



Masterarbeit im Lehramtsstudium Sekundarstufe (Allgemeinbildung)  
Unterrichtsfächer Mathematik und Biologie und Umweltkunde

eingereicht bei

**Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer**

an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

Institut für Mathematik

# Der Eulersche Polyedersatz

Iacun Maria Prugger

Matrikelnr. 01516390

Wintersemester 2020/21

Leopold-Franzens-Universität Innsbruck



*„Euler rechnete anscheinend so mühelos,  
wie andere Menschen atmen oder  
wie der Adler in der Luft schwebt.“*

François Arago (französischer Physiker, 1786-1853).

# Vorwort und Dank

Einmal in der Oberschule habe ich sehr lange gebraucht, um eine einfache mathematische Aufgabe zu lösen. Nach langem Hin und Her gelang es mir schließlich. Ich erkannte, dass die Übung sehr leicht war. Darauf sagte die Lehrerin zu mir: „Es war eine schwere Geburt, aber jetzt ist es draußen das Kind.“ Ich erinnere mich genau noch daran. Irgendwie kann ich das auch auf meine Studienjahre übertragen. In Trient mit Mathematik angefangen, Studium abgebrochen, gearbeitet, in Innsbruck weiterstudiert, aber auf Lehramt, immer noch gearbeitet, durch Höhen und Tiefen gegangen . . . und irgendwie bin ich nun zu diesem Zeitpunkt gekommen, wo „das Kind draußen ist“ und wo ich diese Arbeit in der Hand halten kann. Es war eine sehr schöne Zeit, mit eigentlich viel mehr Höhen als Tiefen.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer bedanken. Er ermöglichte mir das Schreiben dieser Arbeit und begleitete mich in allen Angelegenheiten. Er schlug mir das Thema vor, zeigte mir Aigner und Zieglers Buch, von dem in dieser Arbeit öfters die Rede sein wird, und ich fühlte mich somit gleich zum Thema hingezogen und fing mit dem Recherchieren an. Mich faszinierten Euler als Supergenie und sein Polyedersatz, denn durch diesen sind etliche Gebiete der Mathematik erreichbar und untereinander verbindbar.

Ein großer Dank geht an meine Eltern für die unermüdliche Unterstützung, die Akzeptanz von meinem Tun und Entscheiden und für die Ermöglichung des Studiums.

Danke Silvia für deine Geduld und weil du immer für mich da warst und bist.

Danke Simon für die schönen Zeichnungen der Polyeder.

Danke Marco für das Korrekturlesen.

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                      | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Geschichte</b>                                      | <b>8</b>  |
| 2.1      | Eulers Leben und Werke . . . . .                       | 8         |
| 2.1.1    | Basel 1907-1927 . . . . .                              | 8         |
| 2.1.2    | St. Petersburg 1927-1941 . . . . .                     | 9         |
| 2.1.3    | Berlin 1941-1966 . . . . .                             | 10        |
| 2.1.4    | St. Petersburg 1966-1983 . . . . .                     | 12        |
| 2.1.5    | Euler als Mensch . . . . .                             | 13        |
| 2.1.6    | Werke und Leistungen . . . . .                         | 13        |
| 2.2      | Eulers mathematische Erkenntnisse . . . . .            | 16        |
| 2.3      | Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach . . . . .     | 21        |
| 2.3.1    | Wer war Goldbach? . . . . .                            | 21        |
| 2.3.2    | Der Briefwechsel . . . . .                             | 21        |
| 2.4      | Zur Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes . . . . . | 23        |
| 2.4.1    | Persönlichkeiten . . . . .                             | 25        |
| <b>3</b> | <b>Der Eulersche Polyedersatz</b>                      | <b>27</b> |
| 3.1      | Voraussetzungen . . . . .                              | 27        |
| 3.2      | Satz . . . . .   | 28        |
| <b>4</b> | <b>Charakterisierung der Platonischen Körper</b>       | <b>34</b> |
| <b>5</b> | <b>Satz von Galai</b>                                  | <b>39</b> |
| 5.1      | Vorüberlegungen . . . . .                              | 39        |
| 5.2      | Der Satz von Galai . . . . .                           | 41        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>6 Satz von Pick</b>   | <b>44</b> |
| 6.1 Wer war Pick? . . . . .  | 44        |
| 6.2 Der Satz von Pick . . . . .                                    | 44        |
| <b>7 Die Euler-Charakteristik</b>                                  | <b>52</b> |
| 7.1 Der „erweiterte“ Eulersche Polyedersatz . . . . .              | 52        |
| 7.2 Der „erweiterte“ Satz von Pick . . . . .                       | 55        |
| <b>8 Der Eulersche Polyedersatz im Schulunterricht</b>             | <b>56</b> |
| 8.1 Lehrplanbezug . . . . .  | 56        |
| 8.2 Beweisen vs. Entdecken . . . . .                               | 59        |
| 8.2.1 Einführung des Eulerschen Polyedersatzes in der Schule . . . | 62        |
| 8.3 Wann gilt der Satz? . . . . .                                  | 67        |
| 8.4 Fußbälle . . . . .   | 68        |
| 8.5 Emil kann fischen . . . . .                                    | 71        |
| 8.6 Die fünf platonischen Körper . . . . .                         | 72        |
| 8.6.1 Es gibt fünf platonische Körper . . . . .                    | 73        |
| 8.6.2 Dualität . . . . .   | 74        |
| 8.6.3 Archimedische Körper . . . . .                               | 77        |
| 8.6.4 Oberfläche und Volumen . . . . .                             | 77        |
| 8.6.5 Andere Eigenschaften . . . . .                               | 83        |
| <b>9 Der Satz von Pick im Schulunterricht</b>                      | <b>84</b> |
| <b>10 Zusammenfassung</b>  | <b>86</b> |
| <b>11 Literatur</b>  | <b>88</b> |

# 1 Einleitung

Die hier vorliegende Masterarbeit ist in drei große Teile gegliedert. Der erste Abschnitt ist dem geschichtlichen Hintergrund gewidmet. Das Leben Eulers wird geschildert und seine wichtigsten Entdeckungen in der Mathematik kurz beschrieben. Euler war einer der größten Mathematiker der Geschichte, der bekannte Laplace meinte sogar: „Lest Euler, er ist unser aller Meister“. Nur sehr wenigen Persönlichkeiten sind so viele mathematische Objekte und Gesetze gewidmet wie Euler. Jede und jeder, der sich einmal mit Mathematik befasst, kennt ihn. Darauf wird auf die Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes eingegangen, der wahrscheinlich in den Briefen von Euler an Goldbach zum ersten Mal auftaucht.

Der zweite, zentrale Teil dieser Arbeit legt den Eulerschen Polyedersatz dar, eine „Perle der Elementargeometrie“ (Berendonk 2014) und einer der *schönsten* Sätze der Mathematik überhaupt. Mehrere Beweisführungen werden vorgestellt und mithilfe dieses Satzes werden die platonischen Körper charakterisiert und beschrieben. Es folgen der Satz von Galai und der Satz von Pick, zwei Folgerungen des Eulerschen Polyedersatzes, wobei der letztere zu ihm sogar äquivalent ist. Die Euler-Charakteristik wird kurz vorgestellt.

Im letzten Abschnitt geht es darum, den Eulerschen Polyedersatz im Schulunterricht ansprechbar und interessant zu machen. Mögliche Zugänge und Anwendungen werden beschrieben, die sowohl in unteren als auch in höheren Schulstufen besprochen werden können. Die Schülerinnen und Schüler entdecken den Satz und verinnerlichen ihn. In diesem Zusammenhang können die platonischen Körper passend dazu behandelt und zusätzlich der Satz von Pick dargelegt werden. Picks Satz wird üblicherweise im Schulunterricht nicht genannt, wäre aber in mehreren Schulstufen eine interessante Abwechslung für die Lernenden. Sie können neugierig gemacht werden, ganz im Sinne von *wie Flächeninhalte leicht berechnet werden können*.

## 2 Geschichte

Es ist sehr besonders, dass der Eulersche Polyedersatz trotz der vielfältigen mathematischen und hauptsächlich geometrischen Hingabe der alten Griechen und anderen Kulturen erst mehr als 2000 Jahre später entdeckt und bewiesen wurde.

### 2.1 Eulers Leben und Werke

In diesem ersten Abschnitt dieser Arbeit geht es darum, einen kurzen Überblick über das Leben und das Schaffen Eulers darzulegen. Es werden die wichtigsten Werke vorgestellt und die außerordentlichen Leistungen Eulers besprochen, um dann zur Geschichte des Polyedersatzes und zum Satz selbst überzuleiten. Die Informationen in diesem Kapitel stammen aus Gautschi (2008), Wussing (2009), Fueter (1979), Bell (1967), Strick (2020) und Brückler (2018).

#### 2.1.1 Basel 1907-1927

Der Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 als erstes von drei Kindern in Basel geboren und gilt als wahrscheinlich wichtigster Mathematiker des 18. Jahrhunderts und als „wohl der produktivste Wissenschaftler, den die Welt hervorgebracht hat“ (Wussing 2009, S. 45). Leonhard Euler war Sohn des protestantischen Pfarrers Paul Euler and Margaretha Brucker. Paul nahm an verschiedenen Mathematikkursen von Jakob Bernoulli in seinen ersten beiden Jahren als Theologiestudent an der Universität teil. Somit brachte der Vater Leonhard seine ersten mathematischen Kenntnisse bei. Wegen der für Paul so niedrigen Qualität des Mathematikunterrichts, begann er für seinen Sohn Leonhard Privatstunden beim jungen Theologen Johannes Burckhardt zu nehmen, der in der Mathematik gute Kenntnisse aufwies. Als Vierzehnjähriger begann Leonhard die Universität

in Basel zu besuchen. Er studierte Philosophie und, laut Bell (1967), auch Hebräisch und nahm an Mathematikkursen von Johann Bernoulli, Jakobs Sohn, teil. Johann Bernoulli galt als einer der größten Mathematiker weltweit und ihm fielen die herausragenden Fähigkeiten und Genialitäten von Leonhard auf. Er gab ihm regelmäßig Aufgaben und forderte ihn auf, sie selbstständig zu lösen und sich alleine weiterzubilden. Er gab ihm dafür passende Bücher. Darüber hinaus trafen sich die beiden jeden Samstag Nachmittag.

Im Jahr 1723, als Euler 16 Jahren alt war, schloss er sein Studium mit einer öffentlichen Rede ab. Er verglich dabei die Naturphilosophie Descartes' mit der von Newton. In den folgenden Jahren versuchte Euler eine Preisfrage in der Pariser Akademie für Wissenschaften zu gewinnen und 1726 Physik-Professor an der Universität Basel zu werden, jedoch scheiterte er beide Male. Das war für ihn eine große Enttäuschung. Wenig später lud ihn der damalige Zar Peter I in die neu gegründete Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg ein. Der Zar wollte an der Akademie ein hohes wissenschaftliches Niveau garantieren und deshalb holte er bekannte Gelehrte nach Russland. Johann Bernoulli blieb Basel treu und folgte nicht seiner Einladung nach Russland. Seine Söhne Daniel und Niklas, Eulers gute Freunde, zogen jedoch nach St. Petersburg. 1727, Newtons Todesjahr, erschien in Basel Eulers Dissertation über den Schall. Er studierte die Physiologie des Ohres und die mathematischen Erklärungen der damit verbundenen Verbreitung des Schalls. Er wählte dieses Thema, weil die Gebrüder Bernoulli von einer Stelle in der medizinischen Abteilung der Akademie in St. Petersburg sprachen. Im April 1727 folgte Euler ihnen und fand jedoch aufgrund des Durcheinanders in der politischen Lage Russlands keine Arbeit als Mediziner. Mit viel Glück gelang ihm aber eine Anstellung in der mathematischen Abteilung. Sekretär der Akademie war zu dieser Zeit Christian Goldbach, mit dem Euler später einen bekannten Briefwechsel führen wird (mehr dazu in Kapitel 2.3).

### **2.1.2 St. Petersburg 1727-1741**

In St. Petersburg konnte sich Leonhard Euler voll und ganz der Mathematik widmen. 1730 wurde er Professor für Physik, 1733 für Mathematik. Er prüfte an-

gehende Akademiker und diente dem russischen Staat in wissenschaftlichen und technologischen Angelegenheiten. Er meisterte, im Vergleich zu anderen, nach sehr kurzer Zeit die russische Sprache. In dieser Zeit wohnte er mit Daniel Bernoulli und Christian Goldbach zusammen. In St. Petersburg gelangen ihm hervorragende mathematische Entdeckungen, Euler wurde berühmt. Die Arbeitsbedingungen waren außerdem besonders einladend, er konnte die Bibliothek und die Druckerei nutzen, hatte ein Arbeits- und ein Sitzungszimmer. 1734 heiratete er Katharina Gsell aus St. Gallen, Tochter eines an der Akademie unterrichtenden Malers. Sie zeugten dreizehn Kinder, wobei nur fünf davon erwachsen wurden. Die restlichen acht starben früher. Der älteste Sohn Johann wurde zum Mathematiker und diente Leonhard später als Assistent. Euler begann in St. Petersburg Lehrbücher zu verfassen: für diese Zeit etwas ganz Neues. Er veröffentlichte zudem zwei Bände über die Bewegungslehre, die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Band 1 und 2, in denen Begriffe definiert werden, die heute noch in der Physik und den Ingenieurwissenschaften verwendet werden. Es war zudem das erste Mal, dass die Infinitesimalrechnung in der Mechanik angewandt wurde: die Geburt der Neuzeit in dieser Hinsicht. In den Jahren zwischen 1735 und 1738 war Leonhard immer wieder krank: 1735 verlor er das rechte Auge, was auch in Handmanns Darstellung von 1753 zu erkennen ist (siehe Abbildung 2.1). Dazu kam die politische Instabilität Russlands, die ihn dazu bewegte, Russland zu verlassen. 1741 wurde er vom preußischen König Friedrich II eingeladen, an der Akademie in Berlin zu arbeiten und die Mathematik-Klasse als Direktor zu leiten. So zog die Familie nach Berlin.

### 2.1.3 Berlin 1741-1766

Euler war nun wohlhabend und konnte der ganzen Familie Haus und Landgut bieten. Seine Frau Katharina zog mit ihm nach Berlin, der älteste Sohn lehrte dort an der Akademie, der zweitälteste Karl studierte Medizin in Halle, der jüngere Christoph wurde Militäroffizier. Die älteste Tochter Charlotte heiratete einen niederländischen Adligen. Das Verhältnis mit Friedrich II war jedoch nie ein gutes. Der König verachtete die Deutschen, und Euler wurde als solcher gesehen. Euler wurde nie zu seinen Audienzen eingeladen und er litt scheinbar unter diesen Um-



Abbildung 2.1: E. Handmann, Porträt des Leonhard Eulers, 1753, Kunstmuseum Basel (Wussing 2009, S.46).

ständen. Außerdem erkannte der König keine Bedeutung in der Mathematik, außer sie behandelt Argumente, die in der militärischen Welt von Nutzen sind. So befasste sich Euler mit diesen Themen und veröffentlichte 1745 die *Neue Grundsätze der Artillerie*, eine Übersetzung von Benjamin Robins' *New principles of gunnery*. Später schrieb Euler das *Erste Lehrbuch der Ballistik*, in einer sehr einfachen Sprache, sodass das Buch auch in Schulen Einsatz fand. Viele andere Werke entstanden in der Berliner Zeit und Euler wurde weltberühmt. Jedoch war über die ganze Zeit der Franzose Maupertius Präsident der Akademie, Euler war sein Stellvertreter. Nach Maupertius' Tod übernahm er seine Funktion, wurde aber nie offiziell Präsident. Der König Friedrich II bevorzugte den Franzosen d'Alembert, der von Paris aus die Akademie leitete, obwohl er als Mathematiker Euler deutlich unterlegen war. Dies war eine Herabwürdigung für Euler. Aufgrund dieser und anderer Uneinigkeiten mit dem König Friedrich II verließ Euler 1766 Berlin. Lagrange wurde sein Nachfolger.

### 2.1.4 St. Petersburg 1966-1983

Euler folgte der Einladung von Kaiserin Katherina II nach St. Petersburg zurückzukehren, wo er herzlichst begrüßt wurde. Die Kaiserin stellte ihm sogar einen ihrer Köche zur Verfügung. Er hatte nun einen angesehenen Posten, der ihm in Berlin verwehrt wurde. Seiner Frau und seinen Söhnen organisierte er sichere Gehälter. Jedoch bereitete ihm auch das gute Auge nun Probleme und er erblindete fast vollständig. Sein Gedächtnis war nach wie vor uneingeschränkt und somit konnte er sich weiterhin der Mathematik widmen. Viele Erklärungen diktierte er seinen Söhnen, hauptsächlich Albert, die diese auf Papier brachten. Zudem brannte sein Haus 1771 komplett ab und er konnte sich nur knapp retten. 1773 starb seine Frau. Er heiratete drei Jahre später wieder, um von seinen Kindern unabhängig zu sein. Er heiratete 1776 die Halbschwester seiner verstorbenen Gattin, Salome Abigael Gsell. Trotz all diesen schlimmen Ereignissen war er mathematisch durchgehend aktiv. Hauptsächlich in dieser zweiten Zeit in St. Petersburg veröffentlichte er seine besten Werke *Vollständige Anleitung zur Algebra* und *Lettres à une princesse allemande sur divers sujets de physique et de philosophie*. Das erste war als Lehrbuch konzipiert - für jede und für jeden. Euler gab das Buch auch einem Schneider zur Kontrolle der Verständlichkeit... der Schneider war wohl außerordentlich begabt... Das zweite Werk ist eine populärwissenschaftliche Schrift, in der er alle fachlichen Fragen aller möglichen Wissenschaften des Jahrhunderts behandelte. Das Werk musste neu aufgelegt werden und wurde in den Jahren darauf ins Russische, Deutsche, Holländische, Schwedische, Italienische, Dänische, Englische und Spanische übersetzt (Fueter 1979). Euler wurde zum berühmtesten Forscher der Welt, war in allen besten wissenschaftlichen Gesellschaften Mitglied und der „Beste“ an der Petersburger Akademie (Fueter 1979). Seine Sekretäre und sein Sohn unterstützten ihn: er war nun krankheitsbedingt komplett auf Hilfe angewiesen.

Leonhard Euler starb am 18. September 1783 an einem Schlaganfall in St. Petersburg. An diesem Tag berechnete er die Umlaufbahn des Planeten Uranus, der kurz zuvor entdeckt wurde. Nach seinem Tod blieb die Familie in St. Petersburg und wurde von allen hochgeehrt. Mathematische Erklärungen zur Ballonfahrt der Brüder Montgolfier in Paris wurden nach dem Tod gefunden und vom ältesten Sohn ein Jahr später veröffentlicht: Eulers letzter Artikel.

### 2.1.5 Euler als Mensch

Euler wird in zahlreichen Quellen als ein humorvoller und unkomplizierter Mensch beschrieben. Er hatte viele Freunde und war stets gesellig. In der Religion war er jedoch streng gläubig, sein christlicher Glaube führte zu gewissen Angriffen gegen *Freygeister*. Seine Entdeckungen und Forschungen zeigte er allen und versteckte sie keinesfalls - er war in dieser Hinsicht sehr offen. Er hatte ein ungemein gutes Gedächtnis, deswegen konnte er auch nach seiner Erblindung weiterhin arbeiten und Mathematik betreiben. Zudem hatte er auch eine enorme Konzentrationsfähigkeit: es hieß, er rechnete mit einem Kind auf dem Arm und einer Katze auf der Schulter (Fellmann 1983).

### 2.1.6 Werke und Leistungen

Im folgenden Abschnitt werden die Hauptwerke Eulers aufgezählt und der Inhalt kurz beschrieben. Die Informationen stammen hauptsächlich aus Wussing (2009) und Fueter (1979). Es wird lediglich eine Auswahl aller seiner veröffentlichten Beiträge angegeben. Insgesamt gab er 866 Abhandlungen und Bücher heraus, in lateinischer, französischer und deutscher Sprache (Strick 2020). Die gesamten Beiträge Eulers lassen sich wie folgt auf die einzelnen Teildisziplinen aufteilen (Wussing 2009):

40% Algebra, Zahlentheorie, Analysis

28% Mechanik, Physik

18% Geometrie, Trigonometrie

11% Astronomie

2% Schiffswesen, Architektur, Artillerie

1% Philosophie, Musiktheorie, Theologie und andere

**1734/1736:** *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 1./2. Band, Bewegungslehre, Infinitesimalrechnung in der Mechanik zum ersten Mal in der Geschichte

**1738/1940:** *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg* *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 1./2. Band; einfach formuliertes Lehrbuch: Einführung

in die elementare Arithmetik

**1739:** *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucidate expositae*, Musiktheorie

**1741:** *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, enthält Königsberger Brückenproblem

**1744:** *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*[...], enthält die Knickformel

**1744:** *Theoria motuum planetarum et cometarum*.[...], Lehrbuch zur Astronomie, Berechnung der Planeten- und Kometenbahnen

**1745:** *Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers*[...], Übersetzung aus dem Englischen *New principles of gunnery* von Benjamin Robins, Festungsbau und Ballistik, Einfluss des Luftwiderstands auf die Flugbahn eines Geschosses

**1746:** *Nova theoria lucis & colorum*, Physikalische Abhandlungen

**1747:** *Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister*, gegen die rationalistischen Versuche zur Erklärung der Wunder

**1748:** *Introductio in analysin infinitorum, tomus primus et secundus*, 1. Band: Höhere Analysis, 2. Band: Theorie und Klassifikation der Kurven, Theorie der Oberflächen, enthält die Formel  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

**1748:** *Scientia navalis*[...], Schiffstheorie

**1753:** *Theoria motus lunae*[...], Mondtheorie

**1753:** *Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau*, Moderne Lehre der Turbinen

**1755:** *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Differentialrechnung, "Fundgrube für schöne Beispiele" (Feuter 1979), enthält die Summenformel

**1758:** *Elementa doctrinae solidorum*, Topologie, enthält den Polyedersatz

**1761:** *Theoria motuum planetarum et cometarum*.[...], Lehrbuch zur Astronomie, Berechnung der Planeten- und Kometenbahnen

**1762:** *Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro quae neque confusionem a figura sphaerica oriundum*[...], erste Theorie der achromatischen Linse

**1768:** *Theoria motus corporum*, Mechanik

**1768:** *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, philosophische Briefe

**1768-1770:** *Institutionum calculi integralis*[...], 3 Bände, Integralrechnung, Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, Beta- und Gamma-Funktionen, Variationsrechnung

**1769:** *Dioptricae pars prima/secunda/tertia*[...], Höhepunkt aller Untersuchungen über die Optik

**1770:** *Vollständige Anleitung zur Algebra*[...], algebraische Grundsätze, unbestimmte Analysis (siehe Abbildung 2.2)

**1770:** *Theoria motuum lunae*[...], Mondtheorie

**1770:** *Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, Schiffstheorie

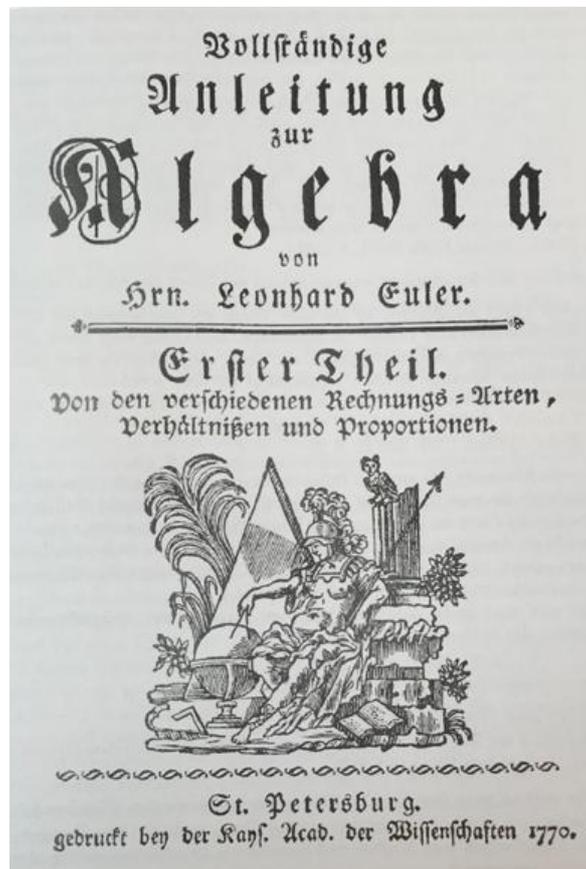


Abbildung 2.2: Titelblatt des Werkes *Vollständige Anleitung zur Algebra* aus dem Jahr 1770 (Wussing 2009, S.63). Für weitere Buchdeckel von Eulers Werken siehe Gautschi (2008).

## 2.2 Eulers mathematische Erkenntnisse

Leonhard Euler hat in seinem Leben eine außerordentliche Zahl von Erkenntnissen in den verschiedensten Wissenschaftsbereichen geliefert. Hier wird eine Zusammenfassung Eulers wichtigsten Erkenntnisse aus der Mathematik angeführt:

### Logarithmus und die Eulersche Zahl

Euler entwickelte die logarithmische Funktion und führte ein, dass der Logarithmus einer beliebigen Basis von 1 immer 0 ist.

Die Eulersche Zahl  $e$ , die Basis des natürlichen Logarithmus, wurde nach ihm benannt. Er entwickelte die unendliche Reihe, die dieser Konstante entspricht und die Grenzwertdarstellung der Konstanten  $e$ :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = 2,7182818224590452\dots$$

### Trigonometrie

Euler sah die damals als *trigonometrische Verhältnisse* bekannten Sinus, Cosinus, Tangens als Funktionen und bewies ihre Additionssätze.

Er entdeckte die Formel  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , von der für  $x = \pi$  die berühmte Formel 2.1 folgt, die öfters als die „schönste Formel“ bezeichnet wird, da sie die wichtigsten Größen der Mathematik beinhaltet: die Zahl Pi, die Eulersche Zahl, die Zahl Eins, die Zahl Null und die imaginäre Einheit  $i$ :

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{2.1}$$

### Das Basler Problem

Die Summe der reziproken Quadratzahlen war lange vor Euler ein zu lösendes mathematisches Problem. Es handelt sich um die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ . 1740 fand Euler ein elegantes Vorgehen zur Ermittlung solcher Summen und entdeckte, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### Primzahlen und Riemannsches Zeta-Funktion

Im Jahre 1737 entdeckte Euler die berühmte Formel, die einen Zusammenhang

zwischen Primzahlen und der Riemannschen Zeta-Funktion  $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  herstellt. Sei  $s > 1$  und  $P$  die Menge aller Primzahlen, die größer als 1 sind, also  $P = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ , so gilt

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \zeta(s).$$

Den Beweis führte Euler durch geschicktes Umformen der Riemannschen Zeta-Funktion  $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ . Diese Gleichung symbolisiert den Anfang der analytischen Zahlentheorie.

### Die Gamma-Funktion

Euler werden die ersten Ansätze für die Beschreibung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

zugeschrieben. 1729 tauchten erste Ansätze dieser Funktion in einem Brief an Goldbach auf.

### Die Eulersche Knicklast (Cachot et al. 2010)

1744 erschien Eulers Knickformel in seinem Werk über die Variationsrechnung. Es handelt sich um die Lösung eines klassischen Problems, bei dem die Knicklast zylindrischer Stäbe unter Last gesucht wird. Diese Formel wird wohl heute noch bei jedem Brückenbau verwendet (Fueter 1979). Euler stellte fest, dass eine Verbiegung nur dann möglich war, wenn die Drucklast  $F$  eine gewisse Grenze überschreitet, und zwar wenn

$$F > \frac{\pi^2}{l^2} Ek^2$$

für die Stablänge  $l$  und die Konstante  $Ek^2$  gilt.

### Satz von Euler-Fermat

Dieser Satz wurde 1763 veröffentlicht. Seien  $a \in \mathbb{N}$  und  $n \in \mathbb{N}$  teilerfremd, d.h.  $\text{ggT}(a, n) = 1$ , also der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $n$  ist 1. Sei die Funktion



Abbildung 2.3: Die Knickformel Eulers auf dem Poststempel der DDR vom Jahre 1983 (Lehmann 2007, S. 275).

$\varphi$  gegeben, die jeder Zahl  $s \in \mathbb{N}$  die Anzahl der natürlichen Zahlen zuordnet, die zu  $s$  teilerfremd sind, also für die der größte gemeinsame Nenner von  $s$  und  $n$  eins ist.

Dann gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

### Imaginäre Einheit

Das Symbol  $i$  für die Quadratwurzel von  $-1$  wird erstmals von Euler verwendet. Veröffentlicht wird diese Schreibweise aber erst 1794.

### Andere Leistungen Eulers in Kurzform

In den zwei Bänden des Werkes *Mechanica* von 1736 werden zum ersten Mal die Regeln der Mathematik auf systematische Weise auf die Physik angewendet.

1732 widerlegte Euler die Behauptung Fermats, dass jede Zahl  $2^{2^n} + 1$  für  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  eine Primzahl sei. Euler zeigte, dass die Zahl  $2^{2^5} + 1 = 4294967297$  durch 641 teilbar ist.

Euler führte die heute weit verbreitete Bezeichnung von Eckpunkten und Seitenlängen eines Dreiecks ein. Er verwendete die Großbuchstaben  $A, B, C$  für die Eckpunkte und die Kleinbuchstaben  $a, b, c$  für die jeweils gegenüberliegenden Seitenlängen.

Euler gründete die sogenannte *Analysis situs*, einen Bereich der Mathematik, der heute der Topologie entspricht.

Die Schreibweise  $f(x)$  für den Funktionswert von der Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  wurde erstmals von Euler verwendet. Er war auch der erste, der für die Kreiszahl den Buchstaben Pi, also  $\pi$ , und für das Summenzeichen das große griechische Sigma  $\Sigma$  einführte (Lehmann 2007).

Im Allgemeinen bereicherte er die Differential- und die Integralrechnung. Er entwickelte die Lösungsstrategien für Differentialgleichungen durch die Substitution der Variablen.

In der Differentialrechnung behandelte Euler zudem die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen, das heißt für die Funktion  $f(x, y)$  gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Euler entdeckte außerdem diese sehr elegante Reihenentwicklung:

$$(1 - x) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n}{2}(3n-1)}$$

*Last but not least* entdeckte Euler den Eulerschen Polyedersatz, dem diese Arbeit gewidmet ist. Im nächsten Kapitel wird mehr über die Geschichte dieses Satzes berichtet.

Wie man hier erkennen kann, hat Euler in vielen Gebieten der Mathematik hervorragende Leistungen erbracht und erfolgreich neue Aspekte beschrieben und eingeführt. Euler war wohl der produktivste Wissenschaftler, den die Welt hervorgebracht hat (Wussing 2009, S.45).

Andere Zitate zu seinen hervorragenden Leistungen:

„Lest Euler, er ist unser aller Meister!“ Laplace (französischer Mathematiker und Physiker, 1749-1827).

„Leonhard Euler war einer der schöpferischsten Menschen überhaupt“ (Lehmann 2007, S. 272).

„Seen statistically, Euler must have made a discovery every week. Euler was not only one of the greatest mathematicians, but also in general one of the most creative human beings.“ Rüdiger Thiele (tschechischer Mathematiker, geboren 1943).

„Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden.“ Gauss (deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker, 1777-1855).

„Eulers Variationsrechnung aus dem Jahr 1744 ist eines der größten mathematischen Werke, das jemals jemand geschrieben hat.“ Constantin Carathéodory (griechischer Mathematiker, 1873-1950).

„Euler ist der Gott der Mathematik, sein Tod markiert den Niedergang der mathematischen Wissenschaften.“ Poincaré (französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, 1854-1912).

„Alle nach 1748 erschienenen Bücher zur Analysis - egal ob für Anfänger oder für Fortgeschrittene - sind nur eine Kopie der Euler'schen Werke oder eine Kopie der Kopie.“ Boyer Carl (amerikanischer Mathematikhistoriker, 1906-1976).

„Euler war der fruchtbarste Mathematiker der Geschichte. Er verfasste seine großen Abhandlungen so leicht, wie ein gewandter Stilist einen Brief an einen guten Freund schreibt.“ (Bell 1967, S.145)

## 2.3 Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach

Die Informationen in diesem Abschnitt stammen aus Lemmermeyer (2010), Koch (2007) und Jushkevic & Kopelevic (1994).

### 2.3.1 Wer war Goldbach?

Über Goldbach ist heute sehr wenig bekannt. Es gibt keine Biographie und sein Leben ist bis auf wenige Zeitabschnitte unbekannt. Sein Name taucht aber immer wieder in Briefen auf. Er pflegte Brieffreundschaften mit großen Persönlichkeiten aus allen möglichen Disziplinen der Wissenschaft, wie zum Beispiel Leibniz, Newton, Moivre oder die Familie Bernoulli. Zu Lebzeiten war Goldbach sehr berühmt, nach seinem Tod kannte ihn aber kaum jemand mehr.

Christian Goldbach wurde im Jahr 1690 in Königsberg in Ostpreußen geboren und studierte Jura an der Universität Königsberg. Er reiste sehr viel und interessierte sich stark für Mathematik und Poesie, die meiste seiner Zeit investierte er jedoch in die Zahlentheorie. In den besuchten Städten traf er sich stets mit den dort ansässigen Wissenschaftlern.

1725 begab er sich nach St. Petersburg und wurde zum *ständigen Sekretär* der Akademie ernannt. Darauf lud er zusammen mit den Gebrüdern Bernoulli Euler ein, der 1727 dort eintraf. Im Jahr 1729 schrieb Euler den ersten Brief an Goldbach. Dieser verließ St. Petersburg für einige Jahre, um in Moskau den späteren Zaren Peter II zu erziehen, kehrte dann aber wieder zurück. Goldbach blieb dann an der Akademie, zunächst als Staatsrat und dann als Ehrenmitglied bis er 1764 starb.

### 2.3.2 Der Briefwechsel

Der zweite Brief war eine große Anregung für Euler: Goldbach teilte ihm mit, dass die Behauptung Fermats, dass  $2^{2^n} + 1$  für  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  eine Primzahl sei, nur für  $n \leq 4$  bekannt ist. Für ein größeres  $n$  fehle der Beweis. Euler findet eine Gegenprobe, und zwar dass 641 ein Teiler von  $2^{2^5} + 1$  ist. Die Beweisführung Eulers kann als erster Ansatz einer Gruppentheorie gesehen werden.

In einem Brief 1739 spricht Goldbach die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \frac{1}{n^m}$  an, wobei  $\lambda(n) = 1$  wenn  $n$  Produkt einer geraden Anzahl von Primzahlen ist und  $\lambda(n) = -1$  wenn  $n$  Produkt einer ungeraden Anzahl von Primzahlen ist. Goldbach vermutet, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \frac{1}{n^m} = \alpha \pi^m \quad \text{mit rationalem } \alpha \text{ und für } m \geq 2.$$

Noch im selben Jahr bewies Euler, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \frac{1}{n^m} = \frac{\zeta(2m)}{\zeta(m)},$$

wobei  $\zeta$  die Riemannsche Zeta-Funktion (siehe Abschnitt 2.2) ist. Daraus lässt sich Goldbachs Ergebnis herleiten.

Es gibt noch mehr Fälle, wo Goldbach Euler eine Vermutung mitteilte und Euler sie dann dementsprechend prüfte und entweder einen Beweis oder einen Gegenbeweis dafür fand.

### Zwei weitere Beispiele

- *Goldbachs Behauptung:* der kleinste Teiler ungleich 1 der Zahl  $a^2 + 1$  ist wieder der Form  $x^2 + 1$ , mit  $a, x \in \mathbb{N}$ .  
*Eulers Gegenbeweis:* für  $a = 34$  gilt  $a^2 + 1 = 1157$ . Der kleinste Teiler ungleich 1 ist 13.
- *Goldbachs Behauptung:* die Zahl  $(a + b)^p - a^p - b^p$  hat für  $p \in \mathbb{N}$  immer einen Teiler, der die Zahl  $p$  teilt und eine Primzahl ist.  
*Eulers Gegenbeweis:*  $a$  und  $b$  gleich 1 und  $p = 35$ . Die Zahl  $(1 + 1)^{35} - 1^{35} - 1^{35}$  ist weder durch 5 noch durch 7 teilbar.

In einem Brief von Euler an Goldbach 1744 war zudem das erste Mal die Rede von trigonometrischen Reihen. In einem anderen Brief bewies Euler die Aussage  $a^n + b^n = c^n$  mit  $a, b, c, n \in \mathbb{N}$  für die Fälle  $n = 3$  und  $n = 4$ . Euler war sich bewusst, dass er es nicht schaffen wird, einen allgemeinen Beweis für  $a^n + b^n = c^n$

mit  $n > 2$  zu finden.

Im Brief Nr. 149 vom Jahr 1750 von Euler an Goldbach stand folgendes (Koch 2007, S.164):

*Neulich kam mir in den Sinn, die allgemeinen Eigenschaften der Körper, welche hedris planis eingeschlossen sind, zu bestimmen, weil kein Zweifel ist, dass sich in denselben nicht ebendergleichen allgemeine Eigenschaften finden sollten, als in den figuris planis rectilineis,... Wie aber in den figuris planis nur latera und anguli zu betrachten vorkommen, müssen bei den Körpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden.[...]*  
*Folgende Proposition aber kann ich noch nicht recht rigorose demonstrieren:  $H + S = A + 2$ .*

Das war Eulers erste Nennung des **Eulerschen Polyedersatzes**. Goldbach antwortete, er sei zu solch „schönen theoremata“ hingezogen, sie interessieren ihm aber wenig. Den Beweis für den Satz lieferte Euler 1758 in der Veröffentlichung *Elementa doctrinae solidorum* nach. Es handelte sich aber um keinen vollständigen Beweis.

Die Bedeutung dieser Brieffreundschaft war für die mathematische Entwicklung Eulers und für seine Entdeckungen enorm. Möglicherweise wäre Euler ohne Goldbach nie zum *Euler* geworden. Der letzte Brief von Euler an Goldbach stammt aus dem Jahre 1764, blieb aber unbeantwortet, weil Goldbach noch in diesem Jahr verstarb.

Viele vollständige Briefe von Euler und von Goldbach finden sich zum Beispiel in Jushkevich & Winter (1965).

## 2.4 Zur Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes

Descartes (französischer Philosoph und Mathematiker, 1596-1650) entdeckte wohl als erster den Eulerschen Polyedersatz, der aber später nach Euler benannt wurde. Als Descartes 1650 in Stockholm starb, wurde der Beitrag *Progymnasmata De*

*Solidorum Elementis* aus seinem Nachlass nach Paris geschickt, wo Leibniz sieben Jahre später einen Teil davon veröffentlichte; Descartes Unterlagen gingen verloren, Leibniz' Kopie blieb aber erhalten (Ziegler & Blatter 2007). Descartes schrieb folgendes:

*Für ein Polyeder, zum Beispiel ein Polytop in  $\mathbb{R}^3$ , sei  $\alpha$  die Anzahl aller „Winkel im Raum“,  $\phi$  die Anzahl aller (Seiten-)Flächen und  $\rho$  die Anzahl aller „ebener Winkel“. Die „Winkel im Raum“ sind zum Beispiel die Eckpunkte eines Würfels und die „ebenen Winkel“ die Eckpunkte einer (Seiten-)Fläche. Dann gilt  $\rho = 2\phi + 2\alpha - 4$ . Jeder ebene Winkel wird nämlich von zwei Kanten gebildet und jede Kante erscheint in vier ebenen Winkeln. Daraus folgt, dass  $\rho = 2 \cdot k$ , wo  $k$  für die Anzahl der Kanten steht.*

Setzt man den letzteren Ausdruck in die obere Gleichung ein, so kann man wohl sagen, dass Descartes der Vorreiter des Eulerschen Satzes war. Er pflegte die Verwendung der Begriffe „ebener Winkel“ und „Raumwinkel“, verwendete aber nicht die Kantenanzahl oder die Anzahl der Seitenflächen. Ganz genau genommen erkannte aber weder Descartes noch Leibniz, der Descartes' Aussagen kannte, den heutigen Eulerschen Polyedersatz (Dieudonné 1978).

Euler fand die Formel im Jahr 1751/1752 und veröffentlichte sie 1758 in *Elementa doctrinae solidorum* (Fueter 1979). 1751 lieferte Euler bereits einen Beweis für die Formel, jedoch war dieser nicht korrekt und es fehlten wichtige, notwendige Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes. Viele Mathematiker versuchten, einen Beweis zu finden, darunter auch sehr bekannte Namen wie Legendre, Cauchy, Steiner, Möbius, Listing und andere. Der erste vollständige Beweis wird aber von Staudt 1847 zugeschrieben (Dieudonné 1978).

1852 formulierte Schläfli eine Verallgemeinerung des Satzes, also die Gültigkeit für  $n$ -dimensionale Polyeder. Die Überlegungen Schläflis waren aber lückenhaft. 1861 erkannten Cayley und Listing die Gültigkeit des Eulerschen Polyedersatzes, auch wenn die Kanten gekrümmt sind, also eine mehr zur Topologie gehörende Formulierung als zur metrischen oder projektiven Geometrie (Dieudonné 1978). Listing gilt als Gründer der Topologie als eigener Bereich der Mathematik, er lernte wahr-

scheinlich Begriffe und Problemlösungen von seinem Lehrer Gauss. Poincaré widmete sich intensiv der weiteren Entwicklung der Topologie und hauptsächlich der kombinatorischen Topologie. Der Eulersche Polyedersatz symbolisiert den Startpunkt der algebraischen Topologie (Ziegler & Blatter 2007).

**PROPOSITIO IV.**

*§. 33. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

**DEMONSTRATIO.**

Scilicet si ponatur vt haftenus :  
 numerus angulorum solidorum = S  
 numerus acierum - - - - = A  
 numerus hedrarum - - - = H  
 demonstrandum est , esse  $S + H = A + 2$ .

Abbildung 2.4: Der Eulersche Poledersatz in *Elementa doctrinae solidorum* (Zugriff am 04.11.2020 unter <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/investigating-eulers-polyhedral-formula-using-original-sources-eulers-polyhedral-formula>)

### 2.4.1 Persönlichkeiten

Vollständigkeitshalber werden die genannten Persönlichkeiten im Folgenden nochmals kurz mit ihrer Herkunft und ihrer Lebenszeit erwähnt:

Augustin-Louis **Cauchy**, französischer Mathematiker, 1789-1857

Adrien-Marie **Legendre**, französischer Mathematiker, 1752-1833

Jakob **Steiner**, schweizer Mathematiker, 1796-1863

August Ferdinand **Möbius**, deutscher Mathematiker und Astronom, 1790-1868

Johann Benedict **Listing**, deutscher Mathematiker und Physiker, 1808-1882

Karl Georg Christian **von Staudt**, deutscher Mathematiker, 1798-1867

Arthur **Cayley**, englischer Mathematiker, 1821-1895

Henri **Poincaré**, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, 1854-1912

Ludwig **Schläfli**, schweizer Mathematiker, 1814-1895

Johann Carl Friedrich **Gauss**, deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker, 1777-1855

Gottfried Wilhelm **Leibniz**, deutscher Philosoph, Mathematiker, Jurist und Historiker, 1646-1716

# 3 Der Eulersche Polyedersatz

In diesem Kapitel wird der Eulersche Polyedersatz angeführt und verschiedene Beweisführungen beschrieben. Zuerst sollen ein paar Definitionen diskutiert werden.

## 3.1 Voraussetzungen

**Definition 3.1.1.** Ein **Polyeder** ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , die von endlich vielen ebenen Flächen begrenzt wird. Zum Beispiel ist ein Kegel kein Polyeder.

Ein Polyeder kann auch als Teilmenge des euklidischen Raumes  $\mathbb{E}^3$  gesehen werden, und zwar als Schnitt endlich vieler Halbräume in  $\mathbb{E}^3$ . Ein **Polytop** ist dann eine solche Teilmenge, die zusätzlich beschränkt und nicht leer ist.

*Bemerkung 3.1.2.* Ein Polytop kann auch als konvexe Hülle endlich vieler Punkte in  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden. Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die alle diese Punkte enthält. Aigner und Ziegler (2010) definieren ein solches konvexes Polytop  $P$  als eine konvexe Hülle einer endlichen Menge  $S$  bestehend aus den Elementen  $s_1, s_2, \dots, s_n$  (geschrieben  $\text{conv}(S)$ ) folgendermaßen:

$$P = \text{conv}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \mid \lambda_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Bemerkung 3.1.3.* Jedes Polyeder ist **konvex**, also ist für je zwei zufällig gewählte Punkte im Polyeder auch jeder Punkt der geradlinigen Verbindungsstrecke dieser zwei Punkte im Polyeder. Anders ausgedrückt handelt es sich hierbei um ein Körper ohne einspringende Ecken.

**Definition 3.1.4.** Ein Polyeder ist **regulär**, wenn jede Fläche des Polyeders ein und dasselbe regelmäßige Vieleck ist und wenn in jeder Ecke des Polyeders sich gleich viele dieser Vielecke und somit die gleiche Kantenanzahl treffen.



Abbildung 3.1: Euler und der Eulersche Polyedersatz auf Briefmarken der DDR vom Jahr 1983 und der Schweiz von 2007 (Wussing 2009, S. 67).

## 3.2 Satz

**Satz 3.2.1** (Eulerscher Polyedersatz). *Sei  $E$  die Anzahl der Ecken,  $F$  die Anzahl der Flächen und  $K$  die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders. Dann gilt*

$$E + F = K + 2. \quad (3.1)$$

*Beweis.* Dieser erste Beweis orientiert sich stark an der Ausführung in Hell und Stampfer 2017.

Den konvexen Polyeder können wir durch Zentralprojektion als planaren Graphen darstellen. Um uns das besser vorstellen zu können, ist das so, als ob wir einen Körper (z.B. Prisma) auf die Wand beamen würden, genauso wie in Abbildung 3.2. Dabei ist anzumerken, dass die äußere Fläche, also rundherum, auch eine Fläche ist und zu  $F$  dazuzuzählen ist. Dieser planare Graph wird oft auch *Netz* des Polyeders genannt.

Man kann auch die Vorstellung haben, dass die Punkte und Kanten auf eine Kugel projiziert werden, die um den Körper gelegen ist. Das Polyeder wird 'aufgeblasen'. Dabei spielt es keine Rolle, dass die Kanten zu Bögen werden. In diesem Fall wird die Fläche der Kugel als Fläche dazugezählt.

Wir können bemerken, dass sich die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen durch die Projektion nicht verändert. Zum Beispiel gilt beim Würfel  $E = 8$ ,  $F = 6$  und  $K = 12$  vor und nach der Projektion, wobei, wie gesagt, die äußere Fläche als

Fläche zu zählen ist.

Mit vollständiger strukturellen Induktion beweisen wir nun den Eulerschen Polyedersatz (Hell & Stampfer 2017).

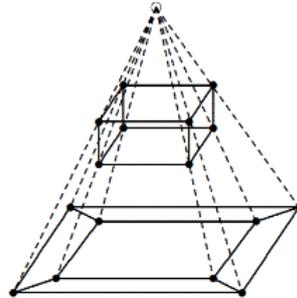


Abbildung 3.2: Zentralprojektion eines Würfels auf die Ebene. Zu beachten ist, dass der äußere Gebiet in der Ebene ebenfalls eine Fläche erzeugt, und zwar fehlt sonst die obere Fläche des Würfels in dieser Darstellung.

1. (*Induktionsanfang*) Dabei starten wir mit dem einfachsten planaren Graphen: dieser besteht aus einer Ecke. Die Fläche rundherum zählt als Fläche. Kanten haben wir keine. Also gilt:

$$E + F - K = 1 + 1 - 0 = 2 .$$

2. Von diesem einfachsten planaren Graphen aus startend, konstruieren wir alle anderen Graphen wie folgt:

- a) (*1. Fall*) Wir fügen eine Ecke hinzu und verbinden diese mit einer Kante mit dem existierenden Graphen.

Der Graph hat somit eine Ecke und eine Kante mehr, die Anzahl der Flächen bleibt gleich. Also gilt die Formel weiterhin:

$$(E + 1) + F = (K + 1) + 2 \text{ ist äquivalent zu } E + F = K + 2.$$

- b) (*2. Fall*) Sollten zwei Ecken nicht bereits miteinander verbunden sein, verbinden wir sie mit einer Kante. Dadurch entsteht eine neue Fläche.

Der Graph hat somit eine Kante und eine Fläche mehr, die Anzahl der Ecken bleibt gleich. Also gilt die Formel weiterhin, denn

$$E + (F + 1) = (K + 1) + 2 \text{ ist äquivalent zu } E + F = K + 2.$$

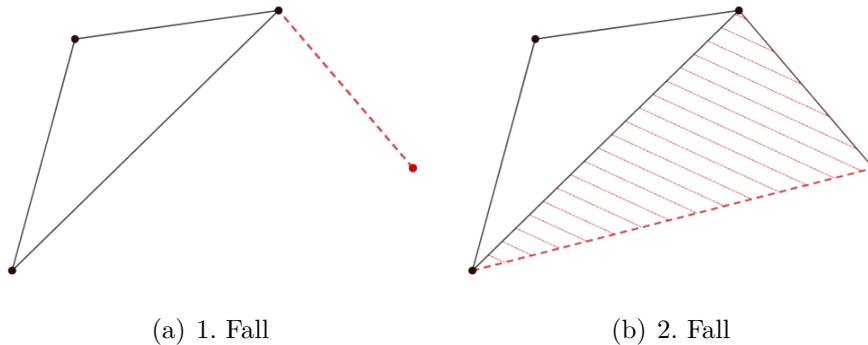


Abbildung 3.3: Beweis mit vollständiger Induktion.

Mit diesen zwei Schritten ist jeder planare Graph konstruierbar. Also gilt der Eulersche Polyedersatz für jeden planaren Graphen und somit für jedes konvexe Polyeder.

□

**Beispiel 3.2.2.** Ein Würfel ist ein konvexes Polyeder und es gilt  $E = 8$ ,  $F = 6$  und  $K = 12$ , also  $E + F = K + 2$ .

Der folgende Beweis, der von Agricola und Friedrich (2009) geführt wird, verwendet keine Induktion, sondern eine Projektion auf die Kugel um den Körper, wie auch beim vorigen Beweis angesprochen.

*Beweis.* Es geht darum, das Polyeder mit seinen Ecken und Kanten auf eine imaginäre Kugel rund um das Polyeder zu projizieren. Dabei entsteht ein „spärisches Polytop“, wie Agricola und Friedrich (2009) dieses zu nennen pflegen. Wie bereits gesagt, hat dieses spärisches Polytop die gleiche Anzahl an Ecken, Kanten, Flächen wie das ursprüngliche. Die Tatsache, dass die Kanten bogig werden, spielt keine Rolle. Wie beim vorigen Beweis werden nun die Ecken und Kanten des sphärischen Polytops durch eine stereographische Projektion auf eine Ebene abgebildet. Dabei wird ein zufälliger Punkt auf einer der Flächen gewählt und von dem aus projiziert. Die so entstandenen Strecken schneiden sich nicht, die Anzahl der Ecken bleibt gleich und die Anzahl der Flächen wird um 1 reduziert. Angenommen, für das ursprüngliche Polyeder gilt  $E + F = K + 2$  (*Induktionsvoraussetzung*), so muss

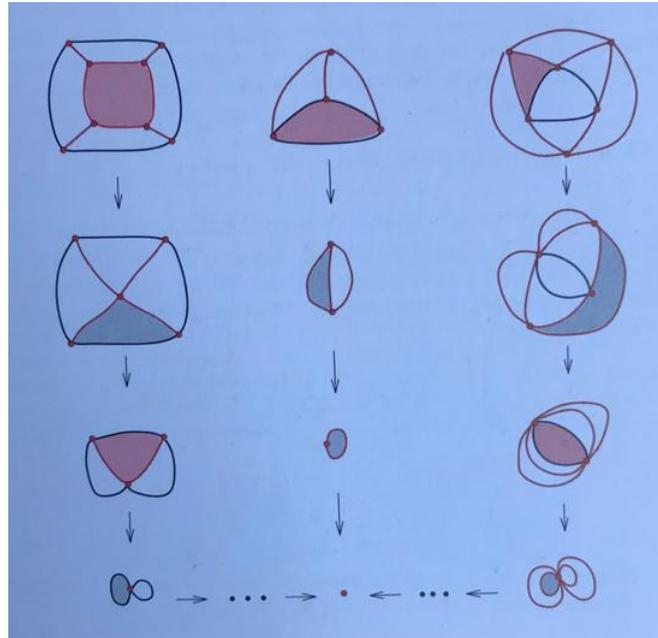


Abbildung 3.4: Das Kollabieren: die Fläche, die zu einem Punkt kollabiert wird, ist jeweils farbig dargestellt (Agricola & Friedrich 2009, S. 67).

für dieses neu entstandene Netz  $E_1 + F_1 = K_1 + 1$  gelten, wobei  $E_1$ ,  $F_1$  und  $K_1$  die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten dieses Netzes sind. Also muss gezeigt werden, dass  $E_1 + F_1 - K_1 = 1$

Nun geht es darum, die Flächen dieses Netzes zu „kollabieren“: dabei wählen wir eine beliebige Fläche des Netzes mit, angenommen,  $P$  Eckpunkten und kollabieren sie zu einem einzigen Punkt. Durch diesen Vorgang verschwindet eine Fläche, also verringert sich die Anzahl der Flächen des Netzes um 1, die Anzahl der Kanten verringert sich genau um die Anzahl der Eckpunkte  $P$  der kollabierenden Fläche und die  $P$  Eckpunkte werden zu einem einzigen Punkt, das heißt, dass die Anzahl der Ecken des Netzes sich um  $P - 1$  verringert. Dieser Vorgang wird in Abbildung 3.4 erklärt und dargestellt. Die neu entstandenen Größen werden dementsprechend  $E_2$ ,  $F_2$  und  $K_2$  genannt. Also gilt:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 - 1; \\ K_2 &= K_1 - P; \\ E_2 &= E_1 - (P - 1). \end{aligned}$$

Fassen wir diese Gleichungen zusammen, so erhalten wir  $E_1 + F_1 - K_1 = E_2 + F_2 - K_2$ . Also verändert sich durch den Vorgang des Kollabierens die Zahl  $E_1 + F_1 - K_1$  nicht. Nach und nach werden alle Flächen des Netzes kollabiert und die soeben genannte Zahl bleibt unverändert. Nach einem  $n$ -fachen Kollabieren erhält man einen einzelnen Punkt. Natürlich gilt:  $E_n = 1$ ,  $F_n = 0$  und  $K_n = 0$ . Also ist  $E_n + F_n - K_n = 1 = E_1 + F_1 - K_1$ , was zu zeigen war.  $\square$

Ein historisch wichtiger Beweis wird von Staudt zugeschrieben. Er bewies den Eulerschen Polyedersatz in seinem sehr berühmten Buch *Geometrie der Lage* vom Jahre 1847 in einem Absatz von 10 Zeilen. An dieser Stelle wird der Beweis nicht genauer besprochen, es wird auf Berendonk (2014) verwiesen. Um von Staudts Vorgehen und Beweisführung zu verstehen, gibt es im Schulunterricht das Spiel „Rosenkohl“, im Englischen „Brussel sprouts“, ein Spiel für zwei Personen. Um die Siegerin oder der Sieger des Spiels im Voraus festzulegen, müssen Lernende analog wie von Staudt vorgehen. Das Spiel wird im Dossier für Lehrpersonen der PH Luzern (2019) genauer beschrieben.

Ein anderer Beweis wird von Aigner und Ziegler (2004) in ihrem *Proofs of THE BOOK* gebracht. Dafür werden aber mehrere Begriffe und Sätze aus der Graphenlehre benötigt, die nicht Teil dieser Arbeit sind. Dieser wird deswegen an dieser Stelle nicht explizit angeführt. Der Beweis erfolgt ohne Induktion und erinnert an jenen von von Staudt. Es geht darum, aus einem gegebenen Graphen seinen Dualgraphen zu konstruieren und anschließend einen aufgespannten Baum (auch Spannbaum genannt) für den Dualgraphen zu beschreiben. Für den Baum des Graphen bzw. des Dualgraphen gilt, dass ihre Anzahl an Ecken bzw. Gebieten um 1 größer als die Anzahl der Kanten ist. Die Anzahl der Ecken des ursprünglichen planaren Graphen ist gleich der Summe der Anzahl der Ecken der beiden Bäume. Daraus folgt genau der Eulersche Polyedersatz für planare Graphen. Für die Beweisführung, genauere Erklärungen und Passagen wird auf Aigner und Ziegler (2004) verwiesen.

Im Abschnitt 8.3 wird noch einmal genauer darauf eingegangen, für welche Körper dieser Satz gilt, also was der Satz voraussagt und wie die Vorstellung eines konvexen Körpers im Schulunterricht vermittelt werden kann.

## 4 Charakterisierung der Platonischen Körper

Mithilfe des Eulerschen Polyedersatzes sollen in diesem Abschnitt alle möglichen platonischen Körper erfasst und charakterisiert werden. Es wird wie in Hell und Stampfer (2017) vorgegangen.

**Definition 4.0.1. Platonische Körper** sind dreidimensionale Körper, die aus identen, regelmäßigen Seitenflächen zusammengesetzt sind und bei denen sich in jeder Ecke gleich viele Kanten treffen.

Sei nun  $e$  die Anzahl der Eckpunkte einer regelmäßigen Seitenfläche, aus der der Körper zusammengesetzt ist. Sei  $k$  die Anzahl der Kanten, die von einer beliebigen Ecke des Körpers ausgehen. Seien weiterhin  $E$  die Anzahl der Ecken,  $F$  die Anzahl der Seitenflächen und  $K$  die Anzahl der Kanten des Körpers. Zum Beispiel gilt beim Würfel in Abbildung 4.1  $e = 4$ ,  $k = 3$ ,  $E = 8$ ,  $F = 6$  und  $K = 12$ .

Folgende Zusammenhänge zwischen diesen Größen müssen gelten:

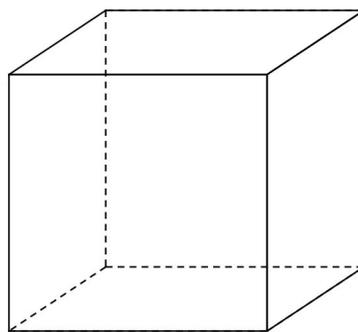


Abbildung 4.1: Der Würfel ist ein platonischer Körper mit  $e = 4$ ,  $k = 3$ ,  $E = 8$ ,  $F = 6$  und  $K = 12$ .

1.  $k \cdot E = 2 \cdot K$ . Multipliziert man nämlich die Anzahl der Ecken mit der Anzahl der Kanten, die von einer Ecke aus starten, erhält man genau die doppelte Anzahl der gesamten Kanten des Körpers, da jede Kante genau zwei Ecken verbindet.
2.  $e \cdot F = 2 \cdot K$ . Jede Seitenfläche besitzt  $e$  Eckpunkte. Multipliziert man die Anzahl der Flächen mit der Anzahl der Eckpunkten einer Seitenfläche, so erhält man genau zwei Mal die Anzahl der Kanten des Körpers, da jede Kante zwei angrenzende Seitenflächen hat und zwei Eckpunkte verbindet.

Also gilt:

$$eF = 2K = kE.$$

Somit erhält man folgende vier Gleichungen:

$$E + F = K + 2 \tag{4.1}$$

$$eF = 2K$$

$$eF = kE$$

$$2K = kE$$

Durch Umformen der ersten Gleichung und Substitution erhält man

$$\begin{array}{ll}
 E + F = K + 2 & | \cdot (2e) \\
 2eE + 2eF = 2eK + 4e & | \text{einsetzen: } F = \frac{kE}{e} \text{ und } K = \frac{kE}{2} \\
 2eE + 2kE - ekE = 4e & \\
 E = \frac{4e}{2e + 2k - ek} &
 \end{array}$$

Um mit diesen Ausdruck für  $E$  besser rechnen zu können, faktorisieren wir den

Nenner wie folgt:

$$\begin{aligned}2e + 2k - ek &= \\ -(-2e - 2k + ek) &= \\ -(+4 - 2e - 2k + ek - 4) &= \\ -((2 - e)(2 - k) - 4) &= \\ 4 - (2 - e)(2 - k) &\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$E = \frac{4e}{4 - (2 - e)(2 - k)}.$$

Formen wir die Gleichung 4.1 anders um, indem wir beide Seiten der Gleichung mit  $ek$  multiplizieren und dann  $E$  mit  $\frac{2K}{k}$  und  $F$  mit  $\frac{2K}{e}$  ersetzen und anschließend  $K$  freistellen, so erhalten wir

$$K = \frac{2ek}{4 - (2 - e)(2 - k)}.$$

Auf analoger Weise wird die Gleichung 4.1 mit  $2k$  multipliziert und  $E$  bzw.  $K$  mit  $\frac{eF}{k}$  bzw.  $\frac{eF}{2}$  ersetzt. Darauf wird  $F$  freigestellt und man erhält

$$F = \frac{4k}{4 - (2 - e)(2 - k)}.$$

Wir präzisieren, dass  $e$  und  $k$  größer als 2 sein müssen. Wäre dies nicht so, hätten wir keinen Körper, sondern lediglich einen Weg aus Kanten oder eine einzige Kante mit zwei Ecken. Außerdem müssen  $E$ ,  $K$  und  $F$  größer als 0 sein. Eine negative Anzahl von Ecken oder Kanten ist nicht erwünscht. Also müssen sowohl der Zähler als auch der Nenner in den drei obigen Ausdrücken für  $E$ ,  $K$  und  $F$  größer als Null

sein. Es muss  $4 - (2 - e)(2 - k) > 0$  gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 4 - (2 - e)(2 - k) &> 0 \\
 4 &> (2 - e)(2 - k) \\
 4 &> 4 - 2e - 2k + ek \\
 2e &> -2k + ek \\
 2e &> k(e - 2) \\
 k &< \frac{2e}{e - 2}
 \end{aligned}$$

Stellt man nun diesen letzten Zusammenhang  $\frac{2e}{e-2}$  zwischen  $e$  und  $k$  graphisch dar, so erhält man den Graphen in Abbildung 4.2. Aus den Bedingungen  $e, k \in \mathbb{N}$  mit

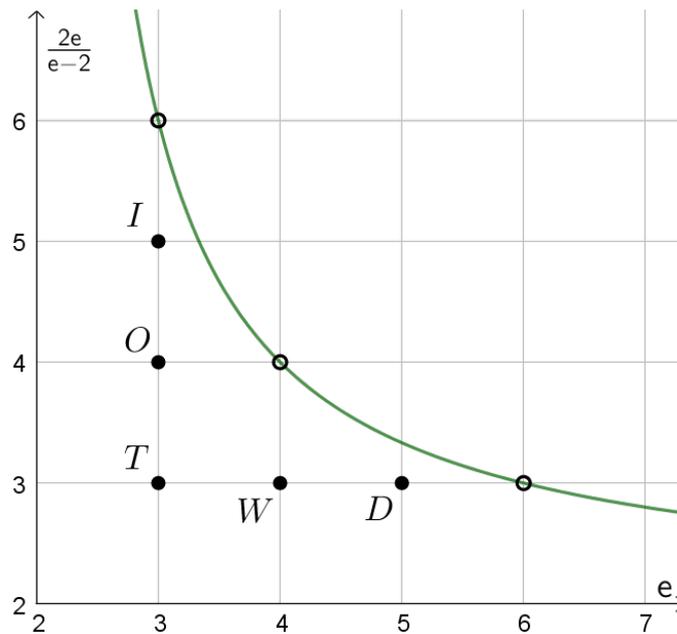


Abbildung 4.2: Zulässige Punktepaare  $(e, k)$ : Ikosaeder ( $I$ ), Oktaeder ( $O$ ), Tetraeder ( $T$ ), Würfel ( $W$ ) und Dodekaeder ( $D$ ).

$e, k > 2$  und  $k < \frac{2e}{e-2}$  folgt, dass genau fünf Punktepaare zulässig sind. Diese Punktepaare sind also die Lösungen der Ungleichung und sind in Abbildung 4.2 mit vollen, schwarzen Punkten gekennzeichnet. Bei den Körpern mit diesen Eigenschaften handelt es sich genau um die platonischen Körper, also dreidimensionale

Körper, die aus identen und regelmäßigen Seitenflächen gebaut sind. In Abbildung 4.3 sind diese dargestellt und in Tabelle 4.1 genauer beschrieben. Damit wurde auch gezeigt, dass es genau und genau nur fünf platonische Körper gibt.

Tabelle 4.1: Die fünf platonischen Körper mit ihrer jeweiligen Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen

| Punkt $(e, k)$ | Name       | Seitenfläche | Ecken | Kanten | Seitenflächen |
|----------------|------------|--------------|-------|--------|---------------|
| $T = (3, 3)$   | Tetraeder  | Dreieck      | 4     | 6      | 4             |
| $W = (4, 3)$   | Würfel     | Quadrat      | 8     | 12     | 6             |
| $O = (3, 4)$   | Oktaeder   | Dreieck      | 6     | 12     | 8             |
| $D = (5, 3)$   | Dodekaeder | Fünfeck      | 20    | 30     | 12            |
| $I = (3, 5)$   | Ikosaeder  | Dreieck      | 12    | 30     | 20            |

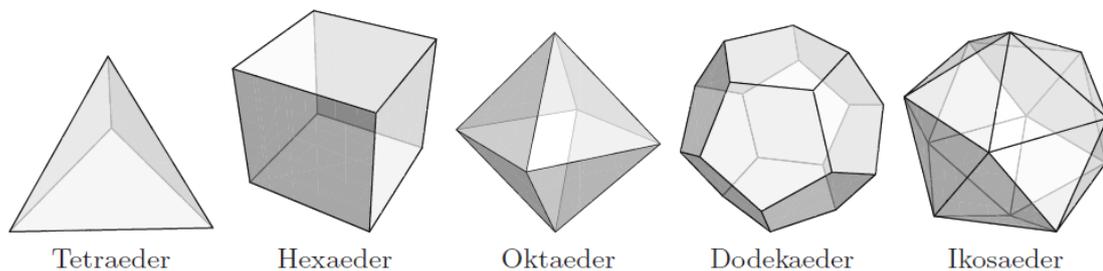


Abbildung 4.3: Die fünf platonischen Körper (Engel 2019, S. 137)

Wie in Tabelle 4.1 erkennbar, gibt es Gemeinsamkeiten zwischen Hexaeder/Würfel und Oktaeder bzw. zwischen Dodekaeder und Ikosaeder. Die Anzahl der Ecken des ersten ist jeweils gleich der Anzahl der Flächen des zweiten. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels so entsteht ein Oktaeder. Wiederholt man den Vorgang mit den Mittelpunkten der Seitenflächen des Oktaeders so entsteht wiederum ein Würfel. Genau der gleiche Vorgang ist auch mit Dodekaeder und Ikosaeder möglich. Wir sprechen hier von Dualität, die genauer in Kapitel 8.6.2 erläutert wird.

# 5 Satz von Galai

## 5.1 Vorüberlegungen

Aigner und Ziegler (2004) beschreiben drei verschiedene Anwendungen des Eulerschen Polyedersatzes, darunter auch den Satz von Galai, der in diesem Kapitel behandelt wird. Zuerst sind jedoch ein paar Definitionen aus der Graphenlehre nötig und es bedarf an einigen Vorüberlegungen, die unterem anderem aus Kowar (2019) entnommen wurden. Die Beweise orientieren sich an jene in Aigner und Ziegler (2004).

**Definition 5.1.1.** Seien  $E$  und  $K$  endliche Mengen,  $E$  nicht leer und  $K$  eine Menge, deren Elemente jeweils höchstens zweielementige Teilmengen von  $E$  sind. Ein **ebener Graph**  $G$  ist ein Paar  $(E, K)$  derartiger Mengen, wobei  $E$  die Menge der Ecken ist und  $K$  die Menge der Kanten.

**Beispiel 5.1.2.** Ist  $k = \{e, f\}$  eine Kante von  $G$  mit  $k \in K$  und  $e, f \in E$ , dann sind  $e$  und  $f$  die Eckpunkte der Kante  $k$ .

**Definition 5.1.3.** Der Graph  $G$  ist **vollständig** wenn  $K$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $E$  ist, also wenn jede Ecke mit jeder anderen Ecke durch eine Kante verbunden ist.

**Definition 5.1.4.** Sei  $e \in E$  eine Ecke des Graphen  $G$ . Der **Grad** der Ecke  $e$  ist die Anzahl der Kanten, die  $e$  als Eckpunkt haben. Hat eine Kante beide Eckpunkte in  $e$ , so wird diese doppelt gezählt und Schleife genannt.

**Beispiel 5.1.5.** In einem vollständigen Graph mit  $n$  Ecken hat jede Ecke Grad  $n - 1$ .

**Beispiel 5.1.6.** Werden Tetraeder und Würfel als Graphen aufgefasst, so ist ein Tetraeder vollständig, ein Würfel nicht.

**Definition 5.1.7.** Der Grad einer Ecke  $e \in E$  des Graphen  $G$  ist **gerade**, falls der Grad eine gerade Zahl ist und **ungerade**, falls der Grad eine ungerade Zahl ist.

Nun betrachten wir einen ebenen Graphen  $G$  mit  $n$  Ecken. Sei  $n_i$  die Anzahl der Ecken mit Grad  $i$  in  $G$ , mit  $i \in \{0, 1, \dots\}$ . Also gilt  $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \dots$ . Jede Kante hat zwei Eckpunkte, also erhöht sich der jeweilige Grad der Ecken um 2. Für die Anzahl der Kanten  $k$  gilt also:

$$2k = 0n_0 + 1n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots$$

Die Summe der Grade der einzelnen Ecken ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten. Der durchschnittliche Grad  $D$  der Ecken ist also gegeben durch das Verhältnis zwischen der doppelten Anzahl der Kanten und der Anzahl der Ecken:

$$D = \frac{2k}{n}$$

Sei  $f$  die Anzahl der Flächen eines ebenen Graphen  $G$ . Eine  $m$ -Fläche ist eine Fläche mit  $m$  Kanten und  $m$  Ecken,  $m \in \{1, 2, \dots\}$ . Sei  $f_m$  die Anzahl der  $m$ -Flächen in  $G$ . Für die Gesamtanzahl der Flächen in  $G$  gilt aber dann

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots \tag{5.1}$$

Die Kanten werden doppelt gezählt und jede  $m$ -Fläche hat  $m$  Kanten und deswegen gilt, analogerweise wie soeben:

$$2k = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots \tag{5.2}$$

Die durchschnittliche Anzahl der Kanten pro Fläche ist gegeben durch:

$$F = \frac{2k}{f}.$$

**Definition 5.1.8.** Ein Graph ist **zusammenhängend** wenn jede Ecke des Graphen von einer anderen Ecke des Graphen über mehrere Kanten und Ecken, einen sogenannten *Weg*, erreicht werden kann.

**Satz 5.1.9.** *Der zusammenhängende und ebene Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Ecken hat maximal  $3n - 6$  Kanten und hat eine Ecke mit Grad kleiner oder gleich 5.*

*Beweis.* Jede Fläche hat  $\geq 3$  Kanten, also folgen aus 5.1 und 5.2

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + f_5 + \dots \\ 2k &= 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \end{aligned}$$

und wir erhalten somit, wenn man von der unteren Gleichung das Dreifache der oberen subtrahiert:

$$2k - 3f = (3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots) - (3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \dots) \geq 0 \quad (5.3)$$

Nun kommt der Eulersche Polyedersatz  $n + f - k = 2$  ins Spiel. Aus  $3n + 3f - 3k = 6$  und Gleichung 5.3 folgt

$$\begin{aligned} 3n - 6 &= 3k - 3f = k + \underbrace{2k - 3f}_{\geq 0} \\ 3n - 6 &\geq k. \end{aligned}$$

Also hat der ebene Graph maximal  $3n - 6$  Kanten.

Der durchschnittliche Grad  $D$  dieses Graphs beträgt

$$D = \frac{2k}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$

Somit ist gezeigt, dass der Graph mindestens eine Ecke mit Grad  $\leq 5$  hat.  $\square$

## 5.2 Der Satz von Galai

Nun können wir den Satz von Galai formulieren und beweisen.

**Satz 5.2.1.** *Sei eine Menge von mindestens drei Punkten einer Ebene gegeben. Wenn die  $n \geq 3$  Punkte nicht auf einer Geraden liegen, gibt es immer eine Gerade, die genau zwei der  $n$  Punkte enthält.*

*Beweis.* Zuerst betten wir die Ebene, in der die drei Punkte liegen, in den Raum ein, und zwar in die Einheitskugel genau wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Nun entspricht jeder Punkt in der Ebene genau zwei entgegengesetzten Punkten auf der Einheitskugel und jede Gerade in der Ebene einem Großkreis auf der Einheitskugel. Also können wir den Satz von Galai noch einmal wie folgt formulieren:

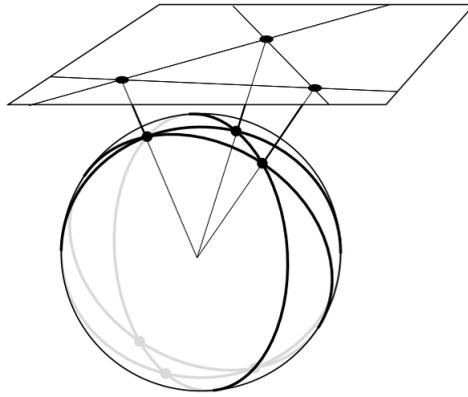


Abbildung 5.1: Einbettung der Ebene in den Raum, genauer auf die Einheitskugel (Aigner & Ziegler 2004, S. 68).

*Seien  $n \geq 3$  Punktpaare von entgegengesetzten Punkten auf einer Einheitskugel gegeben. Sind alle  $n$  Punktpaare nicht auf dem selben Großkreis, dann gibt es einen Großkreis, der genau zwei dieser  $n$  Paare entgegengesetzter Punkte enthält.*

Nun ersetzen wir jedes solche Punktpaar durch den zu ihm orthogonalen Großkreis. Das heißt, seien  $v$  und  $-v$  die entgegengesetzten Punkte, so ersetzen wir diese durch den orthogonalen Kreis  $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v \rangle = 0\}$ . Also, nehmen wir an, dass  $v$  der Nordpol ist, so ist  $C_v$  der Äquator, genau wie in Abbildung 5.2 dargestellt. Nun betrachtet man den orthogonalen Kreis des Schnittpunktes der Kreise. Die Anzahl der Punkte, die vorher auf der Geraden waren, wird also durch die Anzahl der Großkreise durch den Schnittpunkt gegeben.

Deswegen ist der vorige Satz äquivalent zu diesem:

*Seien  $n \geq 3$  Großkreise auf der Kugel  $S^2$  gegeben. Wenn nicht alle durch einen*

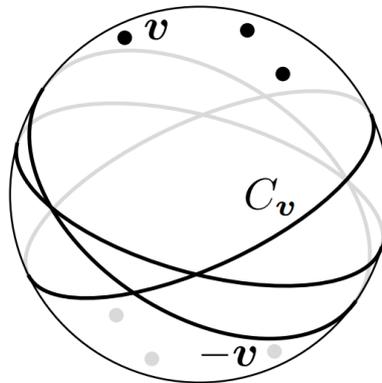


Abbildung 5.2: Wir ersetzen die Punktpaare  $(v, -v)$  mit den orthogonalen Kreisen  $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v \rangle = 0\}$ . Also, ist  $v$  der Nordpol, so ist  $C_v$  der Äquator (Aigner & Ziegler 2004, S. 68).

*Punkt gehen, dann gibt es einen Punkt, der auf genau zwei dieser  $n$  Großkreise liegt.*

Diese Anordnung von Großkreisen liefert einen ebenen Graphen auf  $S^2$ . Die Ecken des Graphen sind die Schnittpunkte zweier Großkreise und die Kanten des Graphen befinden sich zwischen den Schnittpunkten auf einem Großkreis. Jede Ecke hat einen geraden Grad und zwar einen Grad, der mindestens 4 beträgt. Laut Satz 5.1.9 gibt es somit eine Ecke mit Grad höchstens 5. Aus diesen zwei Aussagen folgt, dass eine Ecke Grad 4 hat und somit liegt dieser Punkt auf zwei dieser  $n$  Großkreise.  $\square$

# 6 Satz von Pick

## 6.1 Wer war Pick?

Der österreichische Mathematiker Georg Alexander Pick wurde 1859 in Wien geboren. Er promovierte 1880 an der Universität Wien in Mathematik, Physik und Lehramt. Danach zog er nach Halle und lernte dort 1885 Hilbert kennen. Pick wurde 1892 zum Mathematik-Professor an der Leopoldina, der deutschen Akademie der Naturforscher, in Halle ernannt. Später lehrte er Mathematik an der Universität Prag. Zudem soll er an der Berufung Einsteins an der Universität Prag im Jahre 1910 involviert gewesen sein. 1927 trat er in den Ruhestand und kehrte somit von Prag nach Wien zurück. Als Jude flüchtete er 1938, nach dem Anschluss Österreichs an Deutschland, vor den Nationalsozialisten nach Prag. Vier Jahre später wurde er jedoch in das Konzentrationslager Theresienstadt deportiert und zwei Wochen später, am 13.07.1942, ermordet. Pick hat den nach ihm benannten Satz 1899 bewiesen; der Satz überraschte sogar ihn selbst (Aigner & Ziegler 2004).

## 6.2 Der Satz von Pick

Der nach Pick benannte Satz ist eine weitere direkte Folgerung vom Eulerschen Polyedersatz. Auf sehr elegante Weise berechnete er Flächeninhalte von Vielecken mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten in der Ebene. Also befinden wir uns nun im Zahlengitter  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ . Bevor der Satz beschrieben und bewiesen wird, zuerst ein paar Definitionen und notwendige Bemerkungen.

Seien  $i$  die Anzahl der Punkte des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  innerhalb des Polygons und  $r$  die Anzahl der Punkte auf dem Rand des Polygons, also auf dem Streckenzug. Mit  $A$  wird jeweils die Fläche des Polygons bezeichnet.

**Definition 6.2.1.** Ein Polygon in der Ebene ist **elementar**, wenn die Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben und keine Gitterpunkte innerhalb des Polygons sind.

**Definition 6.2.2.** Eine Basis von  $\mathbb{Z}^2$  ist ein Vektorpaar  $v, w$  mit  $\{\lambda_1 v + \lambda_2 w \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$ .

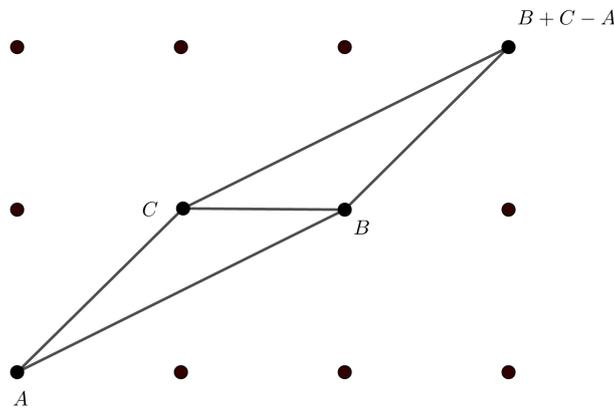


Abbildung 6.1: Elementares Dreieck mit Eckpunkten  $A, B, C$  bzw. elementares Parallelogramm mit Eckpunkten  $A, B, C, B + C - A$

*Bemerkung 6.2.3.* Der Flächeninhalt eines elementaren Dreiecks  $d$  mit Eckpunkten  $A, B, C$  ist  $\frac{1}{2}$ .

*Beweis.* Das Parallelogramm  $g$  mit Eckpunkten  $A, B, C, B + C - A$  erhält man durch Spiegelung des Dreiecks  $d$  um den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ , genau wie in Abbildung 6.1 dargestellt. Da das Dreieck elementar ist und durch Spiegelung keine weiteren inneren Punkte entstehen können, ist das Parallelogramm ebenfalls elementar.

Solche Parallelogramme können die ganze Ebene aufspannen und decken und so jeden Punkt erreichen, wenn man jeweils parallele Seiten aneinander legt. Deswegen bilden die linear unabhängigen Vektoren  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  eine Basis für  $\mathbb{Z}^2$ .

Seien  $(a_1, a_2)$  und  $(b_1, b_2)$  die Koordinaten von  $A$  und  $B$ , so hat die Matrix  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  Determinante  $\pm 1$ . (Alle Basen für das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  haben Determinante  $\pm 1$  - für eine

genauere Erklärung dieser Aussage wird auf Aigner & Ziegler (2004), Seite 69, verwiesen). Daraus folgt, dass das elementare Parallelogramm  $g$  Flächeninhalt 1 hat. Der Flächeninhalt des Dreiecks  $d$  ist somit  $\frac{1}{2}$ .

Die Bemerkung 6.2.3 kann auch geometrisch eleganter gezeigt werden. Dabei wird ein elementares Dreieck in kleinere Dreiecke eingeteilt, die offensichtlich Flächeninhalt  $\frac{1}{4}$  haben. Werden diese Flächeninhalte zusammengezählt, so kommt der Flächeninhalt des elementaren Dreiecks zum Vorschein, nämlich  $\frac{1}{2}$ . Hier ein Beispiele für eine solche Zerlegung:

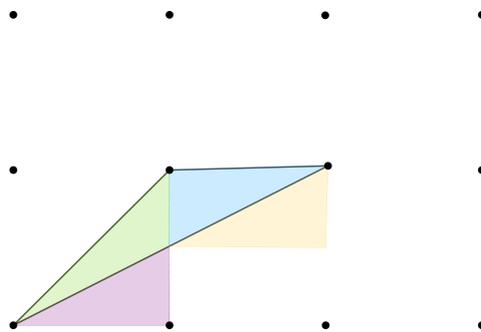


Abbildung 6.2: Zerlegung eines elementaren Dreiecks in kleinere Dreiecke mit Flächeninhalt  $\frac{1}{4}$ .

□

**Satz 6.2.4.** *Der Flächeninhalt eines Polygons  $p$  der Ebene mit ganzzahligen Eckpunkten beträgt*

$$A(p) = \frac{r}{2} + i - 1, \quad (6.1)$$

wobei  $r$  die ganzzahligen Punkte auf dem Rand des Polygons und  $i$  jener innerhalb des Polygons bezeichnet.

*Beweis.* Dieser Beweis orientiert sich an jenen in Aigner und Ziegler (2004). Jedes Polygon kann vollständig in elementare Dreiecke unterteilt werden, sodass jeder Punkt innerhalb und auf dem Rand des Polygons ein Eckpunkt eines Dreiecks ist, genau wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Das ist nicht offensichtlich möglich. Aigner und Ziegler (2004) liefern im Abschnitt „How to guard a museum“ auf Seite 203 einen Beweis dafür mithilfe von Graphenfärbungen.

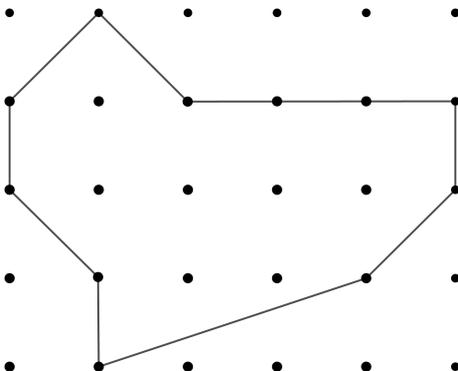


Abbildung 6.3: Der Satz von Pick mit  $r = 11$ ,  $i = 7$  und  $A(p) = \frac{11}{2} + 7 - 1 = \frac{23}{2}$

Durch diese Unterteilung erhalten wir  $f$  Flächen:  $f - 1$  Dreiecke mit Flächeninhalt  $\frac{1}{2}$  und eine unendliche Fläche rundherum, also die Komplementärfläche des Polygons. Der Flächeninhalt des Polygons beträgt somit

$$A(p) = (f - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{f - 1}{2}. \quad (6.2)$$

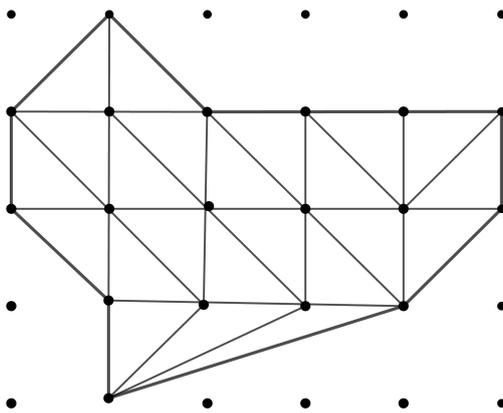


Abbildung 6.4: Die Unterteilung eines Polygons in elementare Dreiecke

Jede Kante innerhalb des Polygons grenzt an zwei solche elementare Dreiecke, wird

also doppelt gezählt, und jede Kante auf dem Rand des Polygons an ein Dreieck. Seien  $k_i$  bzw.  $k_r$  die Anzahl der Kanten innerhalb bzw. auf dem Rand des Polygons. So muss die Anzahl der Dreiecke gleich  $\frac{1}{3}(2k_i + k_r)$  sein, da jedes Dreieck drei Kanten besitzt und die Kanten innerhalb des Polygons jeweils zu zwei Dreiecken gehören. Aus der Anzahl aller Kanten  $k := k_i + k_r$  und  $f - 1 = \frac{1}{3}(2k_i + k_r)$  folgt:

$$\begin{aligned} 3f - 3 &= 2k_i + k_r \\ 3f - 3 &= 2k - k_r \\ f &= 2k - k_r - 2f + 3 \end{aligned}$$

und

$$f = 2(k - f) - k_r + 3 \tag{6.3}$$

Nun kommt der Eulersche Polyedersatz  $e + f - k = 2$  bzw.  $k = e + f - 2$  ins Spiel, wo  $e$  die Anzahl aller Punkte in und auf dem Rand des Polygons bezeichnet. Setzt man dies in die Gleichung 6.3 ein, so erhält man

$$f = 2(e + f - 2 - f) - k_r + 3 = 2e - k_r - 1$$

Die Anzahl  $r$  der Punkte auf dem Rand des Polygons ist gleich der Anzahl der Kanten  $k_r$  auf dem Rand des Polygons:  $r = k_r$ . Also gilt  $f = 2e - r - 1$ . Aus  $e = i + r$  folgt

$$f = 2(i + r) - r - 1 = 2i + r - 1$$

Wird dieser Ausdruck für  $f$  in den Flächeninhalt des Polygons  $A(p) = (f - 1) \cdot \frac{1}{2}$ , (Gleichung 6.2), eingesetzt, so erhält man den Satz von Pick:

$$A(p) = \frac{1}{2}(2i + r - 1 - 1) = i + \frac{r}{2} - 1.$$

□

**Satz 6.2.5.** *Der Eulersche Polyedersatz und der Satz von Pick sind äquivalent.*

*Beweis.* Für diesen Beweis ist der Artikel von DeTemple und Robertson (1974) sehr hilfreich:

1. *Pick*  $\implies$  *Euler*.

Sei  $p$  ein Polygon in einer Ebene mit ganzzahligen Koordinaten der Eckpunkte. Dieses Polygon hat  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen. Dieses Polygon kann, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, in elementare Dreiecke unterteilt werden. Dabei verändert sich die Zahl  $e - k + f$  nicht, denn sobald eine Kante hinzugefügt wird, entweder die Anzahl der Ecken oder jene der Flächen um 1 steigt, ganz nach dem im ersten Beweis des Eulerschen Polyedersatzes erklärten Verfahren. Deswegen genügt es, den Wert  $e - k + f$  für das in elementare Dreiecke geteilte Polytop zu berechnen. Die Gesamtfläche des Polytops ist genau gleich der Hälfte der Anzahl der elementaren Dreiecke, weil jedes elementare Dreieck Flächeinhalt  $\frac{1}{2}$  hat. Also  $f = 2 \cdot A(p)$ . Nach dem Satz von Pick gilt  $A(p) = \frac{r}{2} + i - 1$ , wobei  $r$  die Anzahl der Eckpunkte auf dem Rand des Polygons und  $i$  jene innerhalb des Polygons bezeichnet. Umgeformt gilt  $2A(p) = r + 2i - 2$  und somit

$$f = r + 2i - 2. \quad (6.4)$$

Weiters gilt offensichtlich

$$e = r + i. \quad (6.5)$$

Um nun die Gesamtanzahl der Kanten im Polytop, das in elementare Dreiecke geteilt ist, zu berechnen, wird auf die Anzahl der elementaren Dreiecke zurückgegriffen, die im vorigen Abschnitt gezeigt wurde. Und zwar sind jeweils  $\frac{2k_i + k_r}{3}$  elementare Dreiecke in einem Polytop mit  $k_i$  internen Kanten und  $k_r$  Kanten auf dem Rand. Also gilt

$$f = \frac{2k_i + k_r}{3}.$$

Formt man diese Gleichung um und verwendet man dabei die Tatsache, dass  $k = k_i + k_r$  und dass  $k_r = r$  so erhält man  $f = \frac{2k - r}{3}$ . Wird nach  $k$  umgeformt so erhält man

$$k = \frac{3f + r}{2}. \quad (6.6)$$

Aus den Gleichungen 6.4, 6.5 und 6.6 folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
 e - k + f &= (r + i) - \left( \frac{3f + r}{2} \right) + (r + 2i - 2) \\
 &= 2r + 3i - 2 - \frac{3(r + 2i - 2) + r}{2} \\
 &= 2r + 3i - 2 - \frac{3r + 6i - 6 + r}{2} \\
 &= 2r + 3i - 2 - \frac{4r + 6i - 6}{2} \\
 &= 2r + 3i - 2 - (2r + 3i - 3) \\
 &= 2r + 3i - 2 - 2r - 3i + 3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Zählt man die äußere Fläche dazu, wie im Kapitel über den Eulerschen Polyedersatz erklärt, so ist die erste Richtung bewiesen.

2. *Euler*  $\implies$  *Pick*.

Laut Eulerschem Polyedersatz ( $e - k + f = 2$ ) entspricht die Fläche eines Polygons, die der Hälfte der Anzahl der elementaren Dreiecke im Polygon (also  $f$ ) entspricht, folgendem Ausdruck:

$$A(p) = \frac{f}{2} = \frac{k - e + 2}{2}$$

Den Angaben im ersten Teil dieser Beweisführung folgend, gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{f}{2} &= \frac{\left( \frac{3f+r}{2} \right) - (r+i) + 2}{2} \\
 \frac{f}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{3f+r}{2} - r - i + 2 \right) \\
 f &= \frac{3f+r-2r-2i+4}{2} \\
 2f &= 3f+r-2r-2i+4 \\
 f &= r+2i-2
 \end{aligned}$$

Aus  $A(p) = \frac{f}{2}$  folgt nun der Satz von Pick:

$$A(p) = \frac{f}{2} = \frac{r + 2i - 2}{2}$$
$$A(p) = \frac{r}{2} + i - 1.$$

□

# 7 Die Euler-Charakteristik

## 7.1 Der „erweiterte“ Eulersche Polyedersatz

Gilt der Eulersche Polyedersatz auch für die Körper in Abbildung 7.1? Diese Körper sind zwar Polyeder, aber es ist offensichtlich, dass sie nicht konvex sind. Deswegen ist die Voraussetzung für den Eulerschen Polyedersatz nicht erfüllt. Für den Körper in Abbildung 7.1 auf der linken Seite gilt:  $e = 16$ ,  $k = 32$  und  $f = 16$ . Also gilt:

$$e - k + f = 16 - 32 + 16 = 0 \neq 2$$

Für den Körper in Abbildung 7.1 auf der rechten Seite gilt:  $e = 24$ ,  $k = 56$  und  $f = 30$ . Also gilt:

$$e - k + f = 24 - 56 + 30 = -2 \neq 2$$

Offensichtlich gilt der Eulersche Polyedersatz für nicht konvexe Polyeder nicht.

**Definition 7.1.1.** Ein **Loch** in einem mathematischen Objekt, zum Beispiel einem Körper oder Polyeder, ist eine Struktur, die verhindert, dass das Objekt zu einem einzigen Punkt kontinuierlich zusammengezogen werden kann.

Die Vorstellung dahinter ist folgende: man wähle einen beliebigen Punkt im mathematischen Objekt und betrachte alle möglichen Wege in diesem Objekt von diesem Punkt aus. In Abbildung 7.2 ist der beliebige Punkt mit  $x$  gekennzeichnet und zwei mögliche Wege  $a$  und  $b$  sind eingezeichnet. Ein möglicher Weg ist der Nullweg, der nur aus dem Punkt an sich besteht. Alle möglichen Wege sind deformierbar. Jene Wege, die sich so deformieren lassen, dass sie sich auf den gegebenen Punkt zusammenziehen lassen und somit in den Nullweg deformieren lassen, bilden eine gewisse Klasse von Wegen, wie der Weg  $a$  in Abbildung 7.2. Existieren im mathematischen

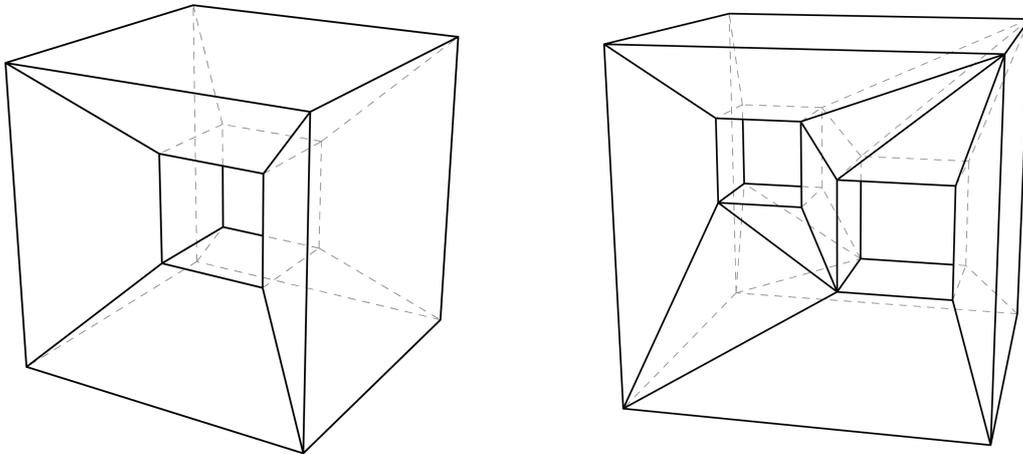


Abbildung 7.1: Zwei Polyeder mit Löchern und Euler-Charakteristik 0 (links) und -2 (rechts)

Objekt jedoch Wege, die sich nicht in diesen Nullweg deformieren lassen und also nicht in diesen gegebenen Punkt zusammenziehen lassen, wie der Weg  $b$ , so hat das Objekt ein Loch.

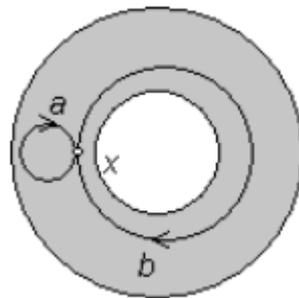


Abbildung 7.2: Definition des Lochs in der Mathematik (Zugriff am 27.12.2020 unter <https://www.sws.bfh.ch/~fischli/articles/loch/>)

Der Schweizer Mathematiker Simon Lhuillier (1750-1840) entdeckte im Jahre 1813, dass der Eulersche Polyedersatz auch auf Körper mit  $n$  Löchern angewendet werden kann (Brueckler 2018). Er fand die Formel  $e - k + f = 2 - 2n$ , die oft auch „erweiterter“ Eulerscher Polyedersatz bezeichnet wird - aber Achtung - manchmal

wird auch der Eulersche Polyedersatz in  $n$  Dimensionen als „erweiterter“ Eulerscher Polyedersatz bezeichnet.

Lhuillier entdeckte hiermit die erste topologische Invariante in der Geschichte: die Anzahl der „Löcher“ eines mathematischen Objekts (Brueckler 2018). Damit besteht zum Beispiel die Möglichkeit, formal und numerisch den Unterschied zwischen einer Kugel und einem Torus zu beschreiben.

**Definition 7.1.2.** Die Zahl  $\chi = 2 - 2n$  wird **Euler-Charakteristik** eines Körpers mit  $n$  Löchern genannt und wird mit dem Buchstaben  $\chi$  gekennzeichnet. Weiters gilt für ein Polyeder  $\chi = e - k + f$ .

**Beispiel 7.1.3.** Der erste Körper in Abbildung 7.1 hat ein Loch, also Euler-Charakteristik  $\chi = 2 - 2 \cdot 1 = 0$  und der zweite zwei Löcher und Euler-Charakteristik  $\chi = 2 - 2 \cdot 2 = -2$ . Eine Kugel hat zum Beispiel Euler-Charakteristik  $\chi = 2$ , ein Torus  $\chi = 0$  und ein Torus mit 2 Löchern  $\chi = -2$ . Setzt man alle Größen in die Gleichung  $e - k + f = 2 - 2n$  ein, so erkennt man die Gültigkeit dieser Formel in diesen Einzelfällen.

**Satz 7.1.4.** Seien  $e$  die Anzahl der Ecken,  $k$  die Anzahl der Kanten und  $f$  die Anzahl der Flächen eines Polyeders, das nicht unbedingt konvex sein muss und  $n$  Löcher hat. Der „erweiterte“ Eulersche Polyedersatz lautet dann:

$$e - k + f = 2 - 2n$$

*Bemerkung 7.1.5.* Nun wurde der Eulersche Polyedersatz so umformuliert, dass er auch für die Körper in Abbildung 7.1 gilt. Für den Körper links mit einem Loch gilt:

$$e - k + f = 16 - 32 + 16 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

und für den Körper rechts:

$$e - k + f = 24 - 56 + 30 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

## 7.2 Der „erweiterte“ Satz von Pick

Zur Erinnerung besagt der Satz von Pick, dass der Flächeninhalt eines Polygons  $p$  der Ebene mit ganzzahligen Eckpunkten  $A(p) = \frac{r}{2} + i - 1$  beträgt, wobei  $r$  die Anzahl der Eckpunkte auf dem Rand des Polygons und  $i$  jener innerhalb des Polygons bezeichnet. Diese Formel gilt jedoch nicht für Polygone mit Löchern, wie für jenes in Abbildung 7.3. Denn für dieses gilt:

$$\begin{aligned} r &= 20, \\ i &= 2, \\ A &= 13. \end{aligned}$$

Der Satz von Pick ist nicht gültig, denn  $13 \neq \frac{20}{2} + 2 - 1$ . Es gilt aber der „erweiterte“ Satz von Pick für ein Polygon  $p$  mit  $n$  Löchern:

$$A(p) = \frac{r}{2} + i - 1 + n$$

Für die Figur in Abbildung 7.3 mit 2 Löchern gilt  $A(p) = \frac{20}{2} + 2 - 1 + 2 = 13$ .

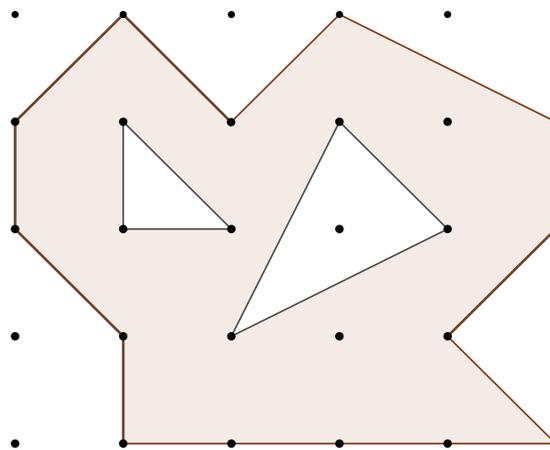


Abbildung 7.3: Der „erweiterte“ Satz von Pick für Polygone mit Löchern:

$$A(p) = \frac{r}{2} + i - 1 + n = \frac{20}{2} + 2 - 1 + 2 = 13$$

# 8 Der Eulersche Polyedersatz im Schulunterricht

## 8.1 Lehrplanbezug

Der Eulersche Polyedersatz kommt an sich weder in den Südtiroler Rahmenrichtlinien noch im österreichischen Lehrplan vor. Klar und deutlich steht in diesen aber die Auseinandersetzung mit dreidimensionalen Körpern und die Entwicklung der Raumvorstellung der Jugendlichen. Im Rahmen dieser Besprechung von dreidimensionalen Gebilden kann die Lehrperson durchaus den Eulerschen Polyedersatz ansprechen, da dieser deren Eigenschaften beschreibt und typische Körper charakterisiert.

**Südtirol** In den Südtiroler Rahmenrichtlinien steht (Deutsches Schulamt 2009):

### Kompetenzziele am Ende der Mittelschule

Die Schülerin, der Schüler kann

- ...
- geometrische Objekte der Ebene und des Raumes und geometrische Beziehungen beschreiben und klassifizieren
- ...

In der dritten Klasse an Südtiroler Mittelschulen werden folgende Argumente behandelt (Deutsches Schulamt 2009):

### 3. Klasse Mittelschule

Ebene und Raum

*Fertigkeiten und Fähigkeiten:* Körper skizzieren, Netze zeichnen, Oberfläche und Volumen berechnen

*Kenntnisse:* Körper und ihre Eigenschaften, Oberflächen- und Volumenberechnung

In den Rahmenrichtlinien für Südtiroler Oberschulen steht in dieser Hinsicht sehr wenig. Da der Eulersche Polyedersatz aber mit vielen mathematischen Themen verbunden werden kann und in etlichen anderen Themenbereichen indirekt vorkommt, ist es wünschenswert, dass dieser so grundlegende und „schöne“ Satz auch in den Oberschulen unterrichtet wird.

**Österreich** In Österreich ist die Situation ähnlich wie in Südtirol: der Eulersche Polyedersatz kommt nicht explizit in den Lehrplänen vor. Es gibt aber durchaus Möglichkeiten, den Satz in Zusammenhang mit Argumenten aus den Lehrplänen zu bringen. Im Lehrplan der AHS-Unterstufe steht eben folgendes (BBWF 2018):

#### Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte

*Geometrie:*

Mit grundlegenden geometrischen Objekten und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut werden, zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können, räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können, geeignete Sachverhalte geometrisch darstellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten können.

Außerdem stehen im Lehrplan folgende ausgewählte mathematische Grundtätigkeiten, die im Laufe der Schulkarriere zu entwickeln sind. Es wird nur eine Auswahl angegeben, die durch die Auseinandersetzung mit dem Eulerschen Polyedersatz gefördert werden können (BBWF 2018):

**Produktives geistiges Arbeiten, insbesondere:**

- Kombinieren vertrauter Methoden;
- Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen, mathematischen Objekten;
- Anwenden bekannter Verfahren, auch in teilweise neuartigen Situationen;
- Abstrahieren und Konkretisieren;
- Verallgemeinern und Spezialisieren.

**Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere:**

- Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln;
- Begründen (Beweisen);
- Arbeiten mit logischen Schlussweisen;

**Kritisches Denken, insbesondere:**

- Überprüfen von Vermutungen;
- Überprüfen von Ergebnissen;
- Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle;
- Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen;
- Überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen;
- Überlegen der Bedeutung des Mathematikunterrichts für die eigene Person.

**Darstellen und Interpretieren, insbesondere:**

- Verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten;
- Geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten;
- Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen;
- Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte.

Außerdem finden sich weitere Angaben im Lehrplan, die mit dem ganzen Themenbereich rund um den Eulerschen Polyedersatz und seine Anwendungen vernetzt

werden können. Polyeder können, wie in dieser Arbeit mehrmals erwähnt, auch computergestützt dargestellt werden. Und einer der didaktischen Grundsätze des Lehrplans enthält das „Lernen mit technologischer Unterstützung“. Weiters lässt sich auch im Fach *Geometrisches Zeichnen* der Eulersche Polyedersatz besprechen, denn im Lehrplan steht klar und deutlich (BBWF 2018):

Erkennen räumlicher Zusammenhänge

## 8.2 Beweisen vs. Entdecken

Bei der Behandlung des Eulerschen Polyedersatzes und anderen grundlegenden Sätzen der Mathematik geht es an der Universität hauptsächlich darum, den Satz zu beweisen. Zuvor werden die notwendigen Begriffe definiert und Lemmas bzw. Propositionen bewiesen. Darauf folgt der Satz mit Beweis und anschließenden Korollaren. Im Schulunterricht wird ein anderes Vorgehen verfolgt. Die Lehrenden haben die Aufgabe, allen Schülerinnen und Schülern Mathematik beizubringen. Es ist wichtig, dass alle Beteiligten aus dem Unterricht einen Nutzen ziehen und die Inhalte verinnerlichen. Deswegen ist die Lehrperson gefragt, einen spannenden Unterricht zu gestalten und besonders im Fach Mathematik die Lernenden zu motivieren und sie auf ihrem fachlichen Werdegang zu begleiten. Bei der Behandlung von wichtigen Sätzen in der Schule ist die Lehrperson aufgefordert, sich im Vornherein die Abwicklung dieser Unterrichtseinheiten genau zu überlegen. Was will ich als Lehrperson erreichen? Wie bringen ich meinen Schülerinnen und Schülern diese Regel so bei, dass sie diese anwenden und für lange Zeit verinnerlicht haben? Der Schlüssel zum Erfolg liegt darin, dass die Lernenden die Regel verstehen und die Gültigkeit des Satzes begreifen müssen. Also geht es auch in der Schule darum, den Satz zu beweisen, zu begründen, zu zeigen, aber sicherlich auf eine andere Art und Weise als an der Universität.

Im mathematischen Alltag, auch im Schulunterricht, ist das Beweisen ständig vorhanden. Bruder et al. definieren einen mathematischen Beweis als „die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln.“ (Bruder et al. 2015, S. 331). Auch im österrei-

chischen Lehrplan der AHS-Oberstufe findet man einen deutlichen Hinweis auf das Beweisen und Begründen. Es wird angegeben, dass die mathematische Kompetenz unter anderem folgende Fertigkeiten und Fähigkeiten erfordert: „Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs“ (BBWF 2018). Eine Aufgabe der Lehrperson besteht darin, zu wissen, welche Argumentationen und Deduktionen in welcher Situation und in welcher Schulstufe dem Verständnis der Schülerinnen und Schüler entsprechen. De Villiers fasst die Rolle des Beweizens in der Schule in fünf Punkten zusammen (De Villiers 1990, S. 17):

1. Beweisen, um zu überzeugen
2. Beweisen, um zu erklären
3. Beweisen, um Zusammenhänge herzustellen
4. Beweisen, um neue Resultate zu entdecken
5. Beweisen, um zu kommunizieren

Auch Weigand et al. (2018, S.23) geben die Funktionen des Beweizens an. Laut ihm hat eine Beweisführung in der Schule folgende Funktionen: Verifizierung, Erklärung, Einordnung und Systematik, Kommunikation, Exploration und Entdeckung.

Hauptsächlich in der Geometrie spielt das Beweisen im Schulunterricht eine wichtige Rolle. Schülerinnen und Schüler können durch überlegtes Beweisen argumentieren lernen. Sie hinterfragen kritisch ihre Aussagen und folgen einem deduktiven, logischen Verlauf um zur gewünschten Aussage zu kommen. Folgende zentrale Aspekte für Beweise in der Geometrie spielen eine wichtige Rolle (Ufer et al. 2009):

1. *Beweisform*: Jeder Teilschritt muss begründbar sein.
2. *Beweiskette*: Alle Schritte in einem Beweis müssen deduktiv herleitbar sein.
3. *Beweisstruktur*: Die Beweisführung beginnt bei den Voraussetzungen und endet mit der zu beweisenden Aussage.

Gerwig (2015, S. 207) ist jedoch der Meinung, dass es im Unterricht „methodisch sehr ungeschickt ist, mehrere Beweise, Schritt für Schritt, in der Schule zu analysieren“. Vielmehr, meint er, könnte ein paralleles Erarbeiten verschiedener Beweise in Gruppen deutlich lehrreicher und zielführender sein. Die anschließende Präsentation jeder Gruppe in der Klasse schließt die Unterrichtseinheit ab. Mit einem solchen methodischen Vorgehen können die Beweisführungen viel mehr ihre Ziele und Zwecke bzw. ihre Funktionen, die gerade eben genannt wurden, erfüllen (Gerwig 2015, S. 207).

In der Schule ist es sinnvoll, den Eulerschen Polyedersatz als „Beweis“ entdecken zu lassen. Es folgt ein Beispiel, wie eine oder mehrere solcher Unterrichtsstunden ablaufen können. Selbstverständlich kann vielleicht in höheren Schulstufen oder in Leistungsgruppen, falls solche vorgesehen sind, auch der erste in dieser Arbeit diskutierte Beweis gebracht werden. Es geht um eine vollständige strukturelle Induktion: wird diese Schritt für Schritt, logisch und deduktiv besprochen, so liegt es nahe, dass die Lernenden dem Vorgehen folgen können.

„Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist.“, schrieb Polya (1962, S. 10). Dabei geht es um ein induktives Vorgehen, bei dem man anfangs durch verschiedene Berechnungen, Messungen, Zählungen oder einfach durch Probieren eine Vermutung erhält, die aber noch kein allgemein gültiger Satz ist. Durch ein solches Vorgehen kann aber Schülerinnen und Schülern gezeigt werden, dass diese Regel immer wieder gilt, also immer gültig ist. Sie selbst haben diese Regel hergeleitet und haben sie entdeckt, sie haben also eine Art Beweis geführt. In dieser Hinsicht kann dann vernachlässigt werden, dass mit dieser Beweisführung der Satz nicht allgemein gültig sein kann. In den Augen der meisten Schülerinnen und Schüler ist der Satz gültig und damit das Ziel der Lehrperson erreicht.

In diesem Zusammenhang ist ein Gespräch auf Seite 20 in Berendonk (2014) von Interesse. Es handelt sich dabei um ein Dialog zwischen einem Lehrer und vier Schülern, die genau darüber diskutieren, also um die Entdeckung und den Beweis von Sätzen in der Schule. Diese vier Schüler entdecken in diesem Gespräch mithilfe des Lehrers den Zusammenhang  $E - K + F = 2$  ohne Ecken, Kanten oder Flächen

numerisch zu zählen.

Im folgenden Abschnitt wird eine fiktive Unterrichtseinheit beschrieben, in der es darum geht, die Schülerinnen und Schüler zum Eulerschen Polyedersatz hinzuführen. Sie sollen das Gefühl haben, die Regel entdeckt zu haben. Im Kapitel 8.3 wird eine weiterführende Unterrichtseinheit besprochen mit dem Hinweis für die Lernenden, dass *ihr* Satz allerdings nicht immer gültig ist, aber nochmals verbesserbar ist.

### 8.2.1 Einführung des Eulerschen Polyedersatzes in der Schule

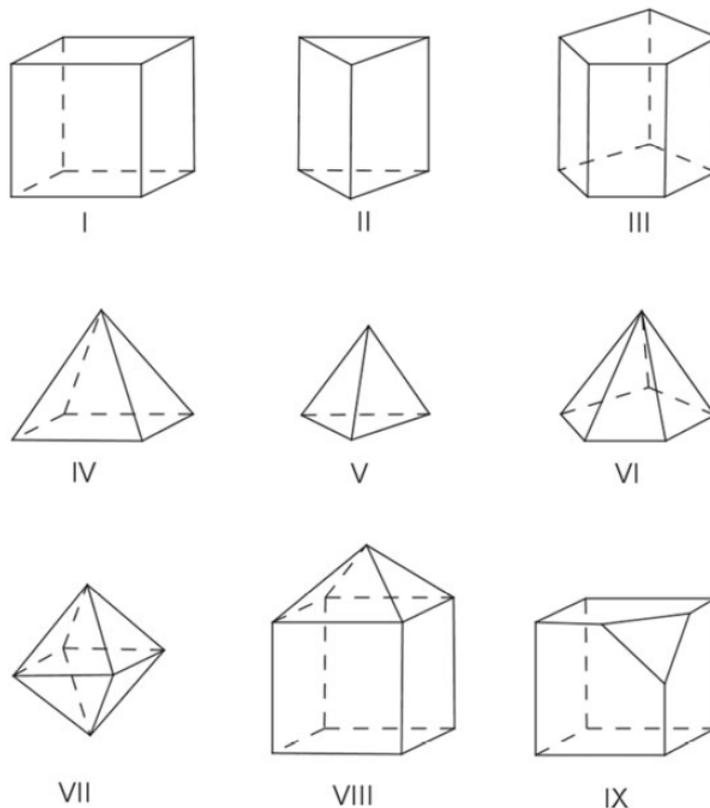


Abbildung 8.1: Konvexe Polyeder (Berendonk 2014, S.10)

Wie im vorigen Abschnitt erklärt, besteht das Ziel dieser Stunde darin, den Eulerschen Polyedersatz entdecken zu lassen. Die Schülerinnen und Schüler zählen Ecken,

Kanten und Flächen von verschiedenen konvexen Polyedern und sollen Gesetzmäßigkeiten erkennen. Als Grundlage dient das Arbeitsblatt in Abbildung 8.1 mit mehreren solcher Körpern. Noch besser ist es selbstverständlich die dreidimensionalen Körper in Holz oder einem anderen Material zu zeigen, damit die Lernenden direkt am Polyeder zählen können. Sie können in einem anderen Fach auch Polyeder mit Karton und Kleber konstruieren, um sie dann im Mathematikunterricht unter die Lupe zu nehmen. Dazu wird den Schülerinnen und Schülern die leere Tabelle 8.1 ausgehändigt, in der lediglich die Namen der dargestellten Polyeder aufgelistet sind. Die Lernenden zählen Ecken, Kanten und Flächen und tragen die Anzahl in die Tabelle ein. Anschließend kann die Spalte  $F + E - K$  hinzugefügt werden, wie in Tabelle 8.3 dargestellt. Während die Schülerinnen und Schüler die ersten Zeilen berechnen, kann die Lehrperson auch bereits die Lösungen andeuten, damit die Lernenden erkennen, dass diese Zahl berechenbar ist und dadurch mehr dahinter stecken muss. Die Lehrperson kann dies auch so handhaben, dass sie direkt die Zahl  $F + E - K$  für jeden Körper ausrechnen lässt und somit überraschen kann, weil sie bereits im Voraus die Zahl kennt und die Schülerinnen und Schüler damit beeindrucken kann: so wächst in den Köpfen der Lernenden Neugierde und der Wille, den Trick bzw. die Regel der Lehrperson wissen zu wollen. Erreicht man als Lehrender diesen Punkt des Wissen-Wollens, so hat man *gewonnen*.

Tabelle 8.1: Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Darstellungen der Polyeder in Abbildung 8.1, oder, noch besser, die Körper an sich, und diese auszufüllende Tabelle (Berendonk 2014).

|      | <b>Polyeder</b>       | <b>Flächen (<math>F</math>)</b> | <b>Ecken (<math>E</math>)</b> | <b>Kanten (<math>K</math>)</b> |
|------|-----------------------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| I    | Würfel                |                                 |                               |                                |
| II   | dreieckiges Prisma    |                                 |                               |                                |
| III  | fünfeckiges Prisma    |                                 |                               |                                |
| IV   | quadratische Pyramide |                                 |                               |                                |
| V    | dreieckige Pyramide   |                                 |                               |                                |
| VI   | fünfeckige Pyramide   |                                 |                               |                                |
| VII  | Oktaeder              |                                 |                               |                                |
| VIII | „Turm“                |                                 |                               |                                |
| IX   | „gestutzter Würfel“   |                                 |                               |                                |

Andernfalls könnte auch eine Tabelle mit den zwei Spalten  $K - E$  und  $F$  erstellt werden, sodass erkannt werden kann, dass die Zahl  $K - E$  immer um 2 kleiner als die Zahl  $F$  ist. Die Schülerinnen und Schüler können auch selber ein konvexes Polyeder zeichnen, diesem einen Namen geben und in der Tabelle eine Zeile für ihren Körper hinzufügen.

Tabelle 8.2: Ausgefüllte Tabelle mit der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Polyeder in Abbildung 8.1.

|      | <b>Polyeder</b>       | <b>Flächen (<math>F</math>)</b> | <b>Ecken (<math>E</math>)</b> | <b>Kanten (<math>K</math>)</b> |
|------|-----------------------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| I    | Würfel                | 6                               | 8                             | 12                             |
| II   | dreieckiges Prisma    | 5                               | 6                             | 9                              |
| III  | fünfeckiges Prisma    | 7                               | 10                            | 15                             |
| IV   | quadratische Pyramide | 5                               | 5                             | 8                              |
| V    | dreieckige Pyramide   | 4                               | 4                             | 6                              |
| VI   | fünfeckige Pyramide   | 6                               | 6                             | 10                             |
| VII  | Oktaeder              | 8                               | 6                             | 12                             |
| VIII | „Turm“                | 9                               | 9                             | 16                             |
| IX   | „gestutzter Würfel“   | 7                               | 10                            | 15                             |

Tabelle 8.3: Die von den Lernenden ausgefüllte Tabelle mit der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Polyeder in Abbildung 8.1, ergänzt mit der letzten Spalte für die Erkennung der Gesetzmäßigkeit.

|      | <b>Polyeder</b>       | $F$ | $E$ | $K$ | $F + E - K =$ |
|------|-----------------------|-----|-----|-----|---------------|
| I    | Würfel                | 6   | 8   | 12  | 2             |
| II   | dreieckiges Prisma    | 5   | 6   | 9   | 2             |
| III  | fünfeckiges Prisma    | 7   | 10  | 15  | 2             |
| IV   | quadratische Pyramide | 5   | 5   | 8   | 2             |
| V    | dreieckige Pyramide   | 4   | 4   | 6   | 2             |
| VI   | fünfeckige Pyramide   | 6   | 6   | 10  | 2             |
| VII  | Oktaeder              | 8   | 6   | 12  | 2             |
| VIII | „Turm“                | 9   | 9   | 16  | 2             |
| IX   | „gestutzter Würfel“   | 7   | 10  | 15  | 2             |

**Notwendige Voraussetzungen** Für ein erfolgreiches Verständnis der Inhalte werden wenige mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Die Schülerinnen und Schüler

müssen aber eine dreidimensionale Vorstellung des Raumes verinnerlicht haben und die Darstellung dreidimensionaler Gebilde erfassen können. Eine derartige Unterrichtseinheit kann unter Umständen bereits in recht niedrigen Schulstufen erfolgen. Sinnvoll ist es aber, dass die Lernenden den Umgang mit Körpern beherrschen.

**Ziele der Unterrichtsstunde** Die Schülerinnen und Schüler erkennen eine Regelmäßigkeit im Zusammenhang zwischen Flächen, Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders. Sie entdecken den Eulerschen Polyedersatz und erkennen eine allgemeine Gültigkeit, beweisen ihn aber nicht, was aber auch nicht Ziel der Stunde ist. Sie erfahren bzw. wiederholen die Namensgebung für verschiedene Körper und nehmen ihr Aussehen beim Abzählen genau unter die Lupe.

### 8.3 Wann gilt der Satz?

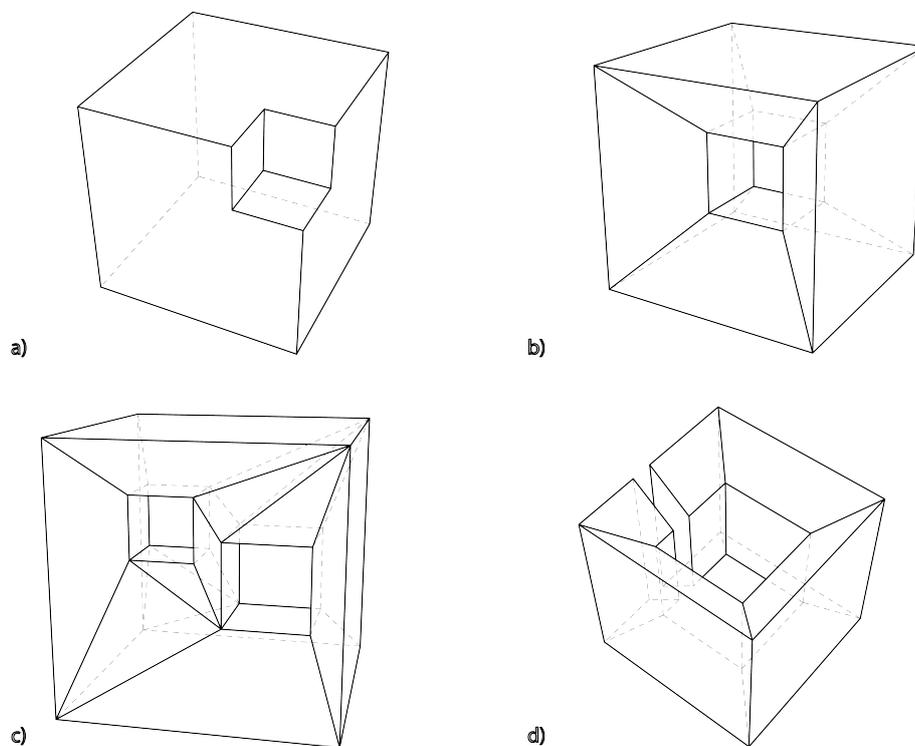


Abbildung 8.2: Nicht konvexe Polyeder

Eine weiterführende Unterrichtsstunde kann darin bestehen, die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes zu überprüfen. Das Ziel dabei ist, die Begriffe „konvex“, „nicht konvex“ bzw. „konkav“ zu verinnerlichen und die Gültigkeit des Eulerschen Polyedersatzes kritisch zu diskutieren. Die Schülerinnen und Schüler kennen bereits den Satz, sie zählten bereits die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Körper in Abbildung 8.1. Nun können ihnen weitere Körper gezeigt werden, wobei sie analog zu den vorigen vorgehen sollen. Dabei entdecken sie, dass in diesem Fall etwas nicht stimmt, etwas anders sein muss, denn der ihnen bekannte Satz gilt nicht mehr. Sie können selbstständig überlegen, was nun anders ist und eine Vermutung aufstellen. Die Lehrperson wird sie anschließend aufklären und den Begriff „konvex“ einführen. Gegebenenfalls kann in höheren Schulstufen auch der „erweiterte“

Eulersche Polyedersatz besprochen werden.

Tabelle 8.4: Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Polyeder in Abbildung 8.2.

| Polyeder | Flächen $F$ | Ecken $E$ | Kanten $K$ |
|----------|-------------|-----------|------------|
| a)       | 9           | 14        | 21         |
| b)       | 10          | 16        | 24         |
| c)       | 30          | 24        | 56         |
| d)       | 22          | 24        | 44         |

## 8.4 Fußbälle

### 1. Runde 1983, Aufgabe 1.

*Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke.*

Abbildung 8.3: Aufgabe zum Fußball als Polyeder (Specht 2020, S. 67).

Specht (2020, S. 67) präsentiert die Aufgabe in Abbildung 8.3, von der wir entnehmen können, dass der herkömmliche Fußball aus lauter Fünf- und Sechsecken besteht. Diese sind so angeordnet, dass jede Seite eines Fünfecks eine Seite eines Sechsecks berührt und umgekehrt. Die Aufgabe besteht darin, die Anzahl der Fünf- und Sechsecke zu bestimmen, sodass ein Fußball zustande kommen kann. Es handelt sich offenbar um ein Polyeder. Anzumerken ist auch, dass diese Struktur sicherlich keinen perfekten Fußball darstellt: echte Fußbälle haben eine runde Oberfläche und sind deswegen keine Polyeder. Die genannte Struktur erinnert eher an das Fulleren C60, eine bestimmte Form des Kohlenstoffs, in Abbildung 8.4 dargestellt. In der Schule ist es jedoch zu empfehlen, einen Fußball als Modell zu wählen:

Kinder bzw. Jugendliche können sich wohl meistens nichts unter einem „Fulleren“ vorstellen.

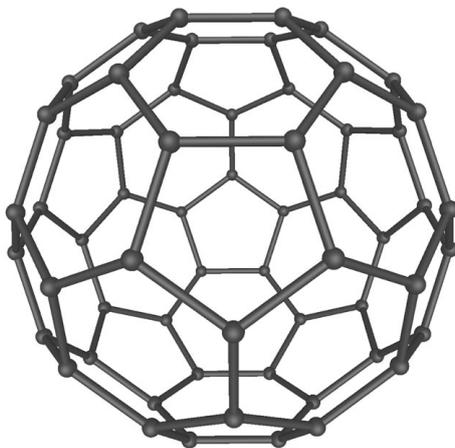


Abbildung 8.4: Fulleren C60 (Zugriff am 18.11.2020 unter <https://www.u-helmich.de/che/lexikon/F/fullerene.html>)

Zuerst wird eine mögliche Lösung der Aufgabe in Abbildung 8.3 vorgestellt und darauf werden ein paar Anwendungen dieser Aspekte und des Eulerschen Polyedersatzes besprochen. Seien in einem Fußball, der aus lauter Fünf- und Sechsecken besteht,  $F$  die Anzahl der Fünfecke,  $S$  die Anzahl der Sechsecke (also ist  $F + S$  die Anzahl aller Flächen),  $K$  die Anzahl der Kanten und  $E$  die Anzahl der Ecken. Der Körper ist ein konvexes (aber kein reguläres) Polyeder, deswegen gilt der Eulersche Polyedersatz:

$$E + \underbrace{F + S}_{\text{Flächenanzahl}} = K + 2$$

Des weiteren gilt, dass jedes Fünfeck an fünf Sechsecke grenzt, wie in der Angabe beschrieben. Hingegen berührt jedes Sechseck an drei Kanten ein Fünfeck und an den anderen drei Kanten ein Sechseck. Deswegen werden jeweils die fünf Kanten zwischen Fünf- und Sechseck und jeweils drei Kanten zwischen Sechseck und Sechseck doppelt gezählt. Dies ergibt den Zusammenhang

$$5 \cdot F = 3 \cdot S$$

Werden alle Kanten aufgezählt, sind dies  $5F + 6S$  Kanten, da jedes Fünfeck fünf und

jedes Sechseck sechs Kanten besitzt. Aber Achtung: hier wird jede Kante doppelt gezählt. Darum gilt

$$2K = 5F + 6S$$

Wie sieht es nun mit der Anzahl der Ecken  $E$  aus? Mindestens drei Kanten treffen sich in jeder Ecke des Polyeders. Die Kanten werden aber wieder doppelt gezählt, weil jede Kante in ihren beiden Endpunkten mitgezählt wird, also in zwei Ecken. Somit ist

$$2K \geq 3E.$$

Die vier aufgestellten Gleichungen bilden ein Ungleichungssystem mit vier Unbekannten, das die Lernenden ab der 9. oder 10. Schulstufe selbstständig lösen können. An dieser Stelle wird die Aufgabe nicht explizit gelöst. Nach zweimaliger, geschickter Substitution, wie zum Beispiel Specht (2020) vorschlägt, erhält man

$$29K = 45(E - 2)$$

$K$  und  $E$  sind natürliche Zahlen, also muss  $K$  ein Vielfaches von 45 sein. Setzt man  $E = \frac{29}{45}K + 2$  in die Ungleichung  $2K \geq 3E$  ein, erhält man die Bedingung  $K \geq 90$ . Die Zahl 90 ist ein Vielfaches von 45 und deswegen ist diese Zahl eine Lösung für  $K$ , und zwar die kleinste Lösung. Dementsprechend erhält man für den Fußball:

$$\begin{aligned} K &= 90, \\ E &= 60, \\ F &= 12 \text{ und} \\ S &= 20. \end{aligned}$$

Die nächstgrößere Lösung ist  $K = 135$ ,  $E = 89$ ,  $F = 18$  und  $S = 30$ . Es gibt unendlich viele Lösungen, jedoch ist ersichtlich, dass der Fußball aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken besteht. Es handelt sich somit um einen Ikosaederstumpf.

*Bemerkung 8.4.1.* Mit dem besprochenen Zugang zur Anzahl von Flächen, Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders und mit dem weiteren Zusammenhang  $2K \geq 3F$  können, gegebenenfalls auch im Schulunterricht, weitere Polyeder und insbesondere platonische und archimedische Körper charakterisiert werden. Weiterhin

können demnach zum Beispiel folgende Aussagen bewiesen werden, die seit Eulers Zeiten bekannt sind (Specht 2020):

- (1) Es gibt kein konvexes Polyeder mit genau sieben Kanten
- (2) Es gibt keine konvexe Polyeder mit ausschließlich Sechsecken als Seitenflächen

Weitere Eigenschaften, Folgerungen und Bemerkungen finden sich in Specht (2020).

*Beweis.* (1) Aus  $K = 7$  folgt aus den genannten Bedingungen eine Absurdität, weil die Aussagen dem Eulerschen Polyedersatz widersprechen. (2) Analog zum Vorigen: Widerspruch zum Eulerschen Polyedersatz. □

## 8.5 Emil kann fischen

In der Literatur finden sich immer wieder Tipps für Schülerinnen und Schüler, sogenannte Eselsbrücken und andere Vorschläge für die Verinnerlichung von mathematischen Regeln. Hier werden nur kurz zwei Möglichkeiten nach Müller (2019) vorgestellt, um sich den Eulerschen Polyedersatz zu merken:

Erstens können die vorkommenden Größen nach aufsteigender Dimension angeordnet werden: man beginnt mit den Ecken der Dimension 0, die Kanten haben Dimension 1 und schließlich die Flächen Dimension 2. Die Vorzeichen wechseln sich ab, beginnend mit einem Plus. Somit lässt sich leicht die linke Seite der Gleichung rekonstruieren:  $e - f + k$ . Der Rest der Formel muss aber dann noch ergänzt werden.

Eine andere Art, um sich den Satz merken zu können, ist der Hilfssatz „Emil kann fischen“, und zwar wie folgt (Müller 2019):

$$\underbrace{E}_{\text{Ecken}} \underbrace{-}_{\text{minus}} \underbrace{mi}_{\text{Kanten}} \underbrace{l}_{\text{Flächen}} \text{ ann } \underbrace{f}_{\text{Flächen}} \text{ ischen}$$

Der Satz kann auch noch zu „Emil kann fischen, gleich zwei Mal“ erweitert werden, sodass auch das Wort *gleich* für das Gleichheitszeichen und die Zahl 2 vorkommt, sodass die Formel komplett ist.

Natürlich können Mathematikerinnen und Mathematiker, Schülerinnen und Schüler auch einfach einen Würfel skizzieren und Ecken, Kanten und Flächen abzählen. So bleibt nur noch das Minus geschickt an die richtige Stelle einzufügen und der Eulersche Polyedersatz ist vollständig.

Teilweise wird von solchen Merksätzen oder anderen *billigen* Methoden in der Mathematik abgeraten, da die Gefahr besteht, mathematische Objekte zu verwechseln oder ihre Bedeutung nicht zu erkennen. Sie können aber trotzdem kurz angesprochen werden, um eine Hilfsstellung zu geben.

## 8.6 Die fünf platonischen Körper

Zur Erinnerung: Platonische Körper sind dreidimensionale Körper, die aus identen, regelmäßigen Seitenflächen zusammengesetzt sind und bei denen sich in jeder Ecke gleich viele Kanten treffen. Im Schulunterricht können im Zusammenhang mit den platonischen Körpern viele Aspekte der Geometrie besprochen und intensiviert werden. Es gibt fünf und genau nur fünf platonische Körper, wie bereits an anderer Stelle in dieser Arbeit gezeigt wurde. Diese fünf werden in Abbildung 8.5 dargestellt.

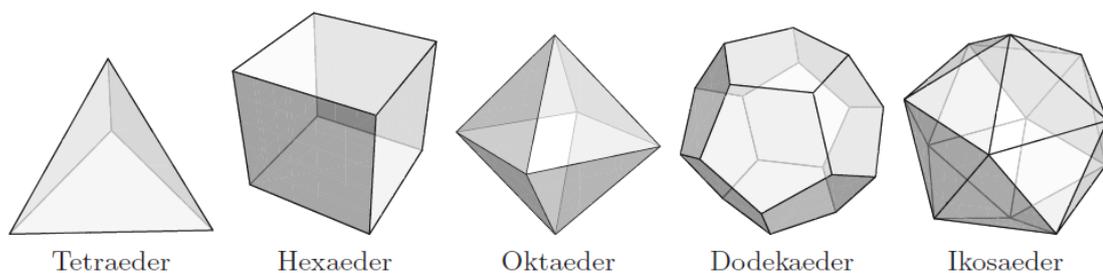


Abbildung 8.5: Die fünf platonischen Körper (Engel 2019, S. 137)

Es folgen ein paar Beispiel für verschiedene Anwendungen, die im Rahmen einer Unterrichtseinheit zu den platonische Körpern besprochen werden können.

### 8.6.1 Es gibt fünf platonische Körper

Schülerinnen und Schüler entdecken zunächst den Eulerschen Polyedersatz. Sie verstehen, dass der Zusammenhang zwischen Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen nur für konvexe Polyeder gilt. Daraufhin kann versucht werden, konvexe Polyeder zu klassifizieren: es gibt unendlich viele, aber man kann durchaus Klassen erkennen, die bestimmte Eigenschaften haben, wie zum Beispiel Pyramiden oder Prismen. Nun gilt es aber herauszufinden, wie viele der Polyeder aus identen, regelmäßigen Seitenflächen zusammengesetzt sind. Die Schülerinnen und Schüler überlegen genau und raten. Sie sollen neugierig gemacht werden. Nach einer angeregten Diskussion wird das Rätsel von Seiten der Lehrperson aufgelöst. Mit ein paar geometrischen Überlegungen kann gezeigt werden, dass nur fünf platonische Körper existieren.

**Satz 8.6.1.** *Es gibt genau fünf und nur fünf platonische Körper.*

*Beweis.* Dieser überschaubare Beweis für den Schulunterricht besteht darin zu zeigen, dass nur eine gewisse Anzahl an regelmäßigen Flächen und zwar Dreiecken, Quadraten oder Fünfecken möglich ist, um eine dreidimensionale Ecke eines Polyeders zu bilden. Bereits Euklid hat diese Ideenführung verwendet.

Fangen wir mit der regelmäßigen Fläche mit der kleinsten Anzahl an Winkeln an, also mit Dreiecken, genau wie in Abbildung 8.6 dargestellt: mit zwei Dreiecken ist es nicht möglich, eine dreidimensionale Ecke eines Polyeders zu bilden. Deswegen brauchen wir mindestens drei Dreiecke um eine Ecke zu bilden. Auch mit vier und fünf Dreiecken ist es möglich, eine Ecke zu bilden. Sechs Dreiecke bilden zusammen bereits  $360^\circ$ , sind also in einer Ebene und bilden keine dreidimensionale Ecke.

Weiterhin lassen sich nur drei Quadrate in einer Ecke anordnen, bei einem vierten liegen sie wiederum in einer Ebene, weil vier rechte Winkel ebenfalls  $360^\circ$  ergeben, siehe Abbildung 8.6. Wir können außerdem nur drei Fünfecke aneinander ordnen: bei einem vierten überschreiten wir den vollen Winkel von  $360^\circ$ . Sechsecke können wir nicht in einer Ecke anordnen, denn jedes Sechseck hat sechs Winkel zu je  $120^\circ$  und bereits drei von denen die kritische Grenze von  $360^\circ$  erreichen.

In diesen letzten Absätzen haben wir somit gezeigt, dass es nur fünf Möglichkeiten gibt, diese regelmäßige Flächen in einer Ecke eines Polyeders anzuordnen: es gibt eben genau nur diese fünf platonischen Körper.

□

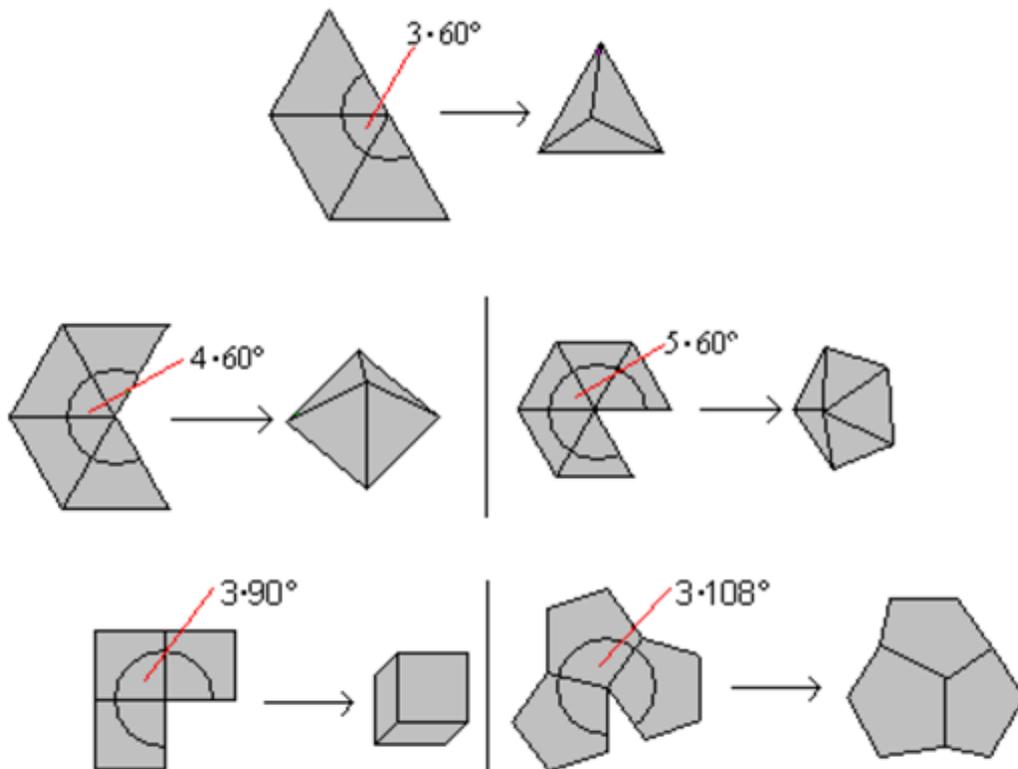


Abbildung 8.6: Beweis, dass es nur fünf platonische Körper gibt. Von oben nach unten, links nach rechts: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel bzw. Hexaeder und Dodekaeder (Zugriff am 04.01.2021 unter <http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm>).

In höheren Schulstufen kann der Beweis auch mit dem Eulerschen Polyedersatz erbracht werden, der in dieser Arbeit in Kapitel 4 genau beschrieben wird.

### 8.6.2 Dualität

Im Schulunterricht kann in diesem Rahmen auch über Dualität gesprochen werden. Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Körpers so erhält man die Eckpunkte des dualen Körpers.

**Satz 8.6.2.** *Die dualen Körper der platonischen Körper sind wieder platonische Körper.*

*Beweis.* • *Tetraeder:* Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seitenflächen miteinander, so entsteht aus einem Tetraeder wieder ein Tetraeder. Man sagt, ein Tetraeder ist *dual* zu sich selbst.

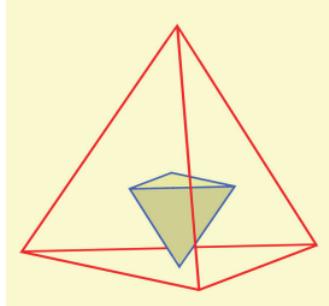


Abbildung 8.7: Das Tetraeder ist dual zu sich selbst (Berger 2016, S. 82).

- *Würfel:* Ein Würfel hat sechs Seitenflächen, also sechs Mittelpunkte der Seitenflächen. Verbindet man diese erhält man ein Oktaeder, siehe Abbildung 8.7.
- *Oktaeder:* Ein Oktaeder hat acht Seitenflächen, also acht Mittelpunkte der Seitenflächen. Verbindet man diese erhält man den Würfel. Man sagt, Würfel und Oktaeder bilden ein *duales Paar* (Abbildung 8.8).

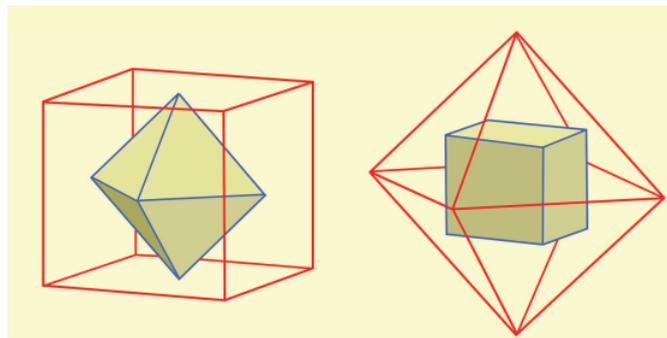


Abbildung 8.8: Würfel und Oktaeder bilden ein duales Paar (Berger 2016, S. 82).

- *Dodekaeder:* Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seitenflächen eines Dodekaeders miteinander, so erhält man ein Ikosaeder.

- *Ikosaeder*: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seitenflächen eines Ikosaeders miteinander, so erhält man ein Dodekaeder. Für eine bessere Vorstellung wird dieses duale Paar in Abbildung 8.9 gezeigt.

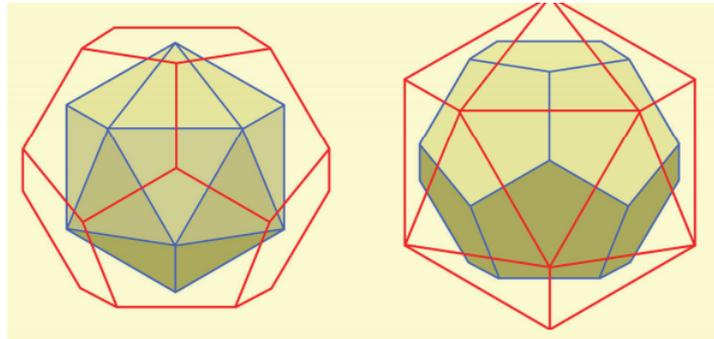


Abbildung 8.9: Dodekaeder und Ikosaeder bilden ein duales Paar (Berger 2016, S. 82).

□

Im Schulunterricht ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler selbst die dualen Körper zeichnen zu lassen. Das bietet eine hervorragenden Möglichkeit für einen differenzierten Unterricht. Die Lernenden können selbst die Schwierigkeit wählen und dementsprechend einen platonischen Körper auswählen und konstruieren. Nach der händischen Ausarbeitung werden technologische Hilfsmittel zur Veranschaulichung in Betracht gezogen, zum Beispiel bietet die Homepage [http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/morph\\_.htm](http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/morph_.htm) klare, dreidimensionale Darstellungen, wie ein Körper in seinen dualen Körper übergeht. Ein weiterer möglicher Einsatz im Schulunterricht besteht darin, die platonischen Körper in verschiedenen Projektionen oder Perspektiven zu zeichnen.

*Bemerkung 8.6.3.* Aigner und Ziegler (2004) beweisen den Eulerschen Polyedersatz mithilfe von Dualgraphen und ihren Kantenmengen. Es sei auf ihr Buch „Proofs from THE BOOK“ verwiesen.

**Aufgabe** Erkläre/Berechne den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Kanten eines Körpers und seinem dualen Körper, jenen zwischen der respektiven Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen.

### 8.6.3 Archimedische Körper

**Definition 8.6.4.** Ein weiterer interessanter Aspekt in dieser Hinsicht sind die Archimedischen Körper. Ein konvexes Polyeder ist ein **Archimedischer Körper**, falls es kein platonischer Körper ist, alle Seitenflächen regelmäßige Vielecke sind und in jeder Ecke des Körpers die gleiche Anzahl des jeweiligen Vielecks zusammentrifft.

**Satz 8.6.5.** *Es gibt genau dreizehn Archimedische Körper.*

*Beweis.* Auf den Beweis wird in dieser Arbeit verzichtet. Der Beweis kann aber ähnlich mithilfe der möglichen Vielecke, die in einer Ecke eines dreidimensionalen Polyeders zusammentreffen können, geführt werden. Im Netz finden sich mehrere Beweisideen, zum Beispiel unter <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archimedische.html> und <https://www.math.uni-kiel.de/geometrie/klein/mpss15/mo1506.pdf>. □

Im Schulunterricht kann darüber gesprochen werden, wie die Archimedischen Körper aufgebaut sind. Zudem können im Sinne eines differenzierten Unterrichts archimedische Körper mit Lineal, Zirkel und Geodreieck konstruiert werden. Es gibt nämlich für jeden Schwierigkeitsgrad den passenden Körper. Technologieeinsatz ist zudem stets sinnvoll!

### 8.6.4 Oberfläche und Volumen

Jeder platonische Körper besteht aus identen, regelmäßigen Seitenflächen. Das heißt, dass die Kantenlängen ebenfalls gleich lang sein müssen. Sei die Kantenlänge eines platonischen Körpers gegeben, kann somit seine Oberfläche und sein Volumen berechnet werden. Bei einem Quadrat sind die beiden Größen rasch berechnet, bei dem einen oder anderen bedarf es an einigen Berechnungen. An dieser Stelle werden beispielhaft die Berechnungen für ein Ikosaeder erklärt, das, zur Erinnerung, so aussieht:

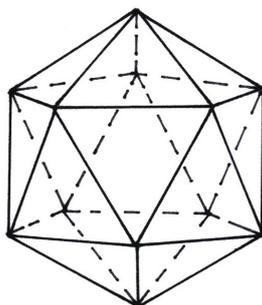


Abbildung 8.10: Ikosaeder (Zugriff am 10.12.2020 unter <https://www.grah.ch/kompetenzen/konzeption-standardapplikation/ikosaeder/>).

**Satz 8.6.6.** Sei  $a$  die Kantenlänge eines Ikosaeders. Für seine Oberfläche  $O$  und sein Volumen  $V$  gilt:

$$O = 5a^2\sqrt{3} \quad \text{und} \quad V = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5}).$$

*Beweis.* 1. Die Oberfläche eines Ikosaeders besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge  $a$ . Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $a$  beträgt  $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ , was aus dem Satz des Pythagoras folgt. Ein gleichseitiges Dreieck hat somit den Flächeninhalt  $a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ . Die ganze Oberfläche besteht aus 20 identen Dreiecken und somit gilt:

$$O = 20 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3} \tag{8.1}$$

2. Das Ikosaeder ist aus 20 Pyramiden zusammengesetzt, die jeweils eine Seitenfläche des Ikosaeders als Grundfläche haben. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks beträgt  $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ , wie im vorigen Absatz berechnet. Die Höhe einer solchen Pyramide bleibt zu berechnen. Wie in Abbildung 8.12 dargestellt, ist die Höhe dieser Pyramide genau die Strecke  $\overline{MF}$ , also  $\rho$ . Da  $F$  der Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt einer Seitenfläche ist, ist die Strecke  $y := \overline{EF}$  ein Drittel von  $h$ , der Seitenhöhe eines Seitenflächen-Dreiecks. Die Seitenflächen eines Ikosaeders sind gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge  $a$  gleich der Kantenlänge.

ge des Körpers. Deswegen gilt  $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$  und:

$$y = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Um die Länge  $x := \overline{MK}$  zu berechnen, ist es ratsam, diese Strecke parallel durch den Punkt  $E$  zu verschieben, genau wie in Abbildung 8.10. So erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit Eckpunkten  $E$ ,  $H$  und  $K_1$ , in dem folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\overline{EH} + \overline{HK_1} &= \overline{K_1E} \\ x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 &= h^2 \\ x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \\ x^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} &= \frac{3a^2}{4} \\ 2x^2 - ax - \frac{a^2}{2} &= 0 \\ 4x^2 - 2ax - a^2 &= 0\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 16a^2}}{8} = \frac{2a \pm \sqrt{20a^2}}{8} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{4} (1 \pm \sqrt{5}).$$

Die negative Lösung kann verworfen werden, da  $x$  eine positive Zahl ist. Somit gilt  $x = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5})$ .

Die Länge  $r := \overline{ME}$ , siehe Abbildung 8.12, ist der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Ikosaeders und einem Eckpunkt. Mithilfe des Satzes des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit Eckpunkten  $M$ ,  $E$  und  $K$  und der

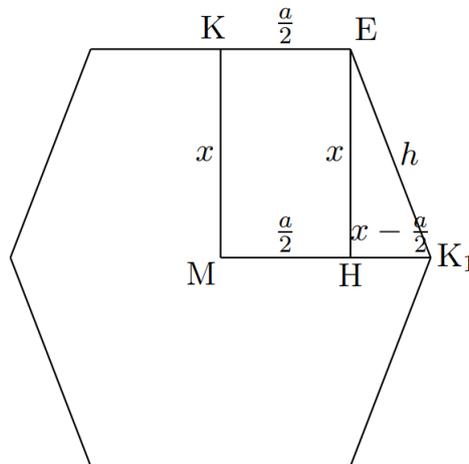


Abbildung 8.11: Symmetrieebene eines Ikosaeders mit  $K, K_1$  Mittelpunkt zweier Kanten,  $E$  ein Eckpunkt des Ikosaeders und  $F$  der Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt einer Seitenfläche (Zugriff am 10.12.2020 unter <https://www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf>).

Tatsache, dass  $\overline{KE} = \frac{a}{2}$  und  $\overline{MK} = x$ , kann  $r^2$  so berechnet werden:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \\ r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left[\frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})\right]^2 \\ r^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}(1 + 2\sqrt{5} + 5) \\ r^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}(3 + \sqrt{5}) \\ r^2 &= \frac{a^2}{8}(5 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit Eckpunkten  $M, E$  und  $F$  an und setzen die soeben berechneten Ausdrücke für  $y$  und  $r^2$  ein (siehe Abbildung 8.12):

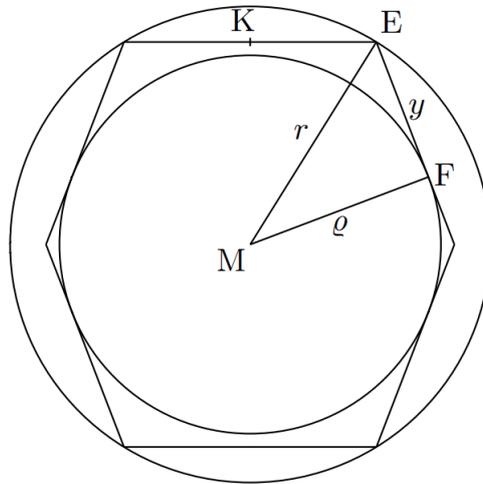


Abbildung 8.12: Berechnungen am Ikosaeder.  $K$  ist der Mittelpunkt einer Kante,  $E$  ein Eckpunkt und  $F$  ist der Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt einer Seitenfläche (Zugriff am 10.12.2020 unter <https://www.walterfendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf>).

$$\begin{aligned} \varrho^2 + y^2 &= r^2 \\ \varrho^2 + \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 &= \frac{a^2}{8}(5 + \sqrt{5}) \\ \varrho^2 &= \frac{a^2}{8}(5 + \sqrt{5}) - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \\ \varrho^2 &= a^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3}\right) \\ \varrho^2 &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}a^2 \\ \varrho &= \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}}a^2 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}, \end{aligned}$$

wo die negative Lösung nach dem Wurzelziehen nicht berücksichtigt wurde, da eine Streckenlänge nicht negativ sein kann. Abschließend berechnen wir nun das Volumen eines Ikosaeders mit Kantenlänge  $a$ , indem wir das Volumen von 20 Pyramiden mit Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Flächinhalt

$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$  und Pyramidenhöhe  $\varrho$ :

$$V = 20 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \varrho \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$$

$$V = \frac{20}{24}a^3 \cdot \sqrt{3}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$$

$$V = \frac{5}{6}a^3 \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

$$V = \frac{5}{6}a^3 \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{2}{2}$$

$$V = \frac{5}{6}a^3 \cdot \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{4}}$$

$$V = \frac{5}{12}a^3 \cdot \sqrt{9+6\sqrt{5}+5}$$

$$V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}),$$

weil  $(3+\sqrt{5})^2 = 9+6\sqrt{5}+5$ . Der Satz ist bewiesen. □

**Aufgabe** Sei die Kantenlänge  $a$  eines platonischen Körpers bekannt. Berechne den Radius der Inkugel und den der Umkugel aller fünf platonischen Körper.

*Bemerkung 8.6.7.* In der vorigen Berechnung des Volumens eines Ikosaeders mit Kantenlänge  $a$  kamen sowohl der Radius der Inkugel  $\varrho$  als auch jener der Umkugel  $r$  eines Ikosaeders vor, und zwar:

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \quad \text{und} \quad r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

*Bemerkung 8.6.8.* Die Oberflächen und Volumen der jeweiligen platonischen Körper mit Kantenlänge  $a$  werden in der folgenden Tabelle 8.5 dargestellt. Gegebenenfalls kann die Tabelle mit der Länge des Radius der Inkugel und der Umkugel erweitert werden.

**Aufgabe** Gegeben sei ein platonischer Körper mit Kantenlänge  $a$ . Wie groß ist das Verhältnis zwischen dem Volumen dieses Körpers und dem der Umkugel? Wie

Tabelle 8.5: Oberfläche und Volumen der platonischen Körper mit Kantenlänge  $a$

|            | <b>Tetraeder</b>         | <b>Würfel</b> | <b>Oktaeder</b>         | <b>Ikosaeder</b>                | <b>Dodekaeder</b>            |
|------------|--------------------------|---------------|-------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Oberfläche | $a^2\sqrt{3}$            | $6a^2$        | $2a^2\sqrt{3}$          | $5a^2\sqrt{3}$                  | $3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ |
| Volumen    | $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ | $a^3$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ | $\frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$ | $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$  |

groß ist das Verhältnis zwischen dem Volumen der Inkugel und des Polyeders?

### 8.6.5 Andere Eigenschaften

**Symmetrie** Ein weiterer interessanter Aspekt der platonischen Körper ist ihre Symmetrie. Die Lehrperson kann in der Schule die platonischen Körper dreidimensional herstellen und sie den Schülerinnen und Schülern aushändigen. So kann unter anderem auf folgende Fragestellungen eingegangen werden, je nach dem in welcher Schulstufe das Thema behandelt wird. Welche und wie viele Symmetrieachsen hat jeder der platonischen Körper? Sind die platonischen Körper punktsymmetrisch? Wie viele Kongruenzabbildungen bzw. Isometrien gibt es jeweils, die den platonischen Körper auf sich selbst abbilden?

**Projektionen** Um die Raumvorstellungen der Lernenden zu stärken können die platonischen Körper auf Ebenen projiziert werden oder zuerst gedreht oder gespiegelt und dann projiziert werden. Zudem kann auch der Körper ausgebreitet werden, sein Netz gezeichnet werden und so auch selbst hergestellt und zusammengeklebt werden.

**Winkel** Außerdem können verschiedene Winkelgrößen berechnet werden: zum Beispiel Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen eines platonischen Körpers, der zwischen zwei Kanten oder der zwischen Kante und Seitenfläche bzw. Seitenhöhe des zugrundeliegenden Vielecks.

**Zusammenfassend...** kann durchaus behauptet werden, dass vom Startpunkt „platonische Körper“ aus sehr viele Teilgebiete der Mathematik behandelt werden können.

## 9 Der Satz von Pick im Schulunterricht

Der Satz von Pick kommt in kaum einem Lehrplan vor und ist sowohl vielen Lehrpersonen als auch Schülerinnen und Schülern gar nicht bekannt. Diese Regel schafft es, aus etwas Kompliziertem etwas Einfaches zu machen und kann als Grundlage für verschiedenste mathematische Tätigkeiten in vielen Teilbereichen und in verschiedenen Schwierigkeitsniveaus dienen. Der Satz von Pick hat eine sehr große Spannweite, kann von elfjährigen Kindern angewendet werden und von ausgebildeten Mathematikerinnen und Mathematikern auf feine Art bewiesen werden - er kann alle begeistern (Schmitz 2014). Im Schulunterricht kann, wie in Schmitz (2014) beschrieben, wie folgt vorgegangen werden.

Im Schulunterricht müssen sich alle Lernenden früher oder später mit Flächeninhalten auseinandersetzen. Oft werden dabei ganz klassische Vielecke berechnet: vom Rechteck bis hin zum Trapez. Diese werden zudem nicht selten in ganzzahlige Koordinatengitter gezeichnet und es ist immer wieder, auch bei ganz herkömmlichen Figuren, der Fall, dass die Flächen in Teilflächen unterteilt werden und darauf die Flächeninhalte der Teilflächen addiert werden. In solchen Fällen kann die Ermittlung des Flächeninhalts zu einer schwierigen Aufgabe werden. Haben die zu errechnenden Figuren jedoch Eckpunkte mit ganzzahligen Koordinaten, so kann die Lehrperson darauf aufmerksam machen, dass man den Flächeninhalt sehr schnell berechnen kann.

Im Schulunterricht soll eine Schülerin oder ein Schüler zufällige Gitterpunkte auswählen und daraus ein Vieleck zeichnen. Die Klasse errechnet den Flächeninhalt, jede und jeder auf seiner eigenen Art. Die Lehrperson ebenfalls, jedoch rechnet sie

mit dem Satz von Pick und ist allemal schneller. So merken die Lernenden, dass hier ein Trick anwendbar sein muss, dass die Lehrperson ein einfacheres Vorgehen kennt und dass dieses Vorgehen irgendwas mit der Anzahl der Eckpunkte und der inneren Punkte zu tun haben muss, weil die Lehrperson die Punkte auffällig abzählt. Wollen die Schülerinnen und Schüler nun unbedingt die Methode der Lehrperson wissen und lernen, um schnell und korrekt derartige Flächeninhalte berechnen zu können, so hat die Lehrperson *gewonnen*.

Der wichtigste Punkt der Unterrichtseinheit ist nun erreicht: die Schülerinnen und Schüler wollen erfahren und lernen! Sie sollten bereits erkannt haben, dass dieser Trick von der Anzahl der Punkte auf dem Rand und im Inneren des Vielecks abhängt. Diese Tatsache kann einen „Aha“-Effekt auslösen. Nun kann die Lehrperson sie dabei unterstützen, die Formel zu entdecken und Schritt für Schritt näherzubringen. Schmitz (2014) beschreibt und schlägt genauere Vorgehensweisen vor. Er führt zudem für den Schulunterricht geeignete Beweisführungen durch, die an dieser Stelle nicht genauer dargelegt werden sollen.

## 10 Zusammenfassung

Der Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Er gilt als einer der größten Mathematiker der Geschichte und als einer der produktivsten Wissenschaftler überhaupt. Nach dem erfolgreichen Abschluss seines Studiums zog er mit 20 Jahren nach St. Petersburg und arbeitete dort mit Christian Goldbach und den Bernoulli-Brüdern zusammen. Er heiratete 1734. 1741 zog er nach Berlin und 25 Jahre später wieder zurück nach St. Petersburg. Er litt sehr an seiner Gesundheit, erblindete bereits 1735 an einem Auge, hatte aber eine enorme Konzentrationsfähigkeit. Er starb 1783 in St. Petersburg. Insgesamt gab er 866 Werke heraus. Ihm verdanken wir unzählige mathematische Erkenntnisse, u.a. die modernen Schreibweisen  $f(x)$  und  $\pi$ . Er entdeckte die Eulersche Zahl  $e$ , Basis des natürlichen Logarithmus und er entwickelte die oft als „schönste Formel“ der Mathematik geltende Gleichung:  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . Zudem gelang Euler die heute als Eulerscher Polyedersatz bekannte Gesetzmäßigkeit zu beschreiben.

Der Eulersche Polyedersatz gilt in konvexen Polyedern und lautet

$$E + F = K + 2,$$

wo  $E$  für die Anzahl der Kanten,  $F$  für die Anzahl der Flächen und  $K$  für die Anzahl der Vertices stehen. Der Satz kann auf verschiedenen Weisen bewiesen werden: mit vollständiger oder anderer Induktion, Dualität und weitere. Mithilfe des Eulerschen Polyedersatzes wird gezeigt, dass es genau fünf platonische Körper gibt. Als interessante Folgerungen des Satzes gelten der Satz von Galai und der Satz von Pick. Der letztere ist zum Polyedersatz sogar äquivalent.

Jedoch gilt der Eulersche Polyedersatz für nicht konvexe Körper nicht. Der Satz muss abgeändert und die Euler-Charakteristik definiert werden. Nur so kann ein

Zusammenhang zwischen Ecken, Kanten und Flächen zum Beispiel eines Polyeders mit Loch diskutiert werden.

Im Schulunterricht kann der Satz von den Schülerinnen und Schülern entdeckt werden. In mehreren Schulstufen kann er gebracht werden. Elfjährige können Ecken, Kanten und Flächen zählen und dabei einen Zusammenhang erkennen. Ältere können Beweisführungen aufstellen und Anwendungen des Satzes nachvollziehen. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes werden diskutiert und die Möglichkeit kann genutzt werden, um Begriffe wie „konvex“ einzuführen. Der Eulersche Polyedersatz kann mit sehr vielen Themenbereichen der Mathematik verknüpft werden und es entwickeln sich daraus sehr interessante und lehrreiche Chancen für den Mathematikunterricht.

# 11 Literatur

- Agricola, I. & Friedrich, T. (2009). *Elementargeometrie - Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. Zweite Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Aigner, M. & Ziegler, G.M. (2004). *Proofs from THE BOOK*. Third Edition. New York: Springer.
- Bell, E. T. (1967). *Die großen Mathematiker*. Düsseldorf/Wien: Econ.
- Berendonk, S. (2014). *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz. Genetisch, explorativ, anschaulich*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Berger, P. (2016). *Aspekte der Körpergeometrie*. <http://www.prof-dr-berger.de/pdf/BergerKoerpergeometrie.pdf>.
- Brückler, F.M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt. Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Berlin: Springer.
- Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). *Handbuch der Mathematik-Didaktik*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BBWF). (2018). AHS-Lehrplan Oberstufe neu: Mathematik. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>.

- Burckhardt, J.J., Fellmann, E.A. & Habicht, W. (1983). *Leonhard Euler. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*. Basel: Birkhäuser.
- Cachot, P., Meier, M., Steiner, M. & Wüst, U. (2010). Eulersche Knicklast. *Elemente der Mathematik*, 65, 104-120.
- De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 14, 17-24.
- DeTemple, D. & Robertson, J.M. (1974). The Equivalence of Euler's and Pick's Theorems. *The Mathematics Teacher*, 67(3), 222-226.
- Deutsches Schulamt (2009). Rahmenrichtlinien für die Grund- und Mittelschule in Südtirol, Beschluss der Landesregierung vom 19. Jänner 2009, Nr. 81. Zugriff am 02.01.2020 unter [http://www.provinz.bz.it/bildungssprache/didaktik-beratung/downloads/druckfassung\\_rahmenrichtlinien\\_gs-ms-dt09.pdf](http://www.provinz.bz.it/bildungssprache/didaktik-beratung/downloads/druckfassung_rahmenrichtlinien_gs-ms-dt09.pdf).
- Dieudonné, J. (1978). *Geschichte der Mathematik 1700-1900. Ein Abriss*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.
- Engel, A. (2019). *Der Eulersche Polyedersatz. Planare Graphen und platonische Körper*. In C. Löh, S. Krauss & N. Kilbertus (Hrsg.), *Quod erat knobelandum: Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg* (S. 135-145). Wiesbaden: Springer-Spektrum.
- Fellmann, E.A. (1983). Leonhard Euler 1707-1783: Schlaglichter auf sein Leben und Werk. *Helvetica Physica Acta*, 56, 1099-1131.
- Fueter, R. (1979). *Leonhard Euler*. Elemente der Mathematik: Beiheft Nr.3, Kurze

Mathematiker-Biographien. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser.

Gautschi, W. (2008). Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works. *SIAM Review*, 50(1), 3-33.

Gerwig, M. (2015). *Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkünstlerdidaktik*. Wiesbaden: Springer Verlag.

Hell, T. & Stampfer, F. (2017). *Analysis und Stochastik in der Schule*. Skriptum zur Vorlesung. Universität Innsbruck.

Jushkevic, A.P. & Kopelevic, J.K. (1994). *Christian Goldbach 1690-1764*. Basel: Birkhäuser.

Jushkevic, A.P. & Winter, E. (1965). *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764..* Berlin: Akademie.

Koch, H. (2007). Der Briefwechsel von Leonhard Euler und Christian Goldbach. *Elemente der Mathematik*, 62, 155-166.

Kowar, R. (2019). *Skript der Vorlesung: Angewandte Mathematik für Lehrer*. Version 1.0. Universität Innsbruck.

Lehmann, G. (2007). Erinnerung an Leonhard Euler (1707-1783). *Bautechnik*, 84(4), 272-278.

Lemmermeyer, F. (2010). Euler, Goldbach, and „Fermat’s Theorem“. *Elemente der Mathematik*, 65(4), 144-153.

Müller, K. (2019). *Mathematikunterricht in der Praxis. Konkrete Anregungen für die Sekundarstufe I und II*. Berlin/Heidelberg: Springer-Spektrum.

- Neunhäuserer, J. (2017). *Schöne Sätze der Mathematik. Ein Überblick mit kurzen Beweisen*. 2. Auflage. Berlin: Springer-Spektrum.
- Pädagogische Hochschule Luzern (PH Luzern). (2019). *3D. Die mathematische Welt der Körper*. Lernwerkstatt. Dossier Lehrpersonen. Zugriff am 18.11.2020 unter [https://www.phlu.ch/\\_Resources/Persistent/634dbe118f1bdf8246862f63f1ed1f1976269922/Lehrerdossier.pdf](https://www.phlu.ch/_Resources/Persistent/634dbe118f1bdf8246862f63f1ed1f1976269922/Lehrerdossier.pdf)
- Polya, G. (1962). *Mathematik und plausible Schließen - Band 1: Induktion und Analogie*. Bern: Birkhäuser.
- Scheid, H. & Schwarz, W. (2017). *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer-Spektrum.
- Schmitz, M. (2014). *Strukturgenetische didaktische Analysen zum Satz von Georg Pick und zu Gleichungen vom Grad größer als zwei*. Universität Flensburg.
- Specht, E. (2016). *Fußbälle als Polyeder*. In H.H. Langmann, E. Quaisser & E. Specht (Hrsg.), *Bundeswettbewerb Mathematik* (S. 67-72). Berlin/Heidelberg: Springer-Spektrum.
- Strick, H.K. (2020). *Mathematik - einfach genial! Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor*. Berlin: Springer.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 30-54.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze S., Ludwig M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 3. Auflage. Berlin: Springer Spektrum.

Williams, K. (2008). Leonhard Euler: Life, Work and Legacy. *The Mathematical Intelligencer*, 30, 66-69.

Wussing, H. (2009). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 2. Von Euler bis zur Gegenwart*. Berlin/Heidelberg: Springer.

Ziegler, G.M. & Blatter, C. (2007). Euler's polyhedron formula - a starting point of today's polytope theory. *Elemente der Mathematik*, 62, 184-192.

# Abbildungsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | E. Handmann, Porträt des Leonhard Eulers, 1753, Kunstmuseum Basel (Wussing 2009, S.46). . . . .   | 11 |
| 2.2 | algebra . . . . .   | 15 |
| 2.3 | Die Knickformel Eulers auf dem Poststempel der DDR vom Jahre 1983 (Lehmann 2007, S. 275). . . . .   | 18 |
| 2.4 | Der Eulersche Poledersatz in <i>Elementa doctrinae solidorum</i> (Zugriff am 04.11.2020 unter <a href="https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/investigating-eulers-polyhedral-formula-using-original-sources-eulers-polyhedral-formula">https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/investigating-eulers-polyhedral-formula-using-original-sources-eulers-polyhedral-formula</a> ) . . . . . | 25 |
| 3.1 | Euler und der Eulersche Polyedersatz auf Briefmarken der DDR vom Jahr 1983 und der Schweiz von 2007 (Wussing 2009, S. 67). . . . .  | 28 |
| 3.2 | Zentralprojektion eines Würfels auf die Ebene. Zu beachten ist, dass der äußere Gebiet in der Ebene ebenfalls eine Fläche erzeugt, und zwar fehlt sonst die obere Fläche des Würfels in dieser Darstellung.   | 29 |
| 3.3 | Beweis mit vollständiger Induktion. . . . .   | 30 |
| 3.4 | Das Kollabieren: die Fläche, die zu einem Punkt kollabiert wird, ist jeweils farbig dargestellt (Agricola & Friedrich 2009, S. 67). . . . .   | 31 |
| 4.1 | Der Würfel ist ein platonischer Körper mit $e = 4$ , $k = 3$ , $E = 8$ , $F = 6$ und $K = 12$ . . . . .   | 34 |
| 4.2 | Zulässige Punktepaare $(e, k)$ : Ikosaeder ( $I$ ), Oktaeder ( $O$ ), Tetraeder ( $T$ ), Würfel ( $W$ ) und Dodekaeder ( $D$ ). . . . .   | 37 |
| 4.3 | Die fünf platonischen Körper (Engel 2019, S. 137) . . . . .   | 38 |
| 5.1 | Einbettung der Ebene in den Raum, genauer auf die Einheitskugel (Aigner & Ziegler 2004, S. 68). . . . .   | 42 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.2  | Wir ersetzen die Punktepaare $(v, -v)$ mit den orthogonalen Kreisen $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v \rangle = 0\}$ . Also, ist $v$ der Nordpol, so ist $C_v$ der Äquator (Aigner & Ziegler 2004, S. 68). . . . .   | 43 |
| 6.1  | Elementares Dreieck mit Eckpunkten $A, B, C$ bzw. elementares Parallelogramm mit Eckpunkten $A, B, C, B + C - A$ . . . . .  | 45 |
| 6.2  | Zerlegung eines elementaren Dreiecks in kleinere Dreiecke mit Flächeninhalt $\frac{1}{4}$ . . . . .   | 46 |
| 6.3  | Der Satz von Pick mit $r = 11, i = 7$ und $A(p) = \frac{11}{2} + 7 - 1 = \frac{23}{2}$ . . . . .  | 47 |
| 6.4  | Die Unterteilung eines Polygons in elementare Dreiecke . . . . .  | 47 |
| 7.1  | Zwei Polyeder mit Löchern und Euler-Charakteristik 0 (links) und -2 (rechts) . . . . .  | 53 |
| 7.2  | Definition des Lochs in der Mathematik (Zugriff am 27.12.2020 unter <a href="https://www.sws.bfh.ch/~fischli/articles/loch/">https://www.sws.bfh.ch/~fischli/articles/loch/</a> ) . . . . .   | 53 |
| 7.3  | Der „erweiterte“ Satz von Pick für Polygone mit Löchern:<br>$A(p) = \frac{r}{2} + i - 1 + n = \frac{20}{2} + 2 - 1 + 2 = 13$ . . . . .  | 55 |
| 8.1  | Konvexe Polyeder (Berendonk 2014, S.10) . . . . .   | 62 |
| 8.2  | Nicht konvexe Polyeder . . . . .  | 67 |
| 8.3  | Aufgabe zum Fußball als Polyeder (Specht 2020, S. 67). . . . .  | 68 |
| 8.4  | Fulleren C60 (Zugriff am 18.11.2020 unter <a href="https://www.u-helmich.de/che/lexikon/F/fullerene.html">https://www.u-helmich.de/che/lexikon/F/fullerene.html</a> ) . . . . .   | 69 |
| 8.5  | Die fünf platonischen Körper (Engel 2019, S. 137) . . . . .   | 72 |
| 8.6  | Beweis, dass es nur fünf platonische Körper gibt. Von oben nach unten, links nach rechts: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel bzw. Hexaeder und Dodekaeder (Zugriff am 04.01.2021 unter <a href="http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm">http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm</a> ). . . . . | 74 |
| 8.7  | Das Tetraeder ist dual zu sich selbst (Berger 2016, S. 82). . . . .   | 75 |
| 8.8  | Würfel und Oktaeder bilden ein duales Paar (Berger 2016, S. 82). . . . .  | 75 |
| 8.9  | Dodekaeder und Ikosaeder bilden ein duales Paar (Berger 2016, S. 82). . . . .   | 76 |
| 8.10 | Ikosaeder (Zugriff am 10.12.2020 unter <a href="https://www.grah.ch/kompetenzen/konzeption-standardapplikation/ikosaeder/">https://www.grah.ch/kompetenzen/konzeption-standardapplikation/ikosaeder/</a> ). . . . .   | 78 |

8.11 Symmetrieebene eines Ikosaeders mit  $K, K_1$  Mittelpunkt zweier Kanten,  $E$  ein Eckpunkt des Ikosaeders und  $F$  der Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt einer Seitenfläche (Zugriff am 10.12.2020 unter <https://www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf>). . . . . 80

8.12 Berechnungen am Ikosaeder.  $K$  ist der Mittelpunkt einer Kante,  $E$  ein Eckpunkt und  $F$  ist der Mittelpunkt bzw. Schwerpunkt einer Seitenfläche (Zugriff am 10.12.2020 unter <https://www.walter-fendt.de/math/geo/ikosaeder.pdf>). 81



### **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

Datum: 11.01.2020

Unterschrift: