Der Projektive Raum

Die Grundbegriffe sind drei einstellige Relationen **Punkt**, **Gerade**, **Ebene**, eine zweistellige Relation der **Inzidenz** und eine vierstellige Relation des **Trennens**. Sprachlich wird die Inzidenz von zwei Elementen a und b ausgedrückt durch a *liegt in* b oder auch (im Hinblick auf Axiom P2) a und b *liegen ineinander*. Liegt ein ELement in mehreren anderen, so sagen wir dafür auch, dass letztere das erste *gemein haben*. Stehen Elemente a, b, c, d in der Relation des Trennens, so drücken wir dies aus durch: a ist von b durch c und d *getrennt*, oder auch (im Hinblick auf Axiom PO2): $a\,b, c\,d$ *trennen sich*.

Axiome der Inzidenz:

- P1 Liegt ein Element in einem zweiten, so liegt auch das zweite im ersten.
- P2 Haben ein Punkt und eine Ebene eine Gerade gemein, so liegen sie ineinander.
- P3 Zwei distinkte Punkte haben genau eine Gerade gemein.
- P4 Zwei distinkte Ebenen haben genau eine Gerade gemein.
- P5 Eine Gerade und ein nicht in ihr liegender Punkt haben genau eine Ebene gemein.
- P6 Eine Gerade und eine nicht in ihr liegende Ebene haben genau einen Punkt gemein.
- P7 In jeder Geraden liegen mindestens vier Punkte und mindestens vier Ebenen.
- P8 Es gibt zwei Geraden, welche keinen Punkt und keine Ebene gemein haben.

Axiome der Verbindung zwischen Inzidenz und Ordnung:

- PV1 Sind a, b, c, d distinkte[1] Geraden, welche einen Punkt und eine Ebene gemein haben, so trennen sich $a\,b, c\,d$ oder $a\,c, b\,d$ oder $a\,d, b\,c$.
- PV2 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Geraden, so haben sie einen Punkt und eine Ebene gemein.
- PV3 Seien a_1, a_2, a_3, a_4 Geraden, welche eine Ebene α und einen Punkt A gemein haben und seien b_1, b_2, b_3, b_4 distinkte Geraden, welche eine von α verschiedene Ebene β sowie einen von A verschiedenen Punkt B gemein haben und sodass $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$, $a_3\,b_3$, $a_4\,b_4$ jeweils einen Punkt und eine Ebene gemein haben. Falls dann $a_1\,a_2, a_3\,a_4$ sich trennen, so trennen sich auch $b_1\,b_2$, $b_3\,b_4$.

Axiome der Ordnung:

- PO1 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Geraden, so sind a, b, c, d distinkt.
- PO2 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Geraden, so trennen sich auch $a\,c, d\,b$ sowie $b\,d, a\,c$.
- PO3 Sind $a\,c, b\,d$ sowie $a\,d, b\,e$ sich trennende Geraden, so trennen sich auch $a\,d, c\,e$.
- PO4 Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Mengen von Geraden und u, v Geraden derart, dass $u\,a, v\,b$ sich trennen für alle Geraden $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$, so gibt es eine Gerade s, sodass $u\,s, a\,b$ sich trennen für alle von s verschiedenen Geraden $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$.

[1] „distinkt" bedeute stets *paarweise voneinander verschieden*

Der Strahlenraum

Die Grundbegriffe sind eine zweistellige Relation des **Treffens** und eine vierstellige Relation des **Trennens.** Die Elemente, auf die sich diese beziehen, nennen wir **Strahlen**.

Axiome des Treffens:

S1 Jeder Strahl trifft sich selbst.

S2 Trifft ein Strahl a einen Strahl b, so trifft auch der Strahl b den Strahl a.

S3 Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch p oder q.

S4 Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner c ein Strahl, welcher a, b, p und q trifft, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch c.

S5 Sind a, b sich treffende Strahlen, so gibt es zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen.

S6 Sind a, b sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner s ein beliebiger weiterer Strahl, so gibt es einen Strahl, welcher jeden der Strahlen a, b, p, q und s trifft.

S7 Sind a, b, c beliebige Strahlen, so gibt es einen Strahl, welcher keinen der Strahlen a, b, c trifft.

Axiome der Verbindung zwischen Treffen und Ordnung:

SV1 Sind a, b, c, d paarweise sich treffende distinkte Strahlen und gibt es einander nicht treffende Strahlen p, q, welche a, b, c, d treffen, so trennen sich $a\,b, c\,d$ oder $a\,c, b\,d$ oder $a\,d, b\,c$.

SV2 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Strahlen, so treffen sie sich paarweise und es gibt einander nicht treffende Strahlen p, q, welche a, b, c, d treffen.

SV3 Sind $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ Strahlen derart, dass $a_i\,b_j$ sich für $i = j$ treffen, für $i \neq j$ nicht $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, es einander nicht treffende Strahlen p, q gibt, welche b_1, b_2, b_3, b_4 treffen, b_1, b_2, b_3, b_4 sich paarweise treffen, und $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ sich trennen, so trennen sich auch $b_1 b_2$, $b_3 b_4$.

Axiome der Ordnung:

SO1 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Strahlen, so sind a, b, c, d distinkt.

SO2 Sind $a\,c, b\,d$ sich trennende Strahlen, so trennen sich auch $a\,c, d\,b$ sowie $b\,d, a\,c$.

SO3 Sind $a\,c, b\,d$ sowie $a\,d, b\,e$ sich trennende Strahlen, so trennen sich auch $a\,d, c\,e$.

SO4 Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Mengen von Strahlen und u, v Strahlen derart, dass $u\,a, v\,b$ sich trennen für alle Strahlen $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$, so gibt es einen Strahl s, sodass $u\,s, a\,b$ sich trennen für alle von s verschiedenen Strahlen $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$.