Klassenlogik

Milon Renatus Brunner

June 6, 2018

Syntax der Klassenlogik

Es sei $\mathcal{V} := \{v_i\,;\ i \in \mathbb{N}\}$ die **Variablenmenge** der Klassenlogik.

Die Menge der **klassenlogischen Ausdrücke** L_{CL} ist gegeben durch folgende Regeln:

1. Alle Variablen aus $\mathcal{V}$ sind Ausdrücke.
2. Sind α und β Ausdrücke, so sind auch $(\alpha = \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \in \beta)$ Ausdrücke.
3. Ist u eine Variable und α ein Ausdruck, so sind auch $\forall u \alpha$, $\iota u \alpha$ und $\{u; \alpha\}$ Ausdrücke.

Einige logische Abkürzungen

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$[a, b]$Gleich	—	$(a = b)$
$[a, b]$Und	—	$(a \wedge b)$
$[a, b]$Element	—	$(a \in b)$
$[v; a]$Alle	—	$\forall va$
Dasjenige$[v; a]$	—	ιva
Klasse$[v; a]$	—	$\{v; a\}$
[]Verum	$\forall v(v = v)$	$\top$
[]Falsum	$\forall vv$	$\bot$
$[a]$Nicht	$(a = \top) = \bot$	$\neg a$
$[a, b]$Ungleich	$\neg(a = b)$	$a \neq b$
$[a, b]$KeinElement	$\neg(a \in b)$	$a \notin b$
$[a, b]$Oder	$\neg(\neg a \wedge \neg b)$	$(a \vee b)$
$[a, b]$Impliziert	$\neg(a \wedge \neg b)$	$(a \to b)$
$[a, b]$Äquivalent	$(a \to b) \wedge (b \to a)$	$(a \leftrightarrow b)$
$[v; a]$Existiert	$\neg\forall v\neg a$	$\exists va$
$[v; M, a]$BeschränktAlle	$\forall v(v \in M \to a)$	$\forall v \in M : a$
$[v; M, a]$BeschränktExistiert	$\exists v(v \in M \wedge a)$	$\exists v \in M : a$
$[v; a]$ExistiertGenau1	$\exists z\forall v(a \leftrightarrow v = z)$	$\exists^{=1} va$
Unsinn[]	$\iota v\bot$	$\$$

Cantors Theorem - notwendige klassenlogische Definitionen

Definiendum	Definiens	Schreibweise
Domäne[]	$\{v; \top\}$	$\mathbb{D}$
LeereKlasse[]	$\{v; \bot\}$	$\varnothing$
$[A]$Klasse	$A = \{v; v \in A\}$	
$[M]$Menge	$[M]$Klasse $\wedge\ M \in \mathbb{D}$	
$[A, B]$Teilklasse	$([A]$Klasse $\wedge$ $[B]$Klasse$) \wedge \forall v \in A : v \in B$	$A \subseteq B$
Potenzklasse$[M]$	$\{v; v \subseteq M\}$	$\mathcal{P}(M)$
Paarmenge$[a, b]$	$\{v; v = a \vee v = b\}$	$\{a, b\}$
Paar$[a, b]$	$\{\{a, a\}, \{a, b\}\}$	$\langle a, b\rangle$
Kreuzprodukt$[A, B]$	$\{v; \exists a \in A : \exists b \in B : v = \langle a, b\rangle\}$	$A \times B$
$[f, A, B]$Abbildung	$f \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A : \exists^{=1} b(\langle a, b\rangle \in f)$	$f : A \to B$
Anwendung$[f, a]$	$\iota b(\langle a, b\rangle \in f)$	$f(a)$
$[f, A, B]$Surjektion	$f : A \to B \wedge \forall b \in B : \exists a \in A : (\langle a, b\rangle \in f)$	
Teilklasse$[v; A, b]$	$\{v; v \in A \wedge b\}$	$\{v \in A; b\}$
[]Aussonderungsaxiom	$\forall M \forall A([M]$Menge $\wedge\ A \subseteq M \to [B]$Menge$)$	

Ein formaler Beweis

Satz von Cantor:

Ist M eine Menge, so gibt es keine Surjektion von M auf $\mathcal{P}(M)$.

„Eine Menge hat stets kleinere Mächtigkeit als ihre Potenzmenge.“

Klassenlogisch:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma & \text{Aussonderungsaxiom} \\
\Gamma & [M]\text{Menge} \\
\Gamma & f : M \to \mathcal{P}(M) \\
\hline
\Gamma & \neg[f, M, \mathcal{P}(M)]\text{Surjektion}
\end{array}
$$

Cantors Theorem - formaler Beweis

1.	Γ	Aussonderungsaxiom	Prämisse
2.		$[M]$Menge	Prämisse
3.		$[f, M, \mathcal{P}(M)]$Abbildung	Prämisse

lokale Definition: $A := \{m \in M; m \notin f(m)\}$

4.	$A \in \mathcal{P}(M)$	AP auf 1. und 2.
5.	$a \in M$	VOR
6.	$f(a) = A$	VOR
7.	$a \in A$	VOR
8.	$a \notin f(a)$	ABS2 auf 7.
9.	$a \notin A$	SUB1 auf 6. und 8.
10.	$a \notin A$	VOR
11.	$a \notin f(a)$	SUB2 auf 6. und 10.
12.	$a \in A$	PABS1 auf 5. und 11.
13.	$a \in A \leftrightarrow a \notin A$	AEQ auf 9. und 12.
14.	$\bot$	FALS auf 13.
15.	$f(a) \neq A$	WID auf 14.
16.	$\forall a \in M : f(a) \neq A$	PGEN auf 15.
17.	$\neg[f, M, \mathcal{P}(M)]$Surjektion	NSUR auf 3., 4. und 16.

verwendete Regeln

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \leftrightarrow \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \bot \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \bot \\ \hline \Gamma & & \neg\varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \hline \Gamma & \varphi & \varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \alpha = \beta \\ \Gamma & v \notin \alpha \\ \hline \Gamma & v \notin \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \alpha = \beta \\ \Gamma & v \notin \beta \\ \hline \Gamma & v \notin \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & a \in M \\ \Gamma & \varphi^a_v \\ \hline \Gamma & a \in \{v \in M; \varphi\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & a \in \{v \in M; \varphi\} \\ \hline \Gamma & \varphi^a_v \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & [f, A, B]\text{Abbildung} \\ \Gamma & b \in B \\ \Gamma & \forall a \in A : f(a) \neq b \\ \hline \Gamma & \neg[f, A, B]\text{Surjektion} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \text{Aussonderungsaxiom} \\ \Gamma & [M]\text{Menge} \\ \hline \Gamma & \{v \in M; \varphi\} \in \mathcal{P}(M) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma & a \in M & \varphi \\ \hline \Gamma & & \forall a \in M : \varphi \end{array}$$

Ein Beweiskalkül der Klassenlogik

$$\mathit{MON}:\ \frac{\Gamma \quad \alpha}{\Gamma' \quad \alpha}$$

für jede Sequenz $\Gamma' \supseteq \Gamma$

$$\mathit{VOR}:\ \frac{}{\Gamma \quad \alpha \quad \alpha}$$

$$\mathit{KS}:\ \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & & \alpha \\ \Gamma & \alpha & \beta\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \beta\end{array}}$$

$$\mathit{BFU}:\ \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \alpha & \beta \\ \Gamma & \alpha = \bot & \beta\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \beta\end{array}}$$

falls α boolesch

$$\mathit{FRE}:\ \frac{\Gamma \quad \alpha}{\Gamma \quad \alpha = \top}$$

$$\mathit{KON1}:\ \frac{\Gamma \quad \alpha \wedge \beta}{\Gamma \quad \alpha}$$

$$\mathit{KON2}:\ \frac{\Gamma \quad \alpha \wedge \beta}{\Gamma \quad \beta}$$

$$\mathit{KON3}:\ \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \alpha \\ \Gamma & \beta\end{array}}{\Gamma \quad \alpha \wedge \beta}$$

$$\mathit{REF}:\ \frac{}{\Gamma \quad \alpha = \alpha}$$

$$\mathit{SUB}:\ \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \alpha^{\gamma}_{v} \\ \Gamma & \gamma' = \gamma\end{array}}{\Gamma \quad \alpha^{\gamma'}_{v}}$$

$$\mathit{GEN}:\ \frac{\Gamma \quad \alpha^{u}_{v}}{\Gamma \quad \forall v \alpha}$$

falls $u \notin \text{frei}\,(\Gamma, \forall v \alpha)$

$$\mathit{PART}:\ \frac{\Gamma \quad \forall v \alpha}{\Gamma \quad \alpha^{\gamma}_{v}}$$

$$\mathit{KZG1}:\ \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & & \alpha^{\gamma}_{v} \\ \Gamma & \alpha^{u}_{v} & u = \gamma\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \iota v \alpha = \gamma\end{array}}$$

falls $u \notin \text{frei}\,(\Gamma, \iota v \alpha, \gamma)$

$$\mathit{KZG2}:\ \frac{\Gamma \quad \forall v \neg \alpha}{\Gamma \quad \iota v \alpha = \$}$$

$$\mathit{KZG3}:\ \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \alpha^{\gamma}_{v} \\ \Gamma & \alpha^{\gamma'}_{v} \\ \Gamma & \neg(\gamma = \gamma')\end{array}}{\Gamma \quad \iota v \alpha = \$}$$

$$\mathit{KLS1}:\ \frac{\Gamma \quad \gamma' \in \gamma}{\Gamma \quad \gamma = \{v; v \in \gamma\}}$$

falls $v \notin \text{frei}\{\gamma\}$

$$\mathit{KLS2}:\ \frac{\Gamma \quad \gamma' \in \gamma}{\Gamma \quad \gamma' \in \mathbb{D}}$$

$$\mathit{KLS3}:\ \frac{}{\Gamma \quad \neg\{v; \alpha\} = \$}$$

$$\mathit{ABS1}:\ \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \gamma \in \mathbb{D} \\ \Gamma & \alpha^{\gamma}_{v}\end{array}}{\Gamma \quad \gamma \in \{v; \alpha\}}$$

$$\mathit{ABS2}:\ \frac{\Gamma \quad \gamma \in \{v; \alpha\}}{\Gamma \quad \alpha^{\gamma}_{v}}$$

$$\mathit{NONS}:\ \frac{}{\Gamma \quad \neg(\$ \in \mathbb{D})}$$

$$\mathit{EXT}:\ \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & v \in \{u; \alpha\} & v \in \{w; \beta\} \\ \Gamma & v \in \{w; \beta\} & v \in \{u; \alpha\}\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \{u; \alpha\} = \{w; \beta\}\end{array}}$$

falls $v \notin \text{frei}\,(\Gamma, \{u; \alpha\}, \{w; \beta\})$