätze

Bedeutung und Missverständnisse

Emre Durukan, 11721461

Innsbruck, 15. August 2023

Bachelorarbeit

eingereicht an der Universität Innsbruck, Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Education (BEd)

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)
Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik

Betreuer*in:
Dr. Tobias Fritz
Institut für Mathematik
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

Abstract

Gödel gehört zweifellos zu den größten Mathematikern unserer Zeit. Er hat viele wichtige Beiträge zur mathematischen Logik und zu anderen Gebieten geleistet. Aber es ist zweifellos sein Unvollständigkeitsergebnis, das seinen Ruf begründet hat. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es den Inhalt, Umfang und die Grenzen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze so darzustellen, dass sich auch ein Leser ohne Kenntnisse der formalen Logik ein nüchternes und fundiertes Urteil über diese verschiedenen Argumente und Überlegungen, die sich auf den Satz berufen, bilden kann. Zu diesem Zweck werden Gödels Sätze zunächst präsentiert. Anschließend eine Reihe häufig vorkommender Argumente und Überlegungen vorgestellt. Um schließlich gängigen Missverständnissen entgegenzuwirken und Fehlinterpretationen zu klären.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Offenbar hat kein mathematisches Theorem außerhalb der Mathematik so viel Interesse geweckt wie Kurt Gödels berühmtes Unvollständigkeitsergebnis aus dem Jahr 1931. Es wird nicht nur von Mathematikern, Logikern und Philosophen angeführt, sondern auch von Physikern, Theologen, Literaturkritikern, Architekten und anderen. Viele Verweise auf den Unvollständigkeitssatz[1] außerhalb der formalen Logik sind, wie wir sehen werden, offensichtlich unsinnig und scheinen auf groben Missverständnissen oder freier Assoziation zu beruhen. So bemerken Alan Sokal und Jean Bricmont in ihrem Kommentar zur Postmoderne: „Der Gödelsche Satz ist eine unerschöpfliche Quelle intellektueller Mißbräuche". (Sokal/Bricmont 1999: 200) Aber unter den nichtmathematischen Argumenten, Ideen und Überlegungen, die von Gödels Theorem inspiriert wurden, gibt es auch viele, die keineswegs postmodernistische Exzesse darstellen, sondern vielen Menschen mit sehr unterschiedlichem Hintergrund ganz natürlich in den Sinn kommen, wenn sie über das Theorem nachdenken. Bei dem Unvollständigkeitssatz handelt es sich um einen Satz über die Konsistenz und Vollständigkeit formaler Systeme. „Konsistent", „inkonsistent", „vollständig", „unvollständig" und „System" sind Begriffe, die nicht nur in der Logik, sondern auch in der Alltagssprache in vielfältiger Weise verwendet werden, und so ist es nicht verwunderlich, dass Gödels Satz in einem informellen Sinne mit verschiedenen Vorstellungen von Unvollständigkeit, Systemen und Konsistenz in Verbindung gebracht wird. (Vgl. Franzén 2005: 3ff.)

2. Formale Systeme, Konsistenz und Vollständigkeit

Um den Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu verstehen, muss man zunächst die darin vorkommenden Schlüsselbegriffe erklären: formales System, Konsistenz und Vollständigkeit. Ganz grob gesagt ist ein formales System ein System von Axiomen, die mit Argumentationsregeln ausgestattet sind, die es erlauben, neue Theoreme zu erzeugen. Die Menge der Axiome muss endlich oder zumindest entscheidbar sein, d.h. es muss einen Algorithmus geben, mit dem man mechanisch entscheiden kann, ob eine bestimmte Aussage ein Axiom ist oder nicht, andernfalls könnte man z.B. alle wahren Aussagen der Arithmetik als Axiome aufstellen. Eine solche Theorie ist trivialerweise vollständig, aber höchst abstrakt und in der Praxis völlig nutzlos. Ein formales System ist konsistent, wenn es keine Aussage gibt, für die sowohl die Aussage selbst als auch ihre Negation im System ableitbar sind. Nur konsistente Systeme sind in diesem Zusammenhang interessant, denn es ist eine elementare

[1] Der Begriff "Gödelscher Unvollständigkeitssatz" bezieht sich auf die Kombination des ersten und zweiten Satzes oder manchmal auch einen der beiden - in der Regel den ersten.

Tatsache der Logik, dass in einem inkonsistenten formalen System jede Aussage ableitbar ist, und folglich ist ein solches System trivial vollständig. Schließlich ist ein formales System vollständig, wenn für jede Aussage der Sprache des Systems entweder die Aussage oder ihre Negation im System abgeleitet werden kann. (Vgl. Franzén 2005: 16)

3. Erster Unvollständigkeitssatz

Beginnen wir damit den ersten Unvollständigkeitssatz zu formulieren, der wie folgt lautet: Jedes konsistente formale System, in dem ein gewisses Maß an elementarer Arithmetik ausgeführt werden kann, ist in Bezug auf Aussagen der elementaren Arithmetik unvollständig: Es gibt solche Aussagen, die in dem System weder bewiesen noch widerlegt werden können. (Vgl. Franzén 2005: ebd.)

3.1. Ein gewisses Maß an elementarer Arithmetik

Jedes System, dessen Sprache die Sprache der elementaren Arithmetik enthält und dessen Theoreme elementare Fakten über die natürlichen Zahlen enthalten, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Der Unvollständigkeitssatz gilt jedoch auch für Systeme, die keine expliziten Aussagen über die natürlichen Zahlen machen, sondern sich auf mathematische Objekte beziehen, die zur Darstellung der natürlichen Zahlen verwendet werden können. Für diese Darstellung können beispielsweise Zeichenketten oder eine endliche Menge verwendet werden. An dieser Stelle sei nur angemerkt, dass nichts Wesentliches verloren geht, wenn wir uns die formalen Systeme, auf die der erste Unvollständigkeitssatz zutrifft, als solche Systeme vorstellen, die eine arithmetische Komponente haben, in denen wir die Sprache der Arithmetik verwenden und einige grundlegende Fakten über die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen aufstellen können. Je nach System kann die Verwendung der Sprache der Arithmetik innerhalb des Systems mit einer gewissen Übersetzung verbunden sein, aber im Wesentlichen können wir die Sprache des Systems als die Sprache der elementaren Arithmetik betrachten. (Vgl. Franzén 2005: 20f)

3.2. Die Beweisidee

Betrachten wir das klassische Lügnerparadoxon „Dieser Satz ist falsch“ als Grundidee für den Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes. Es ist offensichtlich, dass wir diesem Satz keinen der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zuweisen können, ohne in einen Widerspruch zu geraten. Ähnlich verhält es sich mit der Aussage „Dieser Satz kann nicht bewiesen werden“. Wenn dieser Satz in der Sprache der Peano-Arithmetik (PA) korrekt ausgedrückt werden kann,

kann er weder beweisbar noch widerlegbar sein. Wäre der Satz beweisbar, würde er seiner Bedeutung widersprechen, was einer korrekten Formalisierung widerspräche. Wäre seine Negation beweisbar, so hieße die Interpretation des Inhalts, dass der Satz beweisbar wäre, was einen Widerspruch darstellt. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass weder diese Satz noch seine Negation beweisbar sind. (Vgl. Kahle 2006: 5)

3.3. Die Beweismethode

Im Folgenden schreiben wir für „$PA\ beweist\ \varphi$“, in Zeichen $PA \vdash \varphi$, wenn die Formel φ in der Peano-Arithmetik beweisbar ist. Dabei lassen sich zwei Aufgaben trennen. Zuerst ist es nötig, Beweisbarkeit zu formalisieren. Danach muss man eine Möglichkeit finden die Aussage „Dieser Satz ist nicht beweisbar“ auszudrücken. Das erste Problem löste Gödel durch die Arithmetisierung der formalen Sprache durch eine Methode, die heute auch Gödelisierung genannt wird. (Vgl. Kahle 2006: 5)

Gödel beschrieb ein formalisiertes Kalkül, in dem alle üblichen arithmetischen Notationen ausgedrückt und vertraute arithmetische Beziehungen hergestellt werden können. Er verwendete eine Anpassung des in Principia Mathematica entwickelten Systems. Aber jedes Kalkül, in dem das Kardinalzahlensystem konstruiert werden kann, hätte seinem Zweck gedient. Die Formeln des Kalküls werden aus einer Klasse elementarer Zeichen gebildet, die das grundlegende Vokabular darstellen. Gödel zeigte, dass es möglich ist, jedem elementaren Zeichen, jeder Formel und jedem Beweis eine eindeutige Zahl zuzuordnen. Diese Zahl wird die „Gödelnummer“ des Zeichens, der Formel oder des Beweises genannt. (Vgl. Nagel/Newman 1958: 53f.)

Wir stellen daher folgende injektive Abbildung auf:

$$Gn: Terme, Formeln\ und\ Beweise\ in\ PA\ \rightarrow \mathbb{N}$$

Dadurch werden Terme, Formeln und Beweise durch endliche Folgen von natürlichen Zahlen identifiziert. Die Gödelnummer einer Formel φ ist somit die Zahl, die durch $Gn(\varphi)$ ausgedrückt wird. Es gibt viele Möglichkeiten, Gödelnummern zuzuordnen, und es ist für das Hauptargument irrelevant, welche man wählt. Betrachten wir zunächst ein Beispiel für eine solche Arithmetisierung anhand der Formel:

$$\varphi := x \rightarrow x$$

Zunächst wollen wir die Formel in eine native Form des Systems übertragen, d.h. die Implikation umschreiben:

$$\varphi = (\neg(x)) \vee (x)$$

Anschließend können wir die Formel in eine endliche Reihe natürlicher Zahlen umwandeln:

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \neg & (& x &) &) & \vee & (& x &) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 11 & 5 & 11 & 17 & 13 & 13 & 7 & 11 & 17 & 13 \end{array}$$

Schließlich wollen wir die Zahlenreihe zu einer natürlichen Zahl verschmelzen:

> „Die endlichen Reihen natürlicher Zahlen bilden wir nun (wieder eineindeutig) auf natürliche Zahlen ab, indem wir der Reihe $n_1, n_2, \ldots n_k$ die Zahl $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{n_k}$ entsprechen lassen, wo p_k die k-te Primzahl (der Größe nach) bedeutet. Dadurch ist nicht nur jedem Grundzeichen, sondern auch jeder endlichen Reihe von solchen in eineindeutiger Weise eine natürliche Zahl zugeordnet.“ (Hoffmann 2017: 208)

$$\begin{aligned} Gn(\varphi) = \quad & 2^{11} \cdot 3^{5} \cdot 5^{11} \cdot 7^{17} \cdot 11^{13} \cdot 13^{13} \cdot 17^{7} \cdot 19^{11} \cdot 23^{17} \cdot 29^{13} \\ = \quad & 408903366393612248553610683605406928366886286950146187 \\ & 097744356843191506462600286017873779784719472726253429 \\ & 4700000000000 \end{aligned}$$

Wie man an diesem Beispiel erkennen kann, berücksichtigt Gödel nicht die Größe der Zahlen, sodass bereits bei einer kurzen Formel eine so große Zahl entsteht, wodurch eine Schreibweise in Dezimalzahlen unpraktisch wirkt. (Vgl. Hoffmann 2017: 209)

Wichtiger ist jedoch, dass formale Beweise nun durch Zahlen dargestellt werden können und wir nun die Möglichkeit haben, über diese innerhalb der Peano-Arithmetik zu sprechen. Das bedeutendste Ergebnis ist, dass Gödel beweisen konnte, dass sich alle Funktionen innerhalb der Peano-Arithmetik definieren lassen, die zum Arbeiten mit Gödelnummern erforderlich sind. Insbesondere lässt sich ein zweistelliges Beweisprädikat $Bew(x, y)$ definieren, sodass für jede Formel φ gilt: PA beweist φ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so dass PA auch $Bew(\bar{n}, Gn(\varphi))$ beweist, wobei $\bar{n}$ hier der formale Term, die Ziffer, der Sprache der Peano-Arithmetik ist, der die Zahl n repräsentiert. Das Beweisbarkeitsprädikat $Bew(x)$ kann nun in die Objektsprache umformuliert als $\exists y\, Beweis(y, x)$ definiert werden. Damit erhalten wir, dass für eine gegebene Formel φ mit Gödelnummer $Gn(\varphi)$ die Peano-Arithmetik die Formel φ genau dann beweist, wenn sie $Bew(Gn(\varphi))$ beweist oder in Zeichen:

$$PA \vdash \varphi \; genau \; dann, wenn \; PA \vdash Bew(Gn(\varphi)). \tag{1}$$

In einem zweiten Schritt demonstrierte Gödel, dass Selbstreferenz auch formal dargestellt werden kann. Dies folgt direkt aus dem bereits bekanntem Fixpunkttheorem, das besagt, dass es zu jeder Formel $\varphi(x)$ mit genau einer freien Variablen x eine Formel ψ, den Fixpunkt von φ, gibt, sodass die Peano-Arithmetik $\varphi(Gn(\psi)) \leftrightarrow \psi$ beweist:

$$PA \vdash \varphi(Gn(\psi)) \leftrightarrow \psi \tag{2}$$

Der Fixpunkt ψ lässt sich inhaltlich als der selbstreferentielle Satz „Ich habe die Eigenschaft φ" lesen. Nun betrachten wir den Fixpunkt ψ_G von $\neg Bew(x)$. ψ_G besagt inhaltlich, dass ψ_G nicht beweisbar ist. Formal gilt nun:

$$PA \vdash \psi_G \; genau \; dann, wenn \; PA \vdash Bew(Gn(\psi_G)) \; auf \; Grund \; von \; (1),$$

$$genau \; dann, wenn \; PA \vdash \neg\psi_G \; auf \; Grund \; von \; (2),$$

$$mit \; \neg Bew(x) \; für \; \varphi(x).$$

Unter der Voraussetzung, dass PA konsistent ist, folgt somit, dass PA weder ψ_G noch $\neg\psi_G$ beweist, woraus folgt, dass PA unvollständig ist. (Vgl. Kahle 2006: 5ff.)

3.4. Bedeutung

Es wird oft gesagt, dass Gödel gezeigt hat, dass es Wahrheiten gibt, die nicht bewiesen werden können. Das ist falsch, denn der Unvollständigkeitssatz sagt nichts darüber aus, was mit „nicht beweisbar" in einem absoluten Sinn gemeint sein könnte. Unbeweisbar bedeutet im Kontext des Unvollständigkeitssatzes nichts anderes als, unbeweisbar in einem bestimmten formalen System. Für jede Aussage A, die in einem bestimmten formalen System S nicht beweisbar ist, gibt es trivialerweise andere formale Systeme, in denen A beweisbar ist. Insbesondere ist A in einem System, in der es als Axiom angenommen wird, beweisbar. Der Gedanke, dass Gödels Theorem die Existenz unbeweisbarer Wahrheiten aufzeigt, findet seine Stütze in der Tatsache, dass es formale Systeme gibt, in denen Axiome und Argumentationsregeln aufgenommen werden, die aus mathematischer Sicht korrekt sind und darüber hinaus für die Ableitung aller unserer gewöhnlichen arithmetischen Theoreme ausreichen. Insbesondere ist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom (ZFC) so stark, dass die allermeisten Aussagen, die für Mathematiker von praktischem Interesse sind, darin entscheidbar sind. Und deshalb wird ZFC allgemein als das formale System angesehen, das aller Mathematik zugrundeliegt. Da ZFC in Bezug auf arithmetische Aussagen unvollständig ist, vorausgesetzt die Theorie ist konsistent, könnte eine Schlussfolgerung daraus lauten, dass es arithmetische Wahrheiten gibt, die in dem Sinne unbeweisbar sind und dass es für uns keine Möglichkeit gibt, die Wahrheit der Aussage mathematisch zu beweisen. Diese Konklusion würde vielleicht folgen, wenn wir keine Möglichkeit wüssten, die Axiome der ZFC zu einer stärkeren Menge von Axiomen zu erweitern, die mit derselben Berechtigung wie die Axiome der ZFC immer noch als Ausdruck gültiger Prinzipien des mathematischen Denkens gelten können. Tatsächlich gibt es aber solche Möglichkeiten, ZFC zu erweitern. Der Unvollständigkeitssatz enthält daher keinen Hinweis darauf, dass es wahre arithmetische Aussagen gibt, die in einem absoluten Sinn unbeweisbar sind. Wenn jedoch ein arithmetischer Satz in ZFC unbeweisbar ist, dann ist er mit den heutigen „gewöhnlichen" mathematischen Methoden und Axiomen, wie man sie in mathematischen Lehrbüchern findet, nicht beweisbar, und somit auch nicht auf eine Weise bewiesen werden kann, die eine große Mehrheit von Mathematikern heute als unproblematisch und schlüssig ansehen würde. (Vgl. Franzén 2005: 24)

Hinsichtlich unserer Ausführung stellt sich nun die Frage, was eine „wahre arithmetische Aussage" bedeutet. In der mathematischen Logik ist die wahre Arithmetik die Menge aller wahren Aussagen der Logik erster Stufe über die Arithmetik der natürlichen Zahlen. Dies ist die Theorie, die mit dem Standardmodell der Peano-Axiome in der Sprache der PA verbunden ist. Die Menge der Symbole der PA umfasst die Symbole für Additions-, Multiplikations- und Nachfolgefunktionen, die Symbole für Gleichheits- und Weniger-als-Relationen sowie ein Konstantensymbol für 0. Die Formeln der Sprache der PA werden aus diesen Symbolen zusammen mit den logischen Symbolen in der üblichen Weise der Logik erster Stufe gebildet. Die Struktur $\mathcal{N}$ wird durch folgende 4 Eigenschaften als ein Modell der Peano-Arithmetik definiert: (1) Die Gesamtheit der Gegenstände sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$; (2) Das Symbol 0 wird als die Zahl 0 interpretiert; (3) Die Funktionssymbole werden als die üblichen arithmetischen Operationen auf $\mathbb{N}$ interpretiert; (4) Die Gleichheits- und Weniger-als-Relationssymbole werden als die üblichen Gleichheits- und Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}$ interpretiert. Diese Struktur ist bekannt als das Standardmodell oder die beabsichtigte Interpretation der Arithmetik erster Stufe. Ein Satz in der Sprache der PA wird als wahr in $\mathcal{N}$ bezeichnet, wenn er in der soeben definierten Struktur wahr ist. Wahre Arithmetik ist somit definiert als die Menge aller Sätze in der Sprache der PA, die in $\mathcal{N}$ wahr sind. (Vgl. „True arithmetic“ 2021)

Nichtsdestotrotz besagt der Unvollständigkeitssatz nicht, dass jedes konsistente formale System unvollständig ist. Im Gegenteil, es gibt viele vollständige und konsistente formale Systeme. Ein besonders interessantes Beispiel aus mathematischer Sicht ist die Theorie der reellen Zahlen. Die Sprache dieser Theorie erlaubt es uns, wie die Sprache der Arithmetik, über die Addition und Multiplikation von Zahlen zu sprechen, aber mit Bezug auf die reellen Zahlen und nicht mehr auf die natürlichen Zahlen. Die reellen Zahlen umfassen die ganzen Zahlen, aber auch alle rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen sind, sowie irrationale Zahlen wie die Quadratwurzel aus 2 und die Zahl π. Ein Beispiel für eine Aussage in dieser Sprache ist die folgende, „Für beliebige sieben verschiedene reelle Zahlen gibt es unter ihnen zwei Zahlen x und y, so dass $x - y$ geteilt durch $1 + xy$ größer als 0 und kleiner als die Quadratwurzel aus drei ist.“ Eine weitere solche Aussage würde lauten, „Eine Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ hat nur dann zwei verschiedene reelle Lösungen, wenn $3c - b^2$ kleiner als 0 ist und $4c^3 - b^2c^2 - 18bcd - 4b^3d + 27d^2$ kleiner oder gleich 0 ist.“ Die vollständige Theorie der reellen Zahlen beweist diese und ähnliche Aussagen. Wie aus diesen Beispielen deutlich wird, ist die Theorie alles andere als trivial und hat zahlreiche Anwendungen in der Elektrotechnik, der rechnergestützten Geometrie, der Optimierung und in anderen Bereichen. Da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen bilden, mag es seltsam erscheinen, dass die Theorie der reellen Zahlen vollständig sein kann, wenn die Theorie der natürlichen Zahlen unvollständig ist. Die Unvollständigkeit des Systems der natürlichen Zahlen lässt sich nicht auf das System der reellen Zahlen übertragen, denn obwohl jede natürliche Zahl auch eine reelle Zahl ist, können wir die natürlichen Zahlen nicht allein mit der Sprache von als Teilmenge der reellen Zahlen definieren, und deshalb können wir arithmetische Aussagen nicht in der Sprache des Systems ausdrücken. (Vgl. Franzén 2005: 25f)

4. Zweiter Unvollständigkeitssatz

Kommen wir schließlich zum zweiten Unvollständigkeitsergebnis, das wie folgt lautet: Für jedes konsistente formale System, in dem eine gewisse Menge an elementarer Arithmetik durchgeführt werden kann, kann die Konsistenz des Systems nicht im System selbst bewiesen werden. (Vgl. Franzén 2005: 34)

4.1. Die Beweisidee

Wie wir bereits erwähnt haben, ist ein Beweissystem konsistent, falls nicht gleichzeitig ein Satz A und seine Negation $\neg A$ bewiesen werden kann. Das heißt, ein konsistentes Beweissystem kann keinen Widerspruch $A \wedge \neg A$ herleiten. Im Fall eines Beweissystems für die Arithmetik ergibt sich, dass das System konsistent ist, wenn es den Satz „$1 = 2$“ nicht beweist, da $1 \neq 2$ durch die üblichen Axiome der PA für die natürlichen Zahlen abgeleitet werden kann. Konsistenz ist ein syntaktischer Begriff, der sich auf die syntaktische Beweisbarkeit eines bestimmten Satzes „$1 = 2$“ innerhalb eines gegebenen Beweissystems bezieht. Insbesondere ist es möglich, eine arithmetische Formel zu schreiben, die die Konsistenz eines Beweissystems S, bezeichnet als Con_s, wie folgt ausdrückt:

Con_s: „der Satz ‚$1 = 2$‘ ist in S nicht beweisbar”

Unter der Annahme, dass ein Beweissystem S konsistent ist, zeigen wir, dass der Satz A, der besagt, „Ich bin in S nicht beweisbar“ in S nicht beweisbar ist, was so viel heißt wie A ist tatsächlich wahr oder formal ausgedrückt:

$$Con_s \Rightarrow \neg \exists x \, Bew(x, a)$$

Wobei $Bew(x, a)$ bedeutet, dass x eine Gödelnummer eines Beweises der Aussage A ist, dessen Gödelnummer a ist. Es wird nun angenommen, S könne seine eigene Konsistenz beweisen:

$$S \vdash Con_s$$

Indem wir die oberen zwei Formeln zusammenfassen, erhalten wir schließlich:

$$S \vdash \neg \exists x \, Bew(x, a)$$

Da, wie schon erwähnt, der Satz A nichts anderes bedeutet wie „Ich bin in S nicht beweisbar.“ ist $\neg \exists x \, Bew(x, a)$ äquivalent zu A selbst. Somit gilt:

$$S \vdash A$$

Insbesondere erhalten wir, dass S die Negation $\neg A$ beweist, da die Aussage $S \vdash A$ äquivalent zu $\neg A$ ist. Wir erhalten also, dass S den Satz A als auch seine Negation $\neg A$ beweist. Diese Tatsache steht aber im Konflikt mit dem ersten Unvollständigkeitssatz. Damit ist nun entweder das System inkonsistent oder die Annahme war falsch und S kann die eigene Konsistenz nicht beweisen. (Vgl. Kabanets 2016: 1f.)

4.2. Bedeutung

Das zweite Unvollständigkeitsergebnis hatte tiefgreifende Auswirkungen auf die von David Hilbert vertretenen Vorstellungen über die Grundlagen der Mathematik, der das Ziel formale Systeme zu formulieren, innerhalb derer die gesamte gewöhnliche Mathematik, einschließlich der Mathematik der unendlichen Mengen, durchgeführt werden konnte, und die Konsistenz dieser Systeme nur mit Hilfe der grundlegendsten und konkretesten mathematischen Überlegungen zu beweisen. In diesem Sinne beabsichtigte Hilbert, dass sein Konsistenzbeweis schlüssig sein sollte. Die Konsistenz von beispielsweise ZFC soll nur mit Hilfe einer Argumentation bewiesen werden, auf die wir in Wissenschaft und Mathematik nicht verzichten können. Obwohl Hilbert nicht formal spezifiziert hat, welche Methoden erlaubt sind, scheint es klar zu sein, dass die Methoden, die Hilbert im Sinne hatte, in Systemen der Arithmetik wie PA formalisiert werden können. Und wenn PA seine eigene Konsistenz nicht beweisen kann, folgt daraus, dass nicht einmal die Konsistenz der elementaren Arithmetik bewiesen werden und wiederum Hilberts Programm nicht ausgeführt werden kann. Es wird daher oft gesagt, dass der Unvollständigkeitssatz Hilberts Programm zerstörte, aber das war nicht die Ansicht von Gödel selbst. Vielmehr zeigte er, dass die Mittel, mit denen akzeptable Konsistenzbeweise durchgeführt werden konnten, erweitert werden mussten. Gödel bot eine Möglichkeit, den Begriff des Beweises zu erweitern. (Vgl. Franzén 2005: 38f.)

5. Der Unvollständigkeitssatz außerhalb der Mathematik

Eine schwächere Formulierung des ersten Unvollständigkeitssatzes als die angegebene besagt nur, dass es für jedes formale System, das einen gewissen Anteil an Arithmetik enthält, eine Aussage in der Sprache des Systems existiert, die in diesem System unentscheidbar ist. Der Unvollständigkeitssatz sagt uns nur, dass das System in seinem arithmetischen Teil nicht vollständig sein kann. Interessant klingende, vermeintliche Anwendungen des Unvollständigkeitssatzes außerhalb der Mathematik ignorieren daher oft die wesentliche Bedingung, dass sie eine gewisse Menge an Arithmetik umfassen müssen, und formulieren den Satz fälschlicherweise als Satz über formale Systeme im Allgemeinen. Wenn sie diese Bedingung berücksichtigen, greifen manche Autoren zu Formulierungen wie „Unsere Hypothese ist, dass das Universum mindestens so groß ist wie die Arithmetik, so dass es von Unvollständigkeit betroffen ist.“ oder „Die Philosophie sollte die Arithmetik einschließen, sonst ist sie bereits begrenzt.“ Der erste Satz ergibt keinen offensichtlichen Sinn, während der zweite auf die schwache Kritik an einem philosophischen System hinausläuft, dass es kein vollständiger Leitfaden für das Leben oder das Universum sein kann, da es nicht jede arithmetische Aussage entscheiden kann. (Vgl. Franzén 2005: 27f)

Es gibt eine populäre Ansicht, nach der das Gödelsche Theorem zeigt, dass der menschliche Geist keine Rechenmaschine sein kann, sondern jede Maschine unendlich übertrifft. Die angebliche Begründung lautet wie folgt: Für jedes formale System, das als eine Theorem erzeugende Rechenmaschine betrachtet werden kann, weist der Gödelsche Unvollständigkeitssatz einen unbeweisbaren Satz auf, oft als Gödel-Satz des Systems bezeichnet. Wir Menschen können die Wahrheit dieses Satzes erkennen, während das formale System oder die entsprechende Maschine dies nicht kann. Es gibt also, so das Argument, etwas Unberechenbares im menschlichen Denken, vielleicht sogar eine irreduzible geistige, nicht-materielle Komponente des menschlichen Geistes. Solche antimechanistischen Schlussfolgerungen wurden aus Gödels Theorem gezogen und wirken offenbar ganz natürlich und attraktiv, denn sie werden immer wieder neu erfunden. Dennoch sind solche Schlussfolgerungen auf der Grundlage des Unvollständigkeitssatzes nicht gerechtfertigt. Franzén erklärt deutlich, dass wir im Allgemeinen keine Ahnung darüber haben, ob der Gödel-Satz eines beliebigen Systems wahr ist oder nicht. Was wir wissen können, ist nur, dass der Gödel-Satz eines Systems wahr ist, wenn und nur wenn das System konsistent ist, und so viel ist im System selbst beweisbar. Aber im Allgemeinen haben wir keine Möglichkeit zu sehen, ob ein gegebenes System konsistent ist oder nicht. Gleichermaßen kamen Aussagen auf, die behaupteten, dass der Unvollständigkeitssatz die Unvollständigkeit der Bibel, der US-Verfassung und der Philosophie des Objektivismus von Ayn Rand beweist. Solche Behauptungen lasse aber die wesentliche Bedingung außer Acht, dass das System in der Lage sein muss, ein gewisses Maß an Arithmetik zu formalisieren. Keines der genannten „Systeme“ hat etwas mit Arithmetik zu tun. Sogar schlimmer noch, sie haben nichts mit einem formalen System zu tun. Sie haben keine genau spezifizierte formale Sprache, einen Satz von Axiomen oder Inferenzregeln. Deshalb, ist Gödels Theorem in solchen Kontexten einfach nicht anwendbar. Vernünftiger sind die Versuche, den Unvollständigkeitssatz auf die Physik anzuwenden. (Vgl. Franzén 2005: 80ff.)

Die hypothetische Weltformel oder „Theorie von allem“ (aus dem Englischen theory of everything, TOE) wird manchmal als Endziel der theoretischen Physik angesehen. Bedeutende Physiker wie Freeman Dyson und Stephen Hawking haben jedoch unter Berufung auf Gödels

Unvollständigkeitssatz die Meinung geäußert, dass es eine solche Theorie von allem nicht gibt. Nun scheint es vernünftiger zu sein, anzunehmen, dass eine Formalisierung der theoretischen Physik Gegenstand des Unvollständigkeitssatzes sein würde, indem man eine arithmetische Komponente einbezieht. Dennoch sagen uns Gödels Unvollständigkeitssätze nur, dass es eine Unvollständigkeit in der arithmetischen Komponente der Theorie gibt. Ob eine physikalische Theorie vollständig ist, wenn man sie als Beschreibung der physikalischen Welt betrachtet, darüber sagt der Unvollständigkeitssatz nichts aus. (Vgl. Franzén 2005: 87f.)

In Auszügen aus der Bibliography of Christianity and Mathematics heißt es beispielsweise, dass Gödels Theorem beweist, dass Physiker niemals in der Lage sein werden, eine endgültige Theorie der physikalischen Realität zu formulieren, oder dass der menschliche Geist mehr als nur eine logische Maschine ist. Demnach argumentiert Stanley L. Jaki, dass auf der Grundlage des Gödelschen Theorems der Gewissheit Grenzen gesetzt sind und dass selbst im reinen Denken der theoretischen Physik eine Grenze vorhanden ist, wie auf allen anderen Gebieten der Erkenntnis. Ein integraler Bestandteil dieser Grenze ist der Wissenschaftler selbst, als Denker, mit den sich ständig verändernden Mustern seiner verschiedenen Geisteszustände. Denn wie die wechselnden Stimmungen des Geisteszustandes des Physikers den unvollkommenen, menschlichen Charakter der Wissenschaft andeuten, so beweisen auch die Art und Weise seiner Suche nach Gewissheit dasselbe von den Errungenschaften. Schließlich, so argumentiert Jaki beleuchten Gödels Unvollständigkeitssätze die immense Überlegenheit des menschlichen Gehirns gegenüber seinen Produkten wie den fortschrittlichsten Computerformen. Offensichtlich kann keine der Maschinen je eine Antwort geben, die in ihrer Breite und Tiefe mit dem Gödelschen Satz vergleichbar ist. (Vgl. Jaki 1966: 129)

Solche Berufungen auf den Satz von Gödel wiederholen nur die oben diskutierten und unzulänglichen Argumente gegen die mechanistische Theorie des Geistes. Es gibt jedoch einige spezifischere theologische Berufungen auf den Unvollständigkeitssatz. Einige davon sind schlichtweg absurd, und andere beruhen bestenfalls auf Analogien. Manchmal wird behauptet, Gödels Theorem zeige, dass die einzige Möglichkeit zu einer unbewiesenen Wahrheit der Glaube ist. Aber erstens hat Gödel keine absolut unbeweisbaren Wahrheiten dargelegt, sondern nur relative und zweitens, wenn wir auf der Grundlage der mathematischen Argumentation absolut keine Ahnung haben, ob ein gegebenes hochkomplexes formales System konsistent ist oder nicht, ist es ziemlich unklar, wie ein Glaubenssystem dabei helfen könnte. (Vgl. Franzén 2005: 88f.)

Schließlich werden die Sätze von Gödel oft als Beleg für eine Form von Skepsis gegenüber der Mathematik angesehen. Es wird behauptet, dass wir streng genommen nichts beweisen können oder dass die Konsistenz unserer grundlegenden Systeme, wie ZFC zweifelhaft ist. Franzén argumentiert gegen solche Behauptungen, dass nichts in Gödels Theorem in irgendeiner Weise der Ansicht widerspricht, dass wir absolut sicheres Wissen über die Wahrheit der Axiome des Systems und folglich über ihre Konsistenz haben. Wir brauchen das Gödelsche Theorem nicht, um uns zu sagen, dass wir einige Grundprinzipien ohne Beweis annehmen müssen. Wenn wir keine Zweifel an der Konsistenz von, sagen wir, ZFC haben, dann gibt es nichts im zweiten Unvollständigkeitssatz, was Anlass zu solchen Zweifeln geben könnte. Und wenn wir Zweifel an der Konsistenz der ZFC haben, haben wir keinen Grund zu glauben, dass ein Konsistenzbeweis von ZFC, der in ZFC selbst gegeben ist, diese Zweifel ausräumen würde. (Vgl. Franzén 2005: 103f.)

Es ist sehr wohl möglich, Zweifel an der Konsistenz eines Systems zu haben und zu versuchen, diese Zweifel durch einen Konsistenzbeweis zu beseitigen. In einem solchen Fall müssen wir den Beweis in einem System durchführen, dessen Konsistenz nicht gleichermaßen angezweifelt wird. Ein Konsistenzbeweis kann aber genauso gut ein ganz gewöhnlicher mathematischer Beweis einer bestimmten Tatsache über ein formales System sein, der nicht darauf abzielt, Zweifel an der Konsistenz der Mathematik zu zerstreuen, ebenso wenig wie Beweise arithmetischer Theoreme im Allgemeinen darauf abzielen, solche Zweifel zu zerstreuen. Gödels Satz sagt uns nichts darüber, was in der Mathematik zweifelhaft ist oder nicht. Von der Konsistenz der Arithmetik als etwas zu sprechen, das nicht bewiesen werden kann, macht nur dann Sinn, wenn man eine skeptische Haltung gegenüber der gewöhnlichen Mathematik im Allgemeinen einnimmt. (Vgl. Franzén 2005: 112)

6. Gödels Vollständigkeitssatz

Eine häufige Quelle der Verwirrung im Zusammenhang mit Gödels Unvollständigkeitssatz ist die Tatsache, dass Gödel in seiner Dissertation auch ein wichtiges Ergebnis bewiesen hat, nämlich den Vollständigkeitssatz für die Logik erster Stufe. Dieser Satz besagt folgendes: Die Logik erster Stufe, auch bekannt als Prädikatenlogik ist vollständig. (Vgl. Franzén 2005: 127)

> „Die Prädikatenlogik erster Stufe besitzt die faszinierende Eigenschaft, dass wir für sie korrekte und zugleich vollständige formale Systeme angeben können, wenn wir diese Begriffe auf die allgemeingültigen Formeln beziehen. […] Dass sich in diesem System tatsächlich alle allgemeingültigen Formeln ableiten lassen, ist der Inhalt des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes, den Gödel in seiner 1929 erschienenen Dissertation bewiesen und 1930 in einer überarbeiteten Form in den Monatsheften für Mathematik veröffentlicht hat." (Hoffmann 2017: 325)

Die Prädikatenlogik soll dem Unvollständigkeitssatz entgehen, weil sie nicht die gewisse Menge an Arithmetik enthält. Erste Stufe bezieht sich dabei auf eine bestimmte Sammlung von Argumentationsregeln, die beim Beweisen von Theoremen verwendet werden, nämlich die Regeln, die den Schlussregeln der normalen Mathematik entsprechen. Die Prädikatenlogik erster Stufe ist ein wichtiger Teil der Logik, seit sie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erstmals als eine Reihe formaler Schlussregeln formuliert wurde, vor allem von dem deutschen Mathematiker, Logiker und Philosophen Gottlob Frege. In Freges Formulierung wurden die Regeln der Logik erster Stufe nicht von den anderen Teilen seines logischen Systems getrennt, und erst in den ersten Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts wurde der besondere Charakter der Logik erster Stufe verstanden. Es gibt verschiedene Formulierungen des logischen Apparats der Logik erster Stufe. Einige Versionen enthalten spezielle logische Axiome, so dass man zwischen den „logischen“ und den „nicht-logischen“ Axiomen eines Systems unterscheiden kann, wobei die logischen Axiome allen Systemen gemeinsam sind. In anderen Versionen gibt es keine logischen Axiome, sondern nur logische Regeln für die Argumentation. Beispielsweise schlug Gödel vor, dass jedes formale System, das eine Sprache verkörpert, die so komplex ist, dass die elementare Zahlentheorie durch sie dargestellt werden kann, entweder unvollständig oder inkonsistent ist. Die meisten formalen Systeme, die wir in der Praxis verwenden, sind sowohl vollständig als auch konsistent wie z. B. die euklidische Geometrie. Solche Bemerkungen beruhen auf einem Missverständnis, das auf eine unglückliche Überladung des Begriffs „vollständig“ in der Logik zurückzuführen ist. Die euklidische Geometrie ist in der Tat eine vollständige Theorie im Sinne des Unvollständigkeitssatzes, d.h. jede Aussage in der Sprache des Systems ist im System entweder beweisbar oder widerlegbar. Dieses Ergebnis wurde, wie auch die Vollständigkeit der reellen Zahlen, mit der sie eng verwandt ist, von Alfred Tarski in den frühen 1930er Jahren bewiesen. Die Prädikatenlogik erster Stufe ist jedoch nicht vollständig in diesem Sinne. Das die Prädikatenlogik erster Stufe vollständig ist, bedeutet, dass ein Satz, der in jeder der Axiome wahr ist, auch tatsächlich aus den Axiomen ableitbar ist. Da umgekehrt jeder Satz, der sich aus einem Satz von Axiomen mit Hilfe der Regeln des Schlussfolgerns ableiten lässt, eine logische Konsequenz dieser Axiome ist, folgt daraus, dass die Theoreme eines Systems erster Stufe genau die Sätze sind, die logische Konsequenzen der Axiome des Systems sind. (Vgl. Franzén 2005: 127ff.)

7. Fazit

Mit der vorliegenden Arbeit wurde das Ziel verfolgt die Gödelschen Unvollständgkeitsätze zu untersuchen, hinsichtlich ihrer Bedeutung innerhalb sowie außerhalb der Mathematik. Für diesen Zweck haben wir zunächst einige Voraussetzungen definieren müssen, um auch Beweisideen für die Sätze beschreiben zu können. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Gödels Arbeit eine außergewöhnliche Erkenntnis des letzten Jahrhunderts war, welche, wie wir gesehen haben, nicht nur die Mathematik stark beeinflusst, sondern auch zu einigen Fehldeutungen in anderen Wissensbereichen geführt hat. In der Untersuchung mancher dieser Missverständnisse wurde festgestellt, dass vor allem ein Missachten der notwendigen Voraussetzungen, die aus Gödels Definition und Beweisen hervorgehen als auch eine falsche Verwendung der logischen Sprache Grund für derartige Trugschlüsse waren.

An dieser Stelle lässt sich sagen, dass durch die Gödelschen Sätze keine Krise der Mathematik ausgelöst wurde, obwohl die Verunsicherung unter den Mathematikern, die Hilbert nahestanden, in den 1930er Jahren offenbar groß war. Auf lange Sicht ist jedoch eher vom Gegenteil die Rede.

> „Mit den beiden Unvollständigkeitssätzen halten wir zwei der faszinierendsten Theoreme in Händen, die in der Mathematik jemals bewiesen wurden. Sie zeigen uns Grenzen auf, die sich nicht überwinden lassen, und stehen damit auf der gleichen Stufe wie die Einstein'sche Relativitätstheorie oder die Heisenberg'sche Unschärferelation in der Physik. Es liegt im Naturell der meisten Mathematiker, nach Vollständigkeit zu streben, und so empfinden viele von ihnen die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze wie einen Dorn im Fleisch, der sich jedem Versuch entzieht, ihn zu entfernen. Allzu negativ sollten wir die Unvollständigkeitssätze dennoch nicht bewerten. Unzweifelhaft hat Gödel gezeigt, dass Mathematik nicht alles kann – doch vielleicht ist gerade dies auch gut so.“ (Hoffmann, 2017: 347f.)

Gödels Schlussfolgerungen zeigen, dass die Aussicht, für jedes deduktive System einen absoluten Konsistenzbeweis zu finden, der die Anforderungen von Hilberts Vorschlag erfüllt, zwar nicht logisch unmöglich, aber höchst unwahrscheinlich ist. Sie zeigen auch, dass es eine Anzahl wahrer arithmetischer Aussagen gibt, die nicht formal aus einem gegebenen Satz von Axiomen durch einen geschlossenen Satz von Regeln abgeleitet werden können. Daraus folgt, dass eine axiomatische Herangehensweise an die Zahlentheorie z.B. den Bereich der arithmetischen Wahrheit nicht erschöpfen kann. (Vgl. Nagel/Newman 1958: 76f.)

Nichtsdestotrotz trug Gödel selbst durch weitere Ergebnisse zur breiteren Aufklärung in Sachen Grundlagen der Mathematik bei. Seine Ergebnisse hatten zur Folge, dass Grundlagen der Logik und der Mathematik durch weitere Persönlichkeiten, wie z.B. Alfred Tarski und vielen weiteren Mathematikern erweitert wurden. Die Arbeit Gödels hatte also nicht den Zusammenbruch des

Hilbertschen Unternehmens zur Folge, sondern nur die Beschleunigung einer bereits begonnenen Umorientierung hin zur offenen Einbeziehung transfiniter metamathematischer Methoden und damit sogar positive Auswirkungen auf das Hilbertsche Programm der Beweistheorie. (Vgl. Scholz 2006: 34f.)

Während frühe ernsthafte Oppositionen gegen Gödels Schlussfolgerungen zumindest unter denen, die sich aktiv mit der mathematischen Logik und den Grundlagen der Mathematik befassten, verschwand, blieb in philosophischeren Kreisen jedoch ein gewisser Diskurs bestehen. Demnach haben wir gesehen, wie breitgefächert die wohlwollenden Interpretationen und Debatten über Gödels Ergebnisse sind, so dass auch heute noch dieser Diskurs sehr lebhaft bestehen bleibt. Appelle und Analogien auf der Grundlage der Unvollständigkeitssätze zur Unterstützung von Argumenten, die über Mathematik und Logik hinausgehen, sind jedoch, wie wir in zahlreichen Beispielen feststellen konnten mit Vorsicht zu genießen, da die Sprache der Logik eng an ihre Strukturen, Voraussetzungen und Folgerungen gebunden ist und daher nicht zu leichtsinnig gebraucht werden sollte.

Wenn wir uns schließlich der Mathematikdidaktik widmen, dann können wir schließen, dass eine ständige Einbeziehung von Begründungen, Argumentationen und Beweisen in den Mathematikunterricht entscheidend für die Vermittlung eines authentischen Bildes von Mathematik in der Schule ist. Ein Mathematikunterricht sollte vor allem verstehensorientiert sein. So waren mentale Krisen und Hinterfragungen der bis dahin bekannten Grundlagen der Wissenschaft meist Auslöser verstärkten Nachdenkens, Diskutierens über Grundlagenfragen und folglich der Entdeckung neuer Errungenschaften. Dabei stellen Gödels Leistungen ein historisches Beispiel einer solchen kritischen Hinterfragung dar. Gödels Werk induziert dort Fragen, wo es nach vielen Mathematikern seiner Zeit gar keine gäbe. Die Erzeugung eines kognitiven Konflikts kann Neugierde auslösen und somit auch ein bemerkenswertes Mittel im Mathematikunterricht werden. Das in Frage stehende mathematische Phänomen weckt die Neugierde von Schüler*innen und lässt sie hinterfragen, ob eine Aussage allgemein gültig ist, warum sie gültig sein muss und wie sie mit anderen mathematischen Aussagen zusammenhängt. Die Aufgabe, eine Lösung zu einem gegebenen Problem zu finden, und die Erkenntnis über die Unmöglichkeit, diese Aufgabe erfolgreich zu lösen, stehen im Widerspruch zueinander und führen dadurch zur kognitiven Auseinandersetzung. Dadurch kann das Bedürfnis entstehen, diese Unmöglichkeit zu begründen und einen Einblick in das mathematische Beweisen eröffnen. Gleichermaßen wird die Entwicklungsgeschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts erlebbar durch eine Gegenüberstellung zwischen Gödels

Unternehmungen und Hilberts Anstrengungen die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome zu beweisen. Ebenso unterstützt die Entwicklung von Begründungen und Argumentationen dabei Fehlvorstellungen zu entdecken und zu revidieren. Der explorative Zugang bietet daher eine Möglichkeit den eigenen Wissens- und Forscherdrang zu stillen, der wohl in allen Menschen zu schlummern scheint sowie eine Einbettung in sinnvolle Kontexte und damit ein natürlicheres Bild der Mathematik.

Literaturverzeichnis

Franzén, Torkel (2005): Gödel's theorem: an incomplete guide to its use and abuse, Massachusetts, Vereinigte Staaten von Amerika: A K Peters, Ltd.

Sokal, Alan / Bricmont, Jean (1999): Eleganter Unsinn: Wie die Denker der Postmoderne die Wissenschaften missbrauchen, München, Deutschland: Beck

Kahle, Reinhard (2006): Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, in: Mathematische Semesterberichte, Nr. 54, S. 1-12, [online] DOI 10.1007/s00591-006-0012-9

True arithmetic (2021): *Wikipedia*, [online] https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=True_arithmetic&oldid=1053523125 [14.08.2023]

Nagel, Ernest / Newman, James R. (1958): Gödel's Proof, Abingdon, Vereinigtes Königreich: Routledge

Kabanets, Valentine (2016). Computability & Complexity: Gödel's Second Incompleteness Theorem, and Tarski's Theorem, Burnaby, Kanada: Simon Fraser University

Hoffmann, Dirk W. (2017): Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze: Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis, 2. Aufl., Karlsruhe, Deutschland: Springer

Jaki, Stanley L. (1966): The Relevance of Physics, Chicago, Vereinigte Staaten von Amerika: The University of Chicago Press

Scholz, Erhard (2006): Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze und das Hilbertsche Programm einer „finiten“ Beweistheorie, in: Wolfgang Achtner (Hrsg.), *Künstliche Intelligenz und menschliche Person,* Marburg: Evangelische Verlagsanstalt, S. 15-38.