Lineare Optimierung in der Schule mit GeoGebra

Diplomarbeit

im Lehramtsstudium Mathematik - Chemie

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften

eingereicht an der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

der Universität Innsbruck

von

Theres Mair

Mai 2018

durchgeführt am Institut für Mathematik

der Universität Innsbruck

bei

Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer

Few realize that linear programming is a revolutionary development that permits us, for the first time in our long evolutionary history, to make decisions about the complex world in which we live that can approximate, in some sense, the optimal or best decision. [1, Foreword]

George B. Dantzig

Wenige erkennen, dass lineare Programmierung eine revolutionäre Entwicklung ist, die es uns zum ersten Mal in unserer langen Evolutionsgeschichte ermöglicht, Entscheidungen über die komplexe Welt zu treffen, in der wir uns befinden, die in gewisser Weise die optimale oder beste Entscheidung sein kann. [1, Vorwort]

George B. Dantzig

Vorwort

Die folgende Diplomarbeit ist in zwei große Teile gegliedert. Im ersten Teil wird die geschichtliche Entwicklung der linearen Optimierung beschrieben, aber auch die theoretischen und mathematischen Grundlagen dieses Zweiges der Mathematik werden behandelt. Damit ist eine allgemeine Beschreibung der Aufgaben und Lösungsmethoden für lineare Optimierungsaufgaben möglich. Ich habe mich in dieser Arbeit auf jene Teilbereiche der linearen Optimierung konzentriert, die auch im Schulunterricht relevant sind. Andere mathematischen Aspekte blieben unberücksichtigt.
Der zweite Teil befasst sich mit der Anwendung der linearen Optimierung im Schulunterricht. Dabei werden einige Schulbeispiele exemplarisch gelöst. Bei der Lösung wird im Unterricht auf moderne Technologien zurückgegriffen. Ich habe dazu die freie Software GeoGebra ausgewählt und die genauen Schritte zur Lösung der Beispiele jeweils genau erläutert.

Ich versuche das Thema in der Arbeit möglichst schülergerecht aufzubereiten, sodass auch Lehrpersonen diese für die Vorbereitung des Unterrichts verwenden können. Ebenso können auch Maturanten und Maturantinnen diese Arbeit zur Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung verwenden. Dadurch soll ein tieferer Einblick in die mathematischen Hintergründe der linearen Optimierung und ein genaueres Verständis möglich sein.
Mein persönliches Interesse an diesem Thema entstand im Laufe meiner Lehrtätigkeit an einer höheren Bundeslehranstalt für wirtschftliche Berufe. Dort konnte ich bereits Unterrichtserfahrung sammeln und auch das Thema der linearen Optimierung unterrichten. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass die Schüler und Schülerinnen dieses Thema im

Unterricht interessiert verfolgt haben. Das mag am praktischen Nutzen liegen. Vielleicht lag es auch daran, dass ich mehr über diesen Teilbereich der Mathematik erfahren wollte.

Alle Bilder und Graphiken dieser Diplomarbeit wurden, wenn nicht anders angegeben, selbst erstellt. Dazu habe ich die Software GeoGebra 5 verwendet.

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle all jenen danken, die mich beim Schreiben der Diplomarbeit unterstützt haben.

Mein Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer, der mein Thema mit Freude angenommen und diese Arbeit betreut hat. Vielen Dank für die freundliche Hilfsbereitschaft und die schnellen und positiven Rückmeldungen zu meinen Anliegen.

Ein großes Dankeschön möchte ich auch meiner Familie sagen, die mir mein Studium ermöglicht und all meine Entscheidungen unterstützt haben. Die Ermutigungen und positiven Zusprüche waren sehr wichtig für mich. Vielen Dank auch an meine Familie für das Korrekturlesen der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichtliche Entwicklung der linearen Optimierung

In diesem Kapitel möchte ich einen kurzen Überblick zur geschichtlichen Entwicklung der linearen Optimierung geben. Bereits der bekannte Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783) schrieb im Jahr 1744: *Was immer in der Welt passiert, in seinem Inneren hat es Maximum oder Minimum. Somit ist kein Zweifel, dass alle Naturphänomene über die Methode des Maximierens oder Minimierens erklärt werden können* [2].

Bei beinahe jedem Problem wird versucht unter minimalem Aufwand und/oder maximalem Erfolg eine entsprechende Lösung zu finden. Das Optimieren erscheint als etwas Natürliches und daher ist es auch nicht verwunderlich, dass in vielen Wissenschaftsbereichen die Optimierung eine wichtige Rolle spielt [3, S.2].

Ich möchte in diesem einleitenden Kapitel nicht bis ins 18. Jahrhundert zurückgehen, sondern mich auf den zeitlichen Abschnitt beschränken, in dem die lineare Optimierung so entwickelt wurde, wie wir sie heute verstehen.

1.1 Die drei Begründer der linearen Optimierung

Der russische Mathematiker LEONID V. KANTOROVICH (1912 - 1986), der an der Universität Leningrad unterrichtete, erhielt in den 1930er Jahren den Auftrag, sich mit der mathematischen Modellierung und Optimierung der Produktion einer Furnierholzfabrik zu befassen. Im Jahre 1939 veröffentlichte er dazu ein Buch mit dem Titel „Eine mathematische Methode der Produktionsplanung und Organisation und des besten Gebrauchs von ökomenischen Betriebsmitteln". Die Bedeutung der Arbeit blieb beinahe unerkannt. Durch die damalige politische Situation wurde das Buch im Westen nicht verbreitet und auch im Osten wurde es nicht weiter beachtet. Kantorovich selber verwendete den Ausdruck „Lineare Optimierung" nicht [3, S.10-11].

Der Durchbruch der linearen Optimierung ist dem amerikanischen Mathematiker GEORGE B. DANTZIG (1914 - 2005) zu verdanken. Er entwickelte die lineare Optimierung so, wie wir sie heute kennen. Er verwendete bei der Modellierung von Optimierungsaufgaben als erster lineare Ungleichungen für ökonomische Beschränkungen und eine lineare Zielfunktion. Im Jahre 1947 veröffentlichte er sein Buch „Modelling in a linear Structure", in dem die Simplex-Methode vorgestellt wurde. Diese wird bis heute zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben verwendet. Dantzig verwendete deshalb den Namen Simplex-Methode, weil damit die Geometrie des Wechsels von einer Polyederecke zur nächsten am besten beschrieben wird [3, S.13] (siehe dazu auch Abschnitt 3.3).

Als weiterer Begründer der lineare Optimierung gilt der amerikanische Ökonom und Physiker TJALLING C. KOOPMANS (1910 - 1985), der in den Niederlanden geboren wurde. Er war an der Universität Yale und Stanford tätig und versuchte während des zweiten Weltkrieges die Schifffahrtsrouten der Amerikaner zu optimieren [3, S.12]. Außerdem beschäftigte er sich mit Problemen der Ressourcenaufteilung.

Koopmans organisierte im Jahr 1949 das erste „Symposium on Mathematical Programming" in Chicago, an dem viele bekannte Mathematiker und Ökonomen teilnahmen [3, S.13]. Bis heute finden diese Symposien in regelmäßigen Abständen statt, bei denen in vielen Vorträgen die neuesten Entwicklungen auf dem Gebiet der Optimierung präsentiert werden. Heuer findet das Symposium in Bordeaux statt (1. bis 6. Juli 2018).

Im Jahr 1975 erhielten L. Kantorovich und T. Koopmans für ihre Theorie der optimalen Ressourcenverteilung den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften [4, IV]. Dadurch wird deutlich welche Bedeutung die lineare Optimierung hat.

1.2 Erste Anwendungen und weitere Entwicklungen

In den 1940er und 1950er Jahren waren lineare Optimierungsaufgaben oft mit einem enormen Rechenaufwand verbunden, da zur Lösung noch keine Computer zur Verfügung standen.

Im Jahr 1949 wurde der Ökonom G. J. STIEGLER mit dem Diäten - Problem beauftragt. Er sollte eine möglichst kostengünstige Nahrungszusammensetzung für Soldaten der US - Army finden. Dazu stellte er eine lineare Optimierungsaufgabe mit 9 Ungleichungen und 77 Variablen auf [3, S.18]. Zur Lösung wurden neun Personen und insgesamt ca. 120 Tage Rechenarbeit benötigt.
Ein wichtiges Anwendungsgebiet war damals auch die Petro - Industrie. So wurden lineare Optimierungsaufgaben verwendet, um die Spaltung von Erdöl in Benzin und andere hochwertige Rohöle zu optimieren.
Durch den technischen Fortschritt war es im Jahr 1956 bereits möglich, lineare Optimierungsaufgaben mit mehr als 200 Ungleichungen und 1000 Variablen in ungefähr fünf Stunden zu lösen [4, IV]. Dazu wurde der Großrechner IBM 704 verwendet, der 1954 präsentiert wurde.

In den 1960er und 70er Jahren wurden andere Richtungen der Optimierung erforscht. Dazu zählt zum Beispiel die nichtlineare Optimierung, bei der nicht-lineare Ungleichungen zur Modellierung dienen und auch die Zielfunktion nicht-linear ist. Weiters unterscheidet man noch zwischen globaler, diskreter oder stochastischer Optimierung [3, S.25].
Ich möchte hier allerdings nicht näher auf die weiteren Teilbereiche der Optimierung eingehen, da ich mich im Weiteren nur mit der linearen Optimierung beschäftigen möchte.

Neben dem Begriff lineare Optimierung wird auch lineare Programmierung verwendet. Dabei versteht man unter Programmierung so viel wie Planung.

2 Modellierung linearer Optimierungsaufgaben

Ich möchte zu Beginn dieses Abschnitts ein einfaches Beispiel anführen. Beispiele dieser Art werden sehr oft im Schulunterricht bearbeitet.

Eine Firma stellt zwei Sorten von Säften her.
Die Abfüllmaschine für die erste Sorte schafft höchstens 1000 Flaschen am Tag. Die Maschine für die zweite Sorte höchstens 1300 Flaschen am Tag. Täglich können insgesamt höchstens 1900 Flaschen abgefüllt werden.
Der Gewinn für eine Flasche der ersten Sorten beträgt €0,60. Für die zweite Sorte beträgt der Gewinn pro Flasche €0,40.
Ermitteln Sie wie viele Flaschen die erste bzw. zweite Maschine erzeugen muss, damit die Firma einen größtmöglichen Gewinn erzielt.

Zur Lösung des Problems werden zuerst Variablen festgelegt, damit der Produktionsprozess beschrieben werden kann.
Es sei
x... Anzahl der Flaschen, die Maschine 1 herstellt
y... Anzahl der Flaschen, die Maschine 2 herstellt.

Da die Flaschenanzahl nicht negativ sein kann, müssen die sogenannten Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt sein:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Durch die Angabe der höchstmöglichen Leistungen der Abfüllmaschinen, ergeben sich die einschränkenden Bedingungen:

$$x \leq 1000$$

$$y \leq 1300$$

$$x + y \leq 1900$$

Unter diesen fünf Bedingungen, soll der Gewinn der Firma, der durch die sog. Zielfunktion $0,60x + 0,40y = Z(x, y)$ gegeben ist, möglichst groß sein.

Am obigen Beispiel lässt sich bereits erkennen, dass die lineare Optimierung in der Wirtschaft eine große Rolle spielt. Entscheidungsprobleme sollen durch mathematische Methoden rechnerisch optimal gelöst werden. Falls der Wert der Zielfunktion möglichst groß sein soll, spricht man von einem Maximumsproblem; wird ein möglichst kleiner Wert der Zielfunktion verlangt, von einem Minimumsproblem. *Die Aufgabe der mathematischen Optimierung besteht darin, das Maximum oder das Minimum einer Zielfunktion zu bestimmen, wobei der Definitionsbereich für die Zielfunktion durch einschränkende Bedingungen festgelegt wird.* [4, S.7]
Von linearer Optimierung spricht man, wenn sowohl die Zielfunktion, als auch die einschränkenden Bedingungen durch lineare Gleichungen und Ungleichungen beschrieben werden können. Die Beschreibung durch lineare Gleichungen und Ungleichungen hat den Vorteil, dass die Lösung aus mathematischer Sicht relativ einfach ist (siehe dazu auch Kapitel 3). Die Formulierung der einschränkenden Bedingungen und der Zielfunktion

durch lineare Gleichungen und Ungleichungen nennt man Modellierung. Diese Modellierung ist notwendig, um dann zur mathematischen Lösung überzugehen.

Allgemein kann ein Optimierungsproblem auf folgende Weise formuliert werden:

$$\max(f(x))$$

mit

$$x \in S$$

Dabei sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ der zulässige Bereich und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Zielfunktion.
Ziel ist die Bestimmung des Maximums der Funktion f auf der Menge S. Analog kann ein Minimumsproblem formuliert werden. Dabei soll das Minimum der Funktion f auf der Menge S bestimmt werden.

In der Praxis kann die Modellierung der Optimierungsaufgabe deutlich aufwändiger als im obigen Beispiel sein. Einerseits sind manche Probleme mathematisch nicht klar fassbar und andererseits können konkurrierende Optimierungsziele herrschen [5, S.9]. Ist ein Unternehmen zum Beispiel auf den Zukauf knapper Ressourcen angewiesen, so sollten die Gesamtkosten für den Zukauf möglichst gering sein, aber der Preis sollte für den Verkäufer der Ressourcen trotzdem attraktiv sein.

Um die lineare Optimierung theoretisch einheitlich zu beschreiben, versucht man die Relationszeichen $\leq$ und $\geq$ bei den einschränkenden Bedingungen durch Gleichheitszeichen zu ersetzen. Zusätzlich will man nicht ständig zwischen Minimierungs- und Maximierungsaufgaben unterscheiden. Man betrachtet meist nur einen Typ von Aufgaben, da das Maximum einer Funktion f genau dem negativen Wert des Minimums der zu f inversen Funktion entspricht:

$$\max_{x \in S}(\ f(x)) = -(\min_{x \in S}(\ -f(x)))$$

Wird ein Optimierungsproblem in diese einheitliche Form umgeschrieben, nennt man das auch die Normalform oder Standardform der Optimierungsaufgabe (siehe Kap. 3).

3 Lösung linearer Optimierungsaufgaben

3.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden einige mathematische Voraussetzungen erläutert, die für die Lösung von linearen Programmen notwendig sind.
Die Grundbegriffe der Mengenlehre und von linearen Funktionen in 2 Variablen setze ich an dieser Stelle voraus:

- Menge und mögliche Schreibweisen
- leere Menge, Teilmenge
- Durchschnitt und Vereinigung von Mengen
- Normalform einer linearen Funktion in zwei Variablen
- Graph einer linearen Funktion und dessen Darstellung im Koordinatensystem

Ebenso setze ich lineare Ungleichungen in einer Variablen und deren Lösungsmenge in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ voraus.

3.1.1 Lösung einer linearen Ungleichung in 2 oder mehreren Variablen

Unter einer linearen Ungleichung in 2 Variablen x und y versteht man eine Aufgabe, die immer in der Form

$$ax + by < c$$

angegeben werden kann (eventuell durch Äquivalenzumformungen umgeformt). Dabei gelte, dass $a, b, c \in \mathbb{R}$. Falls auch für die zwei Variablen jeweils die Grundmenge der reellen Zahlen angenommen wird, so werden alle Zahlenpaare

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gesucht, die diese Aufgabe erfüllen. Graphisch ergibt die Lösungsmenge eine offene Halbebene. Wird anstelle von $<$ das Relationszeichen $\leq$ verwendet, so gehört die Menge der Zahlenpaare (x, y), die die Bedingung $ax + by = c$ erfüllen ebenso zur Lösungsmenge, die dann als geschlossene Halbebene bezeichnet wird. Offene Halbebenen werden durch strichlierte Geraden begrenzt, geschlossene Halbebenen durch durchgezogene Geraden. Siehe dazu auch Abbildung 3.1 und 3.2; die Lösungsmenge ist jeweils blau gefärbt.

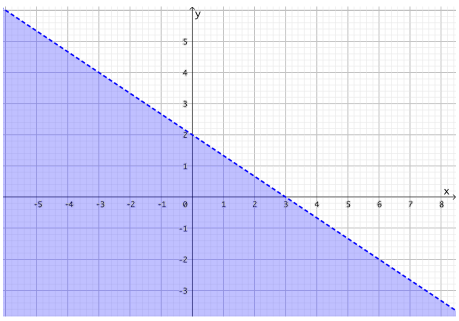


Abbildung 3.1: offene Halbebene

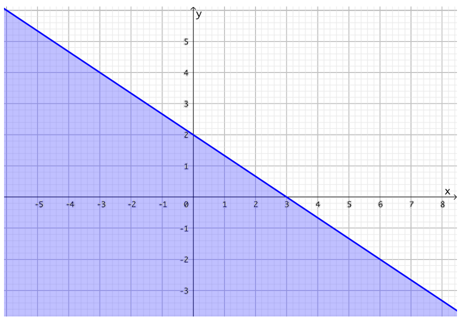


Abbildung 3.2: geschlossene Halbebene

Werden lineare Ungleichungen auf drei Variablen erweitert, so sind Aufgaben der Form

$ax + bx + cz < d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zu lösen.

Betrachtet man als Grundmenge der Variablen wieder jeweils die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so stellt die Lösungsmenge einen (offenen) Halbraum dar.

Die Ebene $ax + by + cz = d$ teilt den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume.

Betrachtet man lineare Ungleichungen mit n Variablen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt als Grundmenge jeder einzelnen Variablen, so betrachtet man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Als Lösung kommen alle n-Tupel $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ infrage, die die Ungleichung erfüllen.

Jede Ungleichung legt einen Halbraum des $\mathbb{R}^n$ fest, wobei die Begrenzung eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene darstellt.

Der Begriff Hyperebene ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ebene im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ auf einen Raum beliebiger Dimension $\mathbb{R}^n$.

Definition. *[4, S.77] Eine Hyperebene im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Punkte mit den geordneten n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$, die eine lineare Funktion*

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ *und* $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ *erfüllen.*

Im zweidimensionalen Raum stellt jede Gerade eine Hyperebene dar; im dreidimensionalen Raum jede Ebene.

3.1.2 Konvexe Mengen

Betrachtet man Punktmengen im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$, so kann jeder Punkt durch seine Koordinaten im Raum $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ beschrieben werden.

Definition. *(Vgl. [6, S.9]) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt konvex, wenn für alle $P, Q \in M$, alle Punkte der Form $aP + (1-a)Q$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $0 \leq a \leq 1$ Elemente der Menge M sind.*

Anschaulich heißt das, dass mit zwei beliebigen Punkten P und Q auch alle Punkte auf ihrer Verbindungsstrecke zur Menge M gehören. In den folgenden Abbildungen sind konvexe und nicht konvexe Mengen im $\mathbb{R}^2$ dargestellt.

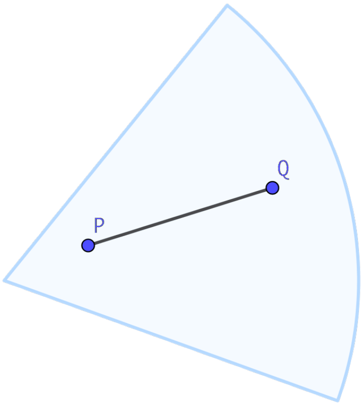


Abbildung 3.3: konvexe Menge

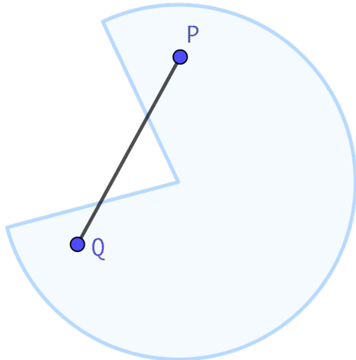


Abbildung 3.4: nicht konvexe Menge

Für konvexe Mengen gilt folgender Satz:

Satz. *(Vgl. [4, S.31]) Sind M_1, M_2, ..., M_n konvexe Punktmengen, so ist der Durchschnitt $D = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n$ wieder eine konvexe Punktmenge.*

Beweis. [4, S.31f] Nach der Voraussetzung sind M_1, M_2, ..., M_n konvexe Punktmengen. Die Durchschnittsmenge $D = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n$ ist nach Definition die Menge der Elemente, die sowohl zu M_1, wie zu M_2, ... wie zu M_n gehören. Also ist D eine Teilmenge von jeder Menge M_1, M_2, ..., M_n. Da nun die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten jeder konvexen Menge zu der Menge gehört, gilt das auch für die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der Durchschnittsmenge. Das bedeutet aber, dass der Durchschnitt von n konvexen Punktmengen wieder konvex ist. $\square$

Alle Punkte einer Ebene bzw. einer Halbebene bilden eine konvexe Menge.
Daher ist die Durchschnittsmenge von 2 Halbebenen eine konvexe Menge.

Ebenso ist die Durchschnittsmenge von 3 Halbebenen eine konvexe Menge.

Allgemein ist auch die Durchschnittsmenge von n Halbebenen eine konvexe Menge.

Definition. *[6, S.9] Ist eine beliebige Punktmenge M gegeben, die nicht notwendigerweise konvex ist, so kann man diese durch Hinzufügen von Punkten zu einer konvexen Menge erweitern. Die kleinstmögliche konvexe Menge $\overline{M}^{co}$, die die Menge M enthält, heißt konvexe Hülle von M.*

Beispiele:

Hat man im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ zwei beliebige Punkte A und B gegeben, so entspricht die konvexe Hülle der Strecke $\overline{AB}$.

Sind drei Punkte A, B und C im $\mathbb{R}^2$ gegeben, so ist die konvexe Hülle die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten A, B, C (siehe Abbildung 3.5).

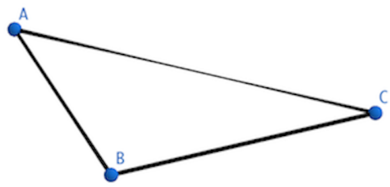


Abbildung 3.5: konvexe Hülle von A, B und C

3.1.3 Konvexe Polyeder

Definition. *[4, S.33] Ist M eine konvexe Punktmenge, so heißt E ein Eckpunkt von M, wenn es keine echte Strecke in M gibt, die den Punkt E als Mittelpunkt hat.*

Definition. *Eine beschränkte konvexe Menge mit nur endlich vielen Eckpunkten heißt konvexes Polytop.*

Das Polyeder wird als Schnittmenge endlich vieler Halbräume definiert. Der Name Polyeder kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie „Vielflächner“. Man kann sich also einen geometrischen Körper vorstellen, der von ebenen Flächen begrenzt wird und mit zwei belieben Punkten auch deren Verbindungslinie enthält.

Im zweidimensionalen Raum bilden die Schnittpunkte von zwei Geraden die Eckpunkte eines Polyeders, im dreidimensionalen Raum die Schnittpunkte von je 3 Ebenen. Im n-dimensionalen Raum wird jede Ecke eines Polyeders durch den Schnitt von Hyperebenen bestimmt.

Bekannte zwei- bzw. dreidimensionale konvexe Polyeder aus der Schulgeometrie sind zum Beispiel:

- Rechteck
- Dreieck
- Vieleck
- Würfel
- Pyramide

Die folgende Abbildung 3.6 zeigt ein konvexes Polyeder im dreidimensionalen Raum.

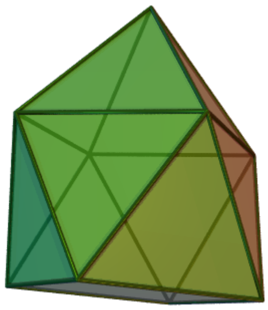


Abbildung 3.6: Ein konvexes Polyeder [7]

Viele weitere Abbildungen dreidimensionaler Polyeder findet man im Internet, zum Beispiel bei Wikipedia unter *https://de.wikipedia.org/wiki/Polyeder* unter Abschnitt 4 (Benennung).

3.2 Graphische Lösung linearer Programme

3.2.1 Zulässiger Bereich

Wie im Kapitel 2 - Modellierung linearer Programme - bereits erwähnt, werden bei einer linearen Optimierungsaufgabe stets einschränkende Bedingungen, Nichtnegativitätsbedingungen und eine Zielfunktion in Form von linearen Ungleichungen und Gleichungen angegeben. Allgemein kann solch eine Aufgabe in folgender Weise angegeben werden (vgl. [4, S.80]):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}\right\} \text{einschränkende Bedingungen} \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{Nichtnegativitätsbedingungen} \tag{3.2}$$

Unter diesen Bedingungen sollen nun die Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ bestimmt werden, so dass die Zielfunktion $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ einen Maximalwert (oder Minimalwert)

annimmt.
Die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c_j $(i = 1, 2, 3..., m$ und $j = 1, 2, 3, ..., n)$ sind stets reelle Zahlen.
Bei den einschränkenden Bedingungen wird hier nur das Relationszeichen $\leq$ angegeben, da jeden Ungleichung mit dem Relationszeichen $\geq$ durch die Multiplikation mit der Zahl -1 in diese Form umgeschrieben werden kann.

Als Lösung des linearen Programms kommen nun all jene n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ in Frage, die die Bedingungen (3.1) und (3.2) erfüllen. Diese Menge der n-Tupel wird als **zulässiger Bereich** bezeichnet.

Die Punktmenge der zulässigen Lösungen wird durch Hyperebenen begrenzt. Ihre Gleichungen erhält man, indem man bei den einschränkenden Bedingungen nur das Gleichheitszeichen gelten lässt [4, S.80]:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen der Hyperebenen} \qquad (3.3)$$

Geometrisch beschreibt die Menge der zulässigen Lösungen ein n-dimensionales Polyeder, das durch m Hyperebenen begrenzt wird (vgl. Abschnitt 3.1.3).

Dass der zulässigen Bereich sogar eine konvexe Menge beschreibt, besagt der folgende Satz:

Satz. *(vgl. [6, S.14]) Der zulässige Bereich ist konvex.*

Beweis. (vgl. [6, S.14]) Seien $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ und $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ zwei beliebige Punkte des zulässigen Bereiches (d.h.: beide Punkte erfüllen die Nichtnegativitäts- und

die einschränkenden Bedingungen). Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix (a_{ij}) in (3.1) mit **A** und den Spaltenvektor aus den rechten Seiten von (3.1) mit **b**, so gilt: $Ar \leq b$ und $As \leq b$. Für ein beliebiges λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ folgt daraus:
$\lambda Ar \leq \lambda b$ und $(1-\lambda)As \leq (1-\lambda)b$. Durch Umformungen (Addition der beiden Ungleichungen und herausheben) kommt man zu folgender Ungleichung: $A(\lambda r + (1-\lambda)s) \leq b$. Da alle Komponenten von r und s nicht negativ sind, folgt das auch für $\lambda r + (1-\lambda)s$. Der Punkt $\lambda r + (1-\lambda)s$ ist also zulässig. □

3.2.2 Optimale Lösung - Hauptsatz

Von dem oben definierten zulässigen Bereich soll nun eine Lösung bestimmt werden, die die Zielfunktion maximiert (bzw. minimiert). Man nennt eine solche Lösung eine **optimale Lösung**. Zum Auffinden der optimalen Lösung des linearen Programms ist der sog. „Hauptsatz der linearen Optimierung“ hilfreich.

Satz. *(vgl. [6, S.15]) (a) Eine lineare Funktion $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, die auf einem konvexen Polyeder definiert ist, nimmt dort ihr Minimum/Maximum in mindestens einem Eckpunkt an.*
(b) Nimmt die lineare Funktion ihr Minimum (bzw. Maximum) in mehr als einem der Punkte an, so nimmt sie es auf der gesamten konvexen Hülle dieser Punkte an.

Beweis. (vgl. [6, S.15]) (a) Sei $\min(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ und $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ kein Eckpunkt des zulässigen Bereiches.
Die Eckpunkte seien $r_1, r_2, ..., r_q$, wobei alle Eckpunkte durch n-Tupel gegeben sind. Dann kann der Punkt $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ als Linearkombination der Eckpunkte geschrieben werden:
$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i r_i$, wobei $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1$ und $0 \leq \lambda_i \leq 1$ für $i = 1, 2, ..., q$.
Ist $min_i(f(r_i))$= $f(r_k)$, so gilt: $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(r_i) \geq f(r_k) \cdot \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = f(r_k)$.

Da $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ das Minimum von $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ist, folgt $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) = f(r_k)$ und das Minimum wird auch im Eckpunkt r_k angenommen.
(b) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nehme das Minimum in p Punkten $r_1, r_2, ..., r_p$ an (alle r_i mit $i = 1, 2, ..., p$ seien wieder durch n-Tupel gegeben). Die konvexe Hülle der Punkte r_i ist gegeben durch die Menge aller folgenden r_0:
$r_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i r_i$ mit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ und $0 \leq \lambda_i \leq 1$ für $i = 1, 2, ..., p$.
Dann folgt, dass $f(r_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(r_i) = f(r_1) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = f(r_1) = min f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Analog kann der Beweis für das Maximum gezeigt werden. □

Somit kann man sich bei der Suche nach der optimalen Lösung auf die Eckpunkte des zulässigen Bereiches beschränken. Da der zulässige Bereich durch ein Polyeder mit endlich vielen Ecken gegeben ist, hat man eine endliche „Kandidatenmenge“.

3.2.3 Graphisches Lösungsverfahren für zwei Variablen

Die genaue Vorgehensweise beim graphischen Lösen linearer Programme mit zwei Variablen möchte ich gerne im Kapitel 5 ausführlicher besprechen, da dieses Lösungsverfahren in der Schule verwendet wird. Dort werde ich auch auf die verschiedenen Fälle der zulässigen Bereiche eingehen. Trotzdem erkläre ich an dieser Stelle kurz die Vorgehensweise.

3.2.3.1 Maximumsproblem

Als Variablen werden x und y verwendet. Allgemein kann die Optimierungsaufgabe auf folgende Weise angegeben werden:

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$ und $y \geq 0$

Einschränkende Bedingungen:

$$a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m$$

Zielfunktion: $c_1x + c_2y = Z \rightarrow Max.$

Dabei sind a_{ij}, c_j und b_i mit $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2$ reelle Zahlen.

Alle Zahlenpaare (x, y), die die Nichtnegativitäts- und einschränkenden Bedingungen erfüllen, bilden den zulässigen Bereich. Graphisch wird der zulässige Bereich als Vieleck im $\mathbb{R}^2$ dargestellt, wobei die einschränkenden Bedingungen die begrenzenden Geraden liefern (Relationszeichen durch Gleichheitszeichen ersetzen).

Ein möglicher zulässiger Bereich einer Maximumsaufgabe, der durch drei einschränkende Bedingungen gegeben ist, wird in untenstehender Abbildung 3.7 dargestellt. Der zulässige Bereich ist braun markiert.

Für die Zielfunktion ergibt sich eine Schar von parallelen Geraden, wobei der Wert von Z für jede einzelne Gerade konstant ist. Die Aufgabe ist nun, das Wertepaar (x, y) aus dem zulässigen Bereich zu finden, für das der Wert von Z maximal wird.
Dazu setzt man für Z den Wert 0 ein und zeichnet diese Gerade ins Koordinatensystem ein. Dann zeichnet man eine zu dieser Geraden parallel Gerade, die mindestens noch einen Punkt des zulässigen Bereiches enthält mit einem möglichst extremen Achsenabschnitt (positiv oder negativ, je nach Vorzeichen der Koeffizienten der Zielfunktion) auf der y-Achse.

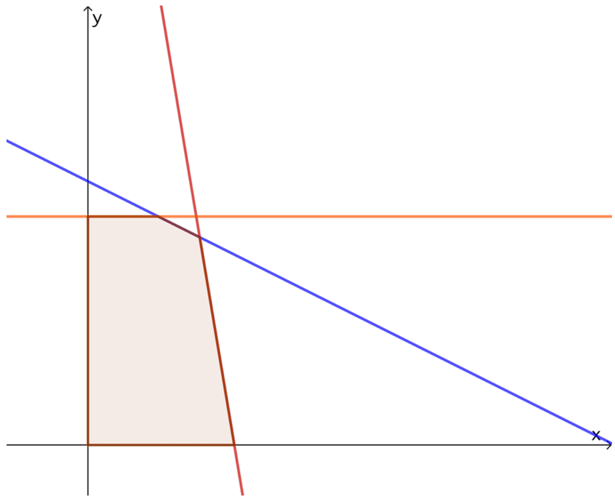


Abbildung 3.7: zulässiger Bereich - Maximumsaufgabe

3.2.3.2 Minimumsproblem

Ähnlich wie die Maximumsaufgabe kann auch die Minimumsaufgabe allgemein angegeben werden:

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$ und $y \geq 0$

Einschränkende Bedingungen:

$$a_{11}x + a_{12}y \geq b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x + a_{m2}y \geq b_m$$

Zielfunktion: $c_1x + c_2y = Z \rightarrow Min.$

Die Variablen seien wie oben definiert.

Alle Zahlenpaare (x, y), die die Nichtnegativitäts- und einschränkenden Bedingungen erfüllen, bilden wiederum den zulässigen Bereich (Vorgehensweise wie oben).

Ein möglicher zulässiger Bereich einer Minimumsaufgabe, der durch drei einschränkende Bedingungen gegeben ist, wird in Abbildung 3.8 dargestellt. Der zulässige Bereich ist braun markiert.

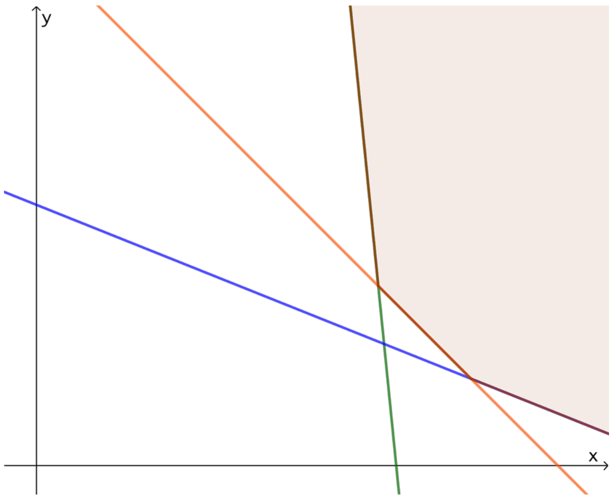


Abbildung 3.8: zulässiger Bereich - Minimumsaufgabe

Zum Bestimmen der optimalen Lösung geht man analog zur Maximumsaufgabe vor. Die Zielfunktion zeichnet man wiederum so ein, dass sie mindestens noch einen Punkt des zulässigen Bereiches enthält, mit einem möglichst extremen Achsenabschnitt (abhängig von den Koeffizienten der Zielfunktion) auf der y-Achse.

3.2.4 Graphisches Lösungsverfahren für drei Variablen

Treten bei einer linearen Optimierungsaufgabe drei Variablen x, y und z auf, so kann das graphische Lösungsverfahren auf den Raum $\mathbb{R}^3$ übertragen werden.
Der zulässige Bereich wird nun durch ein dreidimensionales Polyeder festgelegt. Die Be-

grenzungen des Polyeders werden durch Ebenen bestimmt (einschränkende Bedingungen mit Gleichheitszeichen).
Gesucht wird ein Zahlentripel (x, y, z) als optimale Lösung.

Die graphische Darstellung der Zielfunktion liefert eine Schar von parallelen Ebenen, wobei der Wert Z der Zielfunktion jeweils wieder konstant ist.
Bei einem Maximumsproblem wird die Ebene der Zielfunktion nun so weit verschoben, dass sie noch mindestens einen Punkt mit dem Lösungspolyeder gemeinsam und einen möglichst extremen Abstand vom Koordinatenursprung hat (sind die Koeffizienten der Zielfunktion positiv, so soll der Abstand möglichst groß sein). Bei einer Minimumsaufgabe soll der Abstand zum Koordinatenursprung möglichst klein sein, vorausgesetzt die Koeffizienten der Zielfunktion sind positiv.

Die folgenden Abbildungen sollen die graphische Lösung im dreidimensionalen Raum erläutern. In der Abbildung 3.9 ist ein möglicher dreidimensionaler zulässiger Bereich dargestellt, der braun gefärbt ist. Dazu ist eine beliebige Ebene der Zielfunktion eingezeichnet.
In der Abbildung 3.10 ist eine Schar von drei Ebenen eingezeichnet, die durch die Zielfunktion gegeben ist. Diese Ebene müsste zur optimalen Lösung noch entsprechend verschoben werden.

Lineare Programme mit mehr als 3 Variablen werden im Allgemeinen nicht graphisch gelöst, da dies nicht anschaulich darstellbar ist.

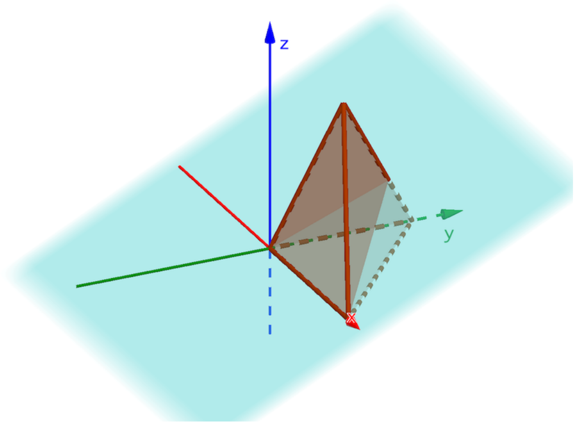


Abbildung 3.9: zulässiger Bereich

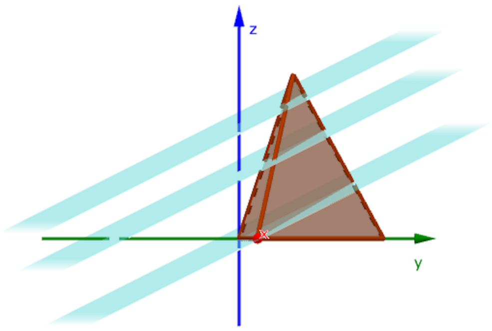


Abbildung 3.10: zulässiger Bereich mit Ebenenschar

3.3 Rechnerische Lösung linearer Programme - das Simplex-Verfahren

Die Berechnung eines Maximums oder Minimums einer reellen Funktion wird generell mit Hilfe der Differentialrechnung gelöst. Allerdings kann die Differentialrechnung für die

Maximierung/Minimierung einer linearen Zielfunktion nicht verwendet werden. Lineare Funktionen sind zwar an jeder beliebigen Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar, aber ihre Steigung ist konstant. Daher kann die notwendige Bedingung für Extremstellen (waagrechte Tangente an der Extremstelle, also $f'(x) = 0$) nicht erfüllt werden. Zusätzlich wird durch die Nebenbedingungen der Definitionsbereich der linearen Zielfunktion eingeschränkt, sodass ein möglicher Extremwert auch außerhalb dieses Definitionsbereiches liegen könnte.
Die Berechnung eines Maximums/Minimums der linearen Zielfunktion wird daher nicht mit der Differentialrechnung gelöst.

Wie bereits im Kapitel 1 - Geschichte der linearen Optimierung - erwähnt, wird das Simplex-Verfahren zur Lösung von linearen Programmen verwendet.

3.3.1 Grundidee und Normalform

3.3.1.1 Idee des Simplex-Verfahrens

Die Arbeitsweise des Simplexalgorithmus lässt sich am Vorgehen einer Ameise illustrieren, die auf den Kanten eines Polyeders entlang krabbelt [...], um eine geeignete Zielecke zu finden. Die Ameise kann nicht sehen, wo diese Ecke liegt, und wenn sie nun wahllos dem Zufall folgend die Kanten durchlaufen würde, könnte es eine Ewigkeit dauern, bis sie ihr Ziel erreicht [8, S.7](siehe Abbildung 3.11).
Durch das Simplex-Verfahren bekommt die Ameise Zusatzinformationen, um festzustellen welche der beiden benachbarten Ecken sie wählen sollte. Dabei wird die Zielfunktion in beiden benachbarten Ecken ausgewertet; sie wählt jene Ecke mit dem „besseren“ Wert (größeren Wert für Maximumsaufgaben, kleineren Wert für Minimumsaufgaben). In der neuen Ecke wird die Auswertung erneut durchgeführt. Dies wird solange wiederholt, bis die Zielecke (=optimale Ecke) erreicht ist.

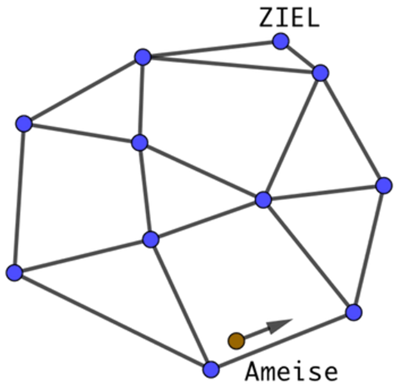


Abbildung 3.11: Idee des Simplex-Verfahrens

Der Simplexalgorithmus erspart zwar gewöhnlich den Weg durch alle Ecken, aber auch dann können zwischen den Startecken und der optimalen Lösung durchaus sehr viele Ecken durchlaufen werden. [...] Wenn nun zwischen der Startecke und der optimalen Ecke sehr viele kurze Kanten liegen, kommt der Simplexalgorithmus nur langsam voran [8, S.7].

Für die Berechnung der optimalen Lösung heißt das nun, dass man zuerst einen beliebigen, einfach zu berechnenden Eckpunkt des zulässigen Bereiches bestimmt. Dann berechnet man die Koordinaten des nächsten Eckpunktes so, dass eine stete Verbesserung der Zielfunktion erreicht wird. Dies wird solange wiederholt, bis keine Verbesserung mehr möglich ist.

3.3.1.2 Normalform eines linearen Programms

Am Ende von Kapitel 2 wurde kurz erläutert, dass das Umschreiben der einschränkenden Bedingungen in lineare Gleichungen notwendig ist, um zur Normal- oder Standardform des linearen Programms zu gelangen. Das erfordert das Einführen neuer Variablen, den sog. *Schlupfvariablen*.

Hat man zum Beispiel die lineare Ungleichung $x + 2y \leq 5$ vorliegen, so führt man eine neue Variable z ein und kann als Gleichung $x + 2y + z = 5$ schreiben. Die neue Variable z ist dabei nicht negativ.

Alle einschränkenden Bedingungen aus (3.1) - siehe Seite 25 - werden nun mit den Schlupfvariablen $u_1, u_2, ..., u_m$ in neue Nebenbedingungen umgeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + u_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + u_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + u_m &= b_m \end{aligned}\right\} \text{Nebenbedingungen} \qquad (3.4)$$

Dabei sind die Schlupfvariablen nicht negativ: $u_1 \geq 0$, ..., $u_m \geq 0$.

Die Nichtnegativitätsbedingungen und die Zielfunktion für eine Maximumsaufgabe bleiben unverändert:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n \rightarrow Max.$$

Analog kann auch jedes Minimumsproblem in diese Normalform umgeschrieben werden. Dabei werden zuerst die einschränkenden Bedingungen mit der Zahl -1 multipliziert, um die Relationszeichen von $\geq$ zu $\leq$ umzuschreiben. Dann werden die Schlupfvariablen eingeführt, die wiederum nicht negativ sind.

3.3.2 Einführendes Beispiel mit 2 Variablen

Ich möchte an dieser Stelle die rechnerische Lösung an der Maximumsaufgabe erläutern, die im Kapitel 2 (vgl. Seite 15/16) bereits modelliert wurde. Gleichzeitig möchte ich auch Zusammenhänge mit der graphischen Lösung im $\mathbb{R}^2$ herstellen. Das folgende lineare Programm in den Variablen x_1 und x_2 ist zu lösen:

Einschränkende Bedingungen:	I) $x_1 \leq 1000$
	II) $x_2 \leq 1300$
	III) $x_1 + x_2 \leq 1900$
Nichtnegativitätsbedingungen:	$x_1 \geq 0$
	$x_2 \geq 0$
Zielfunktion:	$Z = 0,60x_1 + 0,40x_2 \rightarrow Max.$

Graphisch erhält man durch diese Bedingungen folgenden zulässigen Bereich:

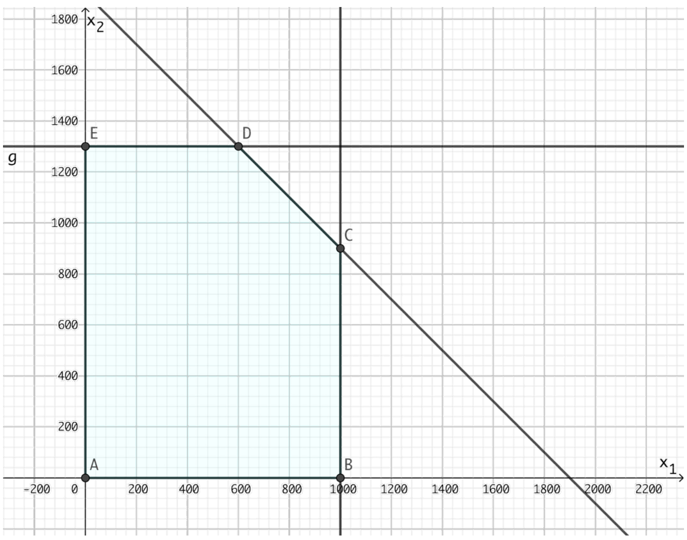


Abbildung 3.12: zulässiger Bereich im $\mathbb{R}^2$

Zuerst wird das lineare Programm in die Normalform umgeschrieben, dazu werden drei nicht negative Schlupfvariablen u_1, u_2 und u_3 eingeführt. Die Schlupfvariablen werden auch in die Zielfunktion aufgenommen, allerdings erhalten sie dort die Koeffizienten null, da sie keinen Einfluss auf den Gewinn der Firma haben. Man erhält dadurch folgendes **Gleichungssystem** A_1:

$$\text{I)} \quad x_1 + u_1 = 1000$$

$$\text{II)} \quad x_2 + u_2 = 1300$$

$$\text{III)} \quad x_1 + x_2 + u_3 = 1900$$

$$Z = 0,60x_1 + 0,40x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

Zu Beginn setzt man nun $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.
Dadurch erhält man eine erste Lösung des Gleichungssystems A_1:
$u_1 = 1000$, $u_2 = 1300$ und $u_3 = 1900$.
Diese Lösung nennt man die *1. Basislösung*. Diese Lösung ist allerdings nicht optimal, da sich dadurch $Z = 0$ ergibt.
Graphisch entspricht diese Lösung dem Eckpunkt $A = (0|0)$ im zulässigen Bereich.

Der Wert der Zielfunktion kann erhöht werden, wenn die Variablen x_1 und/oder x_2 erhöht werden. Da die Variable x_1 den größeren Koeffizienten in der Zielfunktion hat, wird nun zuerst x_1 erhöht.
Für x_1 ergeben sich die Einschränkungen $x_1 \leq 1000$ und $x_1 \leq 1900$ aus den Gleichungen I und III. Die Einschränkung $x_1 \leq 1000$ ist also bestimmend für x_1, daher wird Gleichung I folgendermaßen umgeformt: $x_1 = 1000 - u_1$.

Nun wird die Variable x_1 in allen anderen Gleichungen durch $1000 - u_1$ ersetzt und man erhält dadurch das **Gleichungssystem** A_2:

$$\begin{aligned}
\text{I)}\quad & x_1 + u_1 = 1000 \\
\text{II)}\quad & x_2 + u_2 = 1300 \\
\text{III)}\quad & 1000 - u_1 + x_2 + u_3 = 1900 \\
& Z - 600 = 0,60u_1 + 0,40x_2
\end{aligned}$$

Wählt man nun den größtmöglichen Wert für x_1, erhält man die *2. Basislösung* aus A_2: $x_1 = 1000$, $u_1 = 0$, $x_2 = 0$ (weil nur x_1 vergrößert wurde), $u_2 = 1300$ und $u_3 = 900$. Die Zielfunktion ergibt $Z = 600$. Graphisch entspricht diese Lösung dem Eckpunkt B=(1000|0).
Diese Lösung ist noch nicht optimal, weil durch die Erhöhung von x_2, der Wert der Zielfunktion noch gesteigert werden kann.

Für x_2 ergeben sich die Einschränkungen $x_2 \leq 1300$ und $x_2 \leq 900$ aus den Gleichungen II und III. Die Einschränkung $x_2 \leq 900$ ist also bestimmend für x_2, daher wird Gleichung III folgendermaßen umgeformt: $x_2 = 900 + u_1 - u_3$.

Nun wird die Variable x_2 in allen anderen Gleichungen ersetzt und man erhält dadurch das **Gleichungssystem** A_3:

$$\begin{aligned}
\text{I)}\quad & x_1 + u_1 = 1000 \\
\text{II)}\quad & u_1 - u_3 + u_2 = 400 \\
\text{III)}\quad & x_2 - u_1 + u_3 = 900 \\
& Z - 930 = -0,20u_1 - 0,40u_3
\end{aligned}$$

Wählt man nun den größtmöglichen Wert für x_2, erhält man die *3. Basislösung* aus A_3: $x_2 = 900$, x_1= 1000 (weil nur x_2 vergrößert wurde), $u_1 = 0$, , $u_2 = 400$ und $u_3 = 0$.

Die Zielfunktion ergibt $Z = 930$. Graphisch entspricht diese Lösung dem Eckpunkt $C = (1000|900)$.
Diese Lösung ist auch die optimale Lösung, da in der Zielfunktion nur mehr negative Koeffizienten vorkommen. Egal welche Variable noch erhöht wird, der Wert der Zielfunktion wird nicht mehr größer.

Als Lösung erhält man also x_1 = 1000, x_2 = 900 und Z= 930.

Im Bezug auf die Ausgangssituation kann das Ergebnis so interpretiert werden: Der Betrieb soll 1000 Flaschen mit der Abfüllmaschine 1 abfüllen, 900 Flaschen mit der Maschine 2. Dann kann er den maximalen Gewinn von €930 erzielen.

Um diese Berechnungen und Gleichungssysteme übersichtlicher darzustellen, wird meist eine tabellarische Schreibweise verwendet. Man nennt diese Tabellen auch *Simplex-Tabellen*. Diese Tabellen sind in einzelne *Simplex - Tableaus* unterteilt.
Ich möchte an dieser Stelle für das gerade gelöste Beispiel diese Simplex-Tabelle angeben. Dabei werden jeweils die Koeffizienten der Variablen x_1, x_2, u_1, u_2 und u_3 in die Spalten 2 und 3 eingetragen. In der ersten Spalte stehen die Variablen, die in den jeweiligen Basislösungen vorkommen. Die Spalte b_i gibt jeweils die rechten Seiten der Gleichungssysteme an. Die Spalte q_i gibt jeweils die Berechnung der Einschränkungen an.

Basisvariable	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b_i	q_i
u_1	1	0	1	0	0	1000	1000
u_2	0	1	0	1	0	1300	
u_3	1	1	0	0	1	1900	1900
Z_1	0,6	0,4	0	0	0	0	
x_1	1	0	1	0	0	1000	
u_2	0	1	0	1	0	1300	1300
u_3	0	1	-1	0	1	900	900
Z_2	0	0,4	-0,6	0	0	-600	
x_1	1	0	1	0	0	1000	
u_2	0	0	1	1	-1	400	
x_2	0	1	-1	0	1	900	
Z_3	0	0	-0,2	0	-0,4	-930	

Mit Hilfe der vorigen, ausführlicheren Beschreibung der Vorgehensweise kann man jetzt leicht erkennen, dass in den Zeilen 1 bis 4 die Koeffizienten des Gleichungssystems A_1 eingetragen sind. Die erste Basislösung kann an den Spalten *Basisvariable* und b_i abgelesen werden. Der Wert der Zielfunktion kann ebenfalls in der Spalte b_i abgelesen werden (allerdings mit negativem Vorzeichen).
Diese Zeilen nennt man auch das Ausgangstableau (Daten des Gleichungssystems (A_1) werden übertragen).

Die Spalte mit dem größten positiven Koeffizienten in der Zielfunktion heißt **Hauptspalte**, die Zeile mit dem kleinsten Wert q_i heißt **Hauptzeile**.
Das Element, das Hauptzeile und -spalte angehört, nennt man **Hauptelement** oder **Pivotelement**. Diese sind in der obigen Tabelle durch einen Kreis gekennzeichnet.
Das Hauptelement gibt nun an, welche Variable in die Lösung aufgenommen werden

soll. Daher wird nun die Variable x_1 in die Lösung aufgenommen, die Variable u_1 aus der Lösung entfernt.

Durch Ausführen der oben beschriebenen Rechenoperationen, erhält man das Gleichungssystem A_2, dessen Koeffizienten nun in den Zeilen 5 bis 8 zu finden sind (zweites Simplex - Tableau). Ebenso kann die zweite Basislösung wiederum abgelesen werden. Das Hauptelement ist wieder gekennzeichnet, daher wird nun die Variable x_2 in die Lösung aufgenommen und die Variable u_3 entfernt.

Durch Umformungen erhält man daraus das Gleichungssystem A_3, das nun in den Zeilen 9 bis 12 zu finden ist (drittes Simplex - Tableau). Die dritte Basislösung kann wieder in der Spalte b_i abgelesen werden. Da die Zielfunktion Z_3 keine positiven Koeffizienten mehr enthält ist man am Ende der Rechnung angelangt und die dritte Basislösung entspricht der Endlösung des linearen Programms.

3.3.3 Allgemeine Formulierung des Simplex-Algorithmus

Im Kapitel 2 - Modellierung - wurde bereits darauf hingewiesen, dass das Maximum einer Funktion genau dem Minimum der mit Minus multiplizierten Funktion entspricht. Deshalb möchte ich in diesem Abschnitt das Simplex-Verfahren nur für Maximumsaufgaben in Normalform erläutern.
Wie bereits erwähnt, werden die Angaben und Umformungen übersichtlich in der Simplex - Tabelle zusammengefasst. Ich möchte zuerst die Überlegungen/Berechnungen allgemein beschreiben und nachher die Tabelle für diese Beschreibung angeben.

Gegeben sei das lineare Programm durch folgende **Normalform (A_1)**: (vgl. [4, S. 102ff])

Nichtnegativitätsbedingungen:	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0$
Gleichungssystem:	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + u_1 = b_1$
	$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + u_2 = b_2$
	$\vdots$
	$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + u_m = b_m$
Zielfunktion:	$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_m \rightarrow Max.$

Dabei sind die Koeffizienten a_{ij}, c_j und b_i mit $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., n$ reelle Zahlen, wobei b_i sogar positive reelle Zahlen sind. Die Schlupfvariablen sind durch $u_1, u_2, ..., u_m$ gegeben.
Das Gleichungssystem aus (A_1) besteht aus m Gleichungen (diese Gleichungen sollen unabhängig sein, das heißt, dass alle Gleichungen notwendig sind, um die Aufgabe zu modellieren) in $n + m$ Variablen. Da aus m unabhängigen Gleichungen genau m Variablen berechnet werden können, werden zuerst n Variablen null gesetzt.
Wie im einführenden Beispiel wählt man zuerst:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0.$$

Damit erhält man die **erste Basislösung**:

$$u_1 = b_1, u_2 = b_2, ..., u_m = b_m$$

Der Wert der Zielfunktion ist $Z_1 = 0$.

Die Variablen, die null gesetzt werden, nennt man auch **Nichtbasisvariablen** , die anderen Variablen **Basisvariablen**.
Die erste Basislösung kann sehr einfach bestimmt werden; man wählt die Schlupfvariablen als Basisvariablen. Dadurch erhält man immer die zulässige Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$. Die Lösung soll nun schrittweise verbessert werden, bis die optimale Lösung erreicht ist.

Um festzustellen ob eine Lösung bereits optimal ist, genügt ein Blick auf die Zielfunktion. Enthält sie noch positive Koeffizienten c_j, so lässt sich der Wert der Zielfunktion noch erhöhen. Die zugehörige Variable x_j muss dann in die Basisvariablen aufgenommen werden (kommen keine positiven Koeffizienten c_j mehr vor, dann liegt die optimale Lösung vor).

Eine Verbesserung der Lösung erreicht man also, indem eine Basisvariable durch eine Nichtbasisvariable ersetzt wird (d.h.: die Gesamtzahl der Basisvariablen bleibt gleich). Praktisch wählt man jene Nichtbasisvariable aus, die den größten Koeffizienten hat. Dadurch wird der Wert der Zielfunktion am meisten vergrößert.
Welche Variable aus der Basislösung entfernt wird, lässt sich folgendermaßen überlegen: Die rechten Seiten des Gleichungssystems aus (A_1) dürfen nicht negativ sein, also muss für die Variable, die in die Basislösung aufgenommen werden soll, der „Engpass“ bestimmt werden. Es wird nun diejenige Variable aus der Basislösung entfernt, für die man den kleinsten Wert erhält.
Hat man die Simplex - Tabelle vorliegen, nennt man diese Überlegungen auch die „Bestimmung des Pivotelements“. Dadurch wird bestimmt, welche Variable in die Lösung aufgenommen wird und welche daraus entfernt wird.

Den Variablentausch möchte ich nochmals genauer angeben:
Betrachtet man die Ausgangssituation (A_1) und sei c_k der größte positive Koeffizient der Zielfunktion, dann ist x_k die zugehörige Variable. Sie soll nun in die Basislösung aufgenommen werden.
Aus dem Gleichungssystem bestimmt man nun den Engpass für x_k:

$$a_{1k}x_k \leq b_1 \; und \; a_{1k} > 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{b_1}{a_{1k}}$$

$$a_{2k}x_k \leq b_2 \; und \; a_{2k} > 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{b_2}{a_{2k}}$$

$$\vdots$$

$$a_{mk}x_k \leq b_m \ und \ a_{mk} > 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{b_m}{a_{mk}}$$

Falls einer der Koeffizienten a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk} negativ oder null ist, wird der Quotient nicht gebildet (Nichtnegativitätsbedingung wäre nicht erfüllt bzw. Division nicht definiert). Im nächsten Schritt wird nun das Minimum der Quotienten bestimmt:

$$min(\frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, ..., \frac{b_m}{a_{mk}}) = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Der Engpass von x_k ist also durch $\frac{b_l}{a_{lk}}$ bestimmt. Für $x_k = \frac{b_l}{a_{lk}}$ wird die Schlupfvariable $u_l = 0$.
Damit wird also die Variable u_l durch x_k ersetzt (d.h.: der Koeffizient a_{lk} wurde als Pivotelement bestimmt).

Dividiert man die l-te Gleichung aus dem Gleichungssystem aus (A_1) durch a_{lk}, so erhält die Variable x_k den Koeffizienten 1:

$$\frac{a_{l1}}{a_{lk}}x_1 + \frac{a_{l2}}{a_{lk}}x_2 + ... + \frac{a_{lk}}{a_{lk}}x_k + ... + \frac{a_{ln}}{a_{lk}}x_n + 0 + ... + \frac{1}{a_{lk}}u_l + 0 + ... + 0 = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Aus allen anderen Gleichungen wird die Variable x_k eliminiert. Dadurch erhält man ein neues **System** (A_2):

Nichtnegativitätsbedingungen:	$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$
Gleichungssystem:	$\overline{a}_{l1}x_1 + \overline{a}_{l2}x_2 + ... + 1x_k + ... + \overline{a}_{ln}x_n + \frac{1}{a_{lk}}u_l = \overline{b}_l$
für $i = 1, 2, ..., m$ und $i \neq l$	$\overline{a}_{i1}x_1 + \overline{a}_{i2}x_2 + ... + 0x_k + ... + \overline{a}_{in}x_n - \frac{a_{ik}}{a_{lk}}u_l + u_i = \overline{b}_i$
Zielfunktion:	$\overline{Z} = \overline{c}_1x_1 + \overline{c}_2x_2 + ... + 0x_k + ... + \overline{c}_nx_n - \frac{c_k}{a_{lk}}u_l$

Für die neuen Koeffizienten gilt:
(mit $j = 1, 2, ..., n$ und $i = 1, 2, ..., m$ und $i \neq l$)

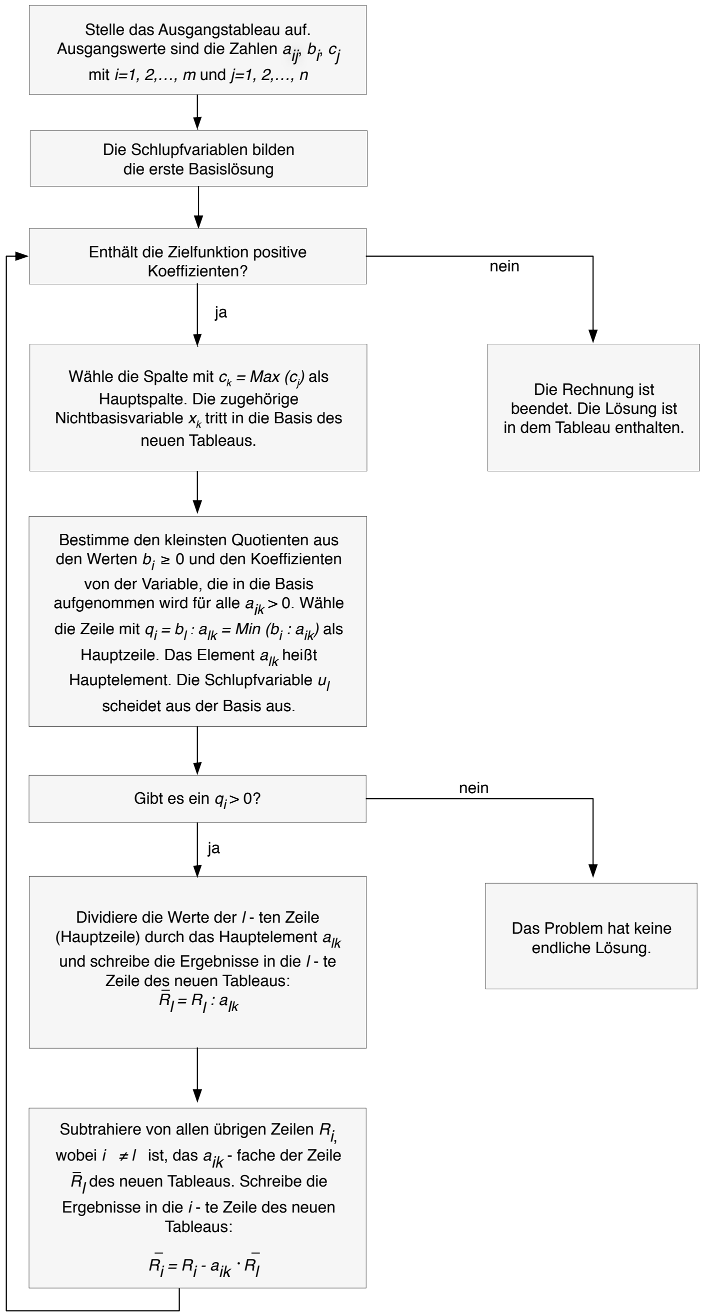
$$\overline{c}_j = (c_j - \tfrac{a_{lj}}{a_{lk}} c_k) \qquad \overline{b}_i = (b_i - \tfrac{b_l}{b_{lk}} a_{ik}) \qquad \overline{a}_{ij} = (a_{ij} - \tfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}).$$

Diese Vorgangsweise wird so lange wiederholt, bis in der Zielfunktion keine positiven Koeffizienten mehr vorkommen. Dann ist keine Verbesserung der Zielfunktion mehr möglich und man hat die optimale Lösung bestimmt.

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, werden die Koeffizienten des Gleichungssystems und der Zielfunktion, Lösungen und Engpässe in die Simplex-Tabelle übertragen, um diesen Ablauf übersichtlicher darzustellen. Ich möchte an dieser Stelle die Tabelle für die Normalform (A_1) und das System (A_2) noch allgemein anführen. Dabei ist das Ausgangstableau und das zweite Tableau eingetragen.

Basisvariable	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n	u_1	u_2	...	u_n	b_i	q_i
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
u_l	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	...	a_{ln}	0	0	...	0	b_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Z	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n	0	0	...	0	0	
u_1	$\overline{a}_{11}$	$\overline{a}_{12}$	...	0	...	$\overline{a}_{1n}$	1	0	...$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$...	0	$\overline{b}_1$	
u_2	$\overline{a}_{21}$	$\overline{a}_{22}$	...	0	...	$\overline{a}_{2n}$	0	1	...$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$...	0	$\overline{b}_2$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_k	$\overline{a}_{l1}$	$\overline{a}_{l2}$	...	1	...	$\overline{a}_{ln}$	0	0	...$\frac{1}{a_{lk}}$...	0	$\overline{b}_l$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	$\overline{a}_{m1}$	$\overline{a}_{m2}$	...	0	...	$\overline{a}_{mn}$	0	0	...$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$...	1	$\overline{b}_m$	
$\overline{Z}$	$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$	...	0	...	$\overline{c}_n$	0	0	...$-\frac{c_k}{a_{lk}}$	0	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Der Simplex - Algorithmus kann durch folgenden Ablaufplan übersichtlich beschrieben werden: [4, S.107]



Ich möchte an dieser Stelle nicht näher auf andere Formen des Simplex - Algorithmus eingehen, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Ebenso verzichte ich an dieser Stelle auf die verschiedenen Lösungsfälle. Diese werde ich im Kapitel 5 behandeln, soweit diese im Schulunterricht besprochen werden.

4 Anwendungsbeispiele

In vielen Bereichen der Wirtschaft werden Probleme durch die lineare Optimierung gelöst. Im Transportwesen versucht man die Transportkosten verschiedener Güter zu minimieren; in der Landwirtschaft sollen die Nutzflächen optimal ausgenützt werden, um einen größtmöglichen Gewinn zu erzielen und in der Organisationsplanung versucht man kostengünstige Schicht- und Stundenpläne zu erstellen.
Ich möchte hier zwei Anwendungsbeispiele in mehreren Variablen anführen, die solche Optimierungsprozesse beschreiben.

4.1 Beispiel 1 - Fruchtsäfte

Ein Betrieb stellt vier Fruchtsäfte her, die aus verschiedenen Zutaten (Apfelsaft, Orangensaft, Karottensaft und Mangosaft) zusammengemischt werden. Die genauen Zusammensetzungen der Fruchtsäfte und die Vorräte der Zutaten sind in nachstehender Tabelle angegeben.

	Apfelsaft (l)	Orangensaft (l)	Karottensaft (l)	Mangosaft (l)
Fruchtsaft 1	50	30	0	0
Fruchtsaft 2	0	40	40	0
Fruchtsaft 3	20	20	20	20
Fruchtsaft 4	40	0	0	20
Vorrat	5000	6000	4000	3000

Der Betrieb kann für einen Liter Fruchtsaft 1 einen Gewinn von €2,00 erzielen, für Fruchtsaft 2 €1,50, für Fruchtsaft 3 €3,00 und für Fruchtsaft 4 €2,20. Wie muss der Betrieb seine Produktion steuern, um maximalen Gewinn zu erzielen?

Dieses Problem wird durch folgende Normalform beschrieben:

x_1.................	Herstellungsmenge an Fruchtsaft 1 (in Litern)
x_2.................	Herstellungsmenge an Fruchtsaft 2 (in Litern)
x_3.................	Herstellungsmenge an Fruchtsaft 3 (in Litern)
x_4.................	Herstellungsmenge an Fruchtsaft 4 (in Litern)
u_1, u_2, u_3, u_4...	nicht negative Schlupfvariablen

I)	$\frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + u_1 = 5000$
II)	$\frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + u_2 = 6000$
III)	$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + u_3 = 4000$
IV)	$\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + u_4 = 3000$

Als Koeffizienten wurden jeweils die relativen Anteile der Zutaten in einem Liter Fruchtsaft verwendet.

$Z = 2x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + 2,2x_4 \rightarrow Max.$

Natürlich müssen auch die Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt sein:
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0, \quad u_4 \geq 0.$

Die Lösung wurde mit dem Simplex - Algorithmus berechnet. Dazu führe ich hier die Simplex - Tabelle an (die Pivotelemente sind jeweils eingekreist).

Basisvariable	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	u_4	b_i	q_i
u_1	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	5000	20000
u_2	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	6000	24000
u_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	0	4000	16000
u_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	1	3000	12000
Z_1	2	1,5	3	2,2	0	0	0	0	0	
u_1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	-1	2000	3200
u_2	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	-1	3000	8000
u_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	-1	1000	
x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0	0	0	4	12000	
Z_2	2	1,5	0	-1,8	0	0	0	-12	-36000	
x_1	1	0	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$\frac{-8}{5}$	3200	
u_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	1800	3600
u_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	-1	1000	2000
x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0	0	0	4	12000	
Z_3	0	1,5	0	$-\frac{43}{15}$	$-\frac{16}{5}$	0	0	-8,8	-42400	
x_1	1	0	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{8}{5}$	3200	
u_2	0	0	0	$-\frac{17}{60}$	$-\frac{3}{5}$	1	-1	$\frac{3}{5}$	800	
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	2	-2	2000	
x_3	0	0	1	$\frac{4}{3}$	0	0	0	4	12000	
Z_3	0	0	0	$-\frac{127}{60}$	$-\frac{16}{5}$	0	-3	-5,8	-45400	

Da in der Zielfunktion nun keine positiven Koeffizienten mehr vorkommen, kann die optimale Lösung abgelesen werden:

$x_1 = 3200 \quad x_2 = 2000 \quad x_3{=}12000 \quad x_4 = 0$

$Z = 45400$

Um den größtmöglichen Gewinn von €45400 zu erzielen, sollte der Betrieb 3200 Liter von Fruchtsaft 1, 2000 Liter von Fruchtsaft 2 und 12000 Liter von Fruchtsaft 3 herstellen (Fruchtsaft 4 sollte nicht hergestellt werden).

4.2 Beispiel 2 - Gartenmaschinen

An diesem Beispiel sollen mögliche Schwierigkeiten, die beim Simplex - Algorithmus auftreten können, illustriert werden.

Ein Unternehmen produziert und verkauft vier verschiedene Gartenmaschinen: Häcksler, Rasenmäher, Kleintraktoren und Mähmaschinen. Pro Häcksler werden 1500 Euro Gewinn erzielt, während pro Rasenmäher 3500 Euro, pro Kleintraktor 3000 Euro und pro Mähmaschine 4000 Euro verdient wird. Das Unternehmen möchte selbstverständlich seinen Gewinn maximieren.

Die Herstellung erfolgt in einem dreistufigen Prozess:
Stufe 1: Einzelteilfertigung
Stufe 2: Oberflächenvergütung
Stufe 3: Montage
Für die einzelnen Fertigungsstufen sind definierte Fertigungszeiten pro Produktionseinheit gegeben. Außerdem sind die Produktionskapazitäten in den einzelnen Fertigungsstufen begrenzt. Folgende Tabelle stellt die Bedingungen dar:

Produkt	*Häcksler*	*Rasenmäher*	*Traktor*	*Mähmaschine*	*Kapazität*
Stufe 1	3,0	1,0	3,0	4,0	315
Stufe 2	1,0	2,0	2,7	4,0	270
Stufe 3	2,0	5,0	5,5	3,0	400

Es wird erwartet, dass maximal 30 Häcksler absetzbar sind. Außerdem sollen aus betriebspolitischen Gründen mindestens zwölf Rasenmäher, 20 Kleintraktoren und zehn

Mähmaschinen abgesetzt werden. [9, S.35]

Es ergibt sich folgende Optimierungsaufgabe:

x_1........................	Anzahl der Häcksler, die hergestellt werden
x_2........................	Anzahl der Rasenmäher, die hergestellt werden
x_3........................	Anzahl der Kleintraktoren, die hergestellt werden
x_4........................	Anzahl der Mähmaschinen, die hergestellt werden

Nebenbedingungen:	I) $3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 315$
	II) $x_1 + 2x_2 + 2,7x_3 + 4x_4 \leq 270$
	III) $2x_1 + 5x_2 + 5,5x_3 + 3x_4 \leq 400$
	IV) $x_1 \leq 30$
	V) $x_2 \geq 12$
	VI) $x_3 \geq 20$
	VII) $x_4 \geq 10$
Nichtnegativität:	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$
Zielfunktion:	$Z = 1500x_1 + 3500x_2 + 3000x_3 + 4000x_4 \rightarrow Max.$

Dieses lineare Programm habe ich mit Hilfe der Homepage `www.simplexme.com` gelöst. Man erhält folgende Lösung:

$x_1 = 0 \quad x_2 = 36,57 \quad x_3 = 20 \quad x_4 = 35,71 \quad Z = 330857,14$

Die berechnete Lösung löst das Problem des Unternehmers nicht, da er eine ganzzahlige Lösung für alle Variablen braucht (man kann nur *ganze* Gartenmaschinen produzieren). Eine ganzzahlige Lösung könnte zum Beispiel durch Runden erreicht werden. Dann müsste der Unternehmer 37 Rasenmäher und 36 Mähmaschinen herstellen. Diese Lösung ist allerdings nicht zulässig, da die Nebenbedingungen II) und III) nicht erfüllt werden.

Um eine ganzzahlige zulässige Lösung zu erzwingen, werden nun für die Variablen x_2 und x_4 weitere Bedingungen angegeben.
Für x_2 soll gelten: $x_2 \geq 37$ oder $x_2 \leq 36$.
Für x_4 soll gelten: $x_4 \geq 36$ oder $x_4 \leq 35$.
Daraus ergeben sich vier Kombinationsmöglichkeiten, die zu den Nebenbedingungen noch dazu kommen. Die Lösungen wurde wieder mit Hilfe der Homepage `www.simplexme.com` berechnet:

$x_2 \geq 37$ $x_4 \geq 36$	$x_2 \geq 37$ $x_4 \leq 35$	$x_2 \leq 36$ $x_4 \leq 35$	$x_2 \leq 36$ $x_4 \geq 36$
unzulässiges Problem	$x_1 = 0$ $x_2 = 37$ $x_3 = 20$ $x_4 = 35$	$x_1 = 10$ $x_2 = 33$ $x_3 = 20$ $x_4 = 35$	$x_1 = 0$ $x_2 = 36$ $x_3 = 20$ $x_4 = 36$
	$Z = 329500$	$Z = 330500$	$Z = 330000$

Die Bedingungen $x_2 \geq 37$ und $x_4 \geq 36$ liefern ein unzulässiges Problem, da die Nebenbedingung II) verletzt wird (x_1 müsste negativ sein, um die Nebenbedingung zu erfüllen und das widerspricht den Nichtnegativitätsbedingungen).
Da es sich um eine Maximierungsaufgabe handelt, wird die ganzzahlige Lösung ausgewählt, die den größten Gewinn liefert: $x_1 = 10 \quad x_2 = 33 \quad x_3 = 20 \quad x_4 = 35$.
Dabei wird ein Gewinn von €330 500 gemacht.

5 Lineare Optimierung im Schulunterricht

5.1 Gesetzliche Grundlage

Die *Lineare Optimierung* ist in zwei Schultypen der berufsbildenden Schulen vorgesehen. Sowohl in den höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe (HLW) als auch in den höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten (HLFS) ist das Thema im Lehrplan verankert.
Die ausführlichen Lehrpläne für das Unterrichtsfach Angewandte Mathematik können unter [10, S.71ff] für die HLW und [11, S.43ff] für die HLFS abgerufen werden. Zur linearen Optimierung sind folgende Bildungs- und Lehraufgaben im dritten bzw. vierten Semester festgehalten:

- Lösungsbereiche linearer Ungleichungen in zwei Variablen mit Technologieeinsatz bestimmen
- schulartenspezifische Problemstellungen durch Ungleichungssysteme mit zwei Variablen modellieren
- die Zielfunktion für eine lineare Optimierung formulieren
- die Lösung einer linearen Optimierung mit Technologieeinsatz ermitteln und in-

terpretieren sowie den Lösungsweg erklären/begründen

Schülerinnen und Schüler der zwei Schultypen, HLW und HLFS, bekommen im Rahmen der Zentralmatura an den berufsbildenden höheren Schulen (BHS) dieselben Maturaaufgaben gestellt (die zwei Schultypen befinden sich im selben Cluster - W1 - für den Teil B der Zentralmatura; Aufgaben aus dem Teil A sind für alle BHS gleich). Die genaue Einteilung der Schultypen in die einzelnen Cluster kann unter [12] nachgelesen werden. Im Kompetenzkatalog für die schriftliche Reife- und Diplomprüfung [13] sind die Kompetenzen, die die Schüler und Schülerinnen im Bereich der linearen Optimierung erreichen sollen ebenfalls festgehalten:

- lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen modellieren
- Lösungsbereich mit Technologieeinsatz ermitteln, interpretieren und im Kontext argumentieren
- Zielfunktion aufstellen
- die optimalen Lösungen mittels Technologieeinsatz ermitteln und interpretieren
- Lösungsweg erklären

Dort wird auch angemerkt, dass die Begriffe Nichtnegativitätsbedingung (Nichtnegativitätskriterium) und Lösungsbereich (zulässiger Bereich) im Rahmen der Reife- und Diplomprüfung als bekannt vorausgesetzt werden.

Im Lehrplan wird damit vorgegeben, dass die Schüler und Schülerinnen Kompetenzen in vier Handlungsdimensionen erreichen sollen:

- Modellieren und Transferieren (A)
- Operieren und Technologieeinsatz (B)

- Interpretieren und Dokumentieren (C)
- Argumentieren und Kommunizieren (D)

Kompetenzen in diesen vier Handlungsdimensionen werden durch die Zentralmatura abgeprüft. Dadurch sind auch die Lehrpersonen gefordert, diese Handlungsdimensionen im Mathematikunterricht einzubauen und regelmäßig zu üben.
Im Bereich der linearen Optimierung können alle Handlungsdimensionen im Unterricht eingebaut werden (vgl. Schulbeispiele).

5.2 GeoGebra - die Geometrie Software

Im Mathematikunterricht werden eine Vielzahl von Technologien verwendet. So kommen zum Beispiel grafikfähige Taschenrechner oder Computeralgebrasysteme (CAS) verschiedener Hersteller zum Einsatz.
Ich möchte an dieser Stelle die Software GeoGebra näher vorstellen, da ich der Überzeugung bin, dass diese für die lineare Optimierung die beste Wahl ist. Ich habe bereits selber an einer Schule unterrichtet und die Schülerinnen dieser Schule haben GeoGebra leider nicht verwendet (technische Ausstattung der Klassenräume war nicht gegeben). Die Schülerinnen mussten also lineare Optimierungsaufgaben mit einem graphikfähigen Taschenrechner bzw. händisch lösen. Aus Kostengründen wurde ein relativ günstiger Taschenrechner gewählt, daher war das Graphikfenster sehr klein und leider nur schwarz - weiß. Die graphische Darstellung war unbefriedigend.
In mehreren Mathematikfortbildungen für BHS - Lehrpersonen wurde über den Technologieeinsatz gesprochen bzw. Erfahrungen mit den verschiedenen Technologien ausgetauscht. Dort habe ich gehört, dass alle Lehrpersonen, die die technischen Voraussetzungen zur Verfügung haben, oder in Laptop - Klassen unterrichten, inzwischen mit GeoGebra arbeiten (auch bei Schularbeiten). All jene, die noch nicht mit GeoGebra ar-

beiten streben dies in nächster Zeit an. Ich denke, dass der Großteil der Schulen in den nächsten Jahren auf GeoGebra umsteigen wird.

Was ist GeoGebra?

Der Name GeoGebra setzt sich aus Geometrie und Algebra zusammen. *GeoGebra ist eine kostenlose dynamische Mathematiksoftware [...]. Sie verbindet Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einem einfach zu bedienenden Softwarepaket* [14].
Die Software wurde vom Salzburger Markus Hohenwarter im Jahr 2002 im Zuge seiner Diplomarbeit an der Universität Salzburg entwickelt und im Rahmen seiner Doktorarbeit weiterentwickelt. Seither wurde die Software mehrfach ausgezeichnet. Eine Auflistung aller Auszeichnungen kann unter [14] abgerufen werden.

GeoGebra wurde als Open Source Programm entwickelt, das heißt dass sowohl die Programmierer als auch die Nutzer das Programm verändern können. Dadurch hat sich die Software sehr schnell weiterentwickelt und es wurden ständig neue Anwendungen hinzugefügt. Aktuell sind die Versionen GeoGebra 5 und GeoGebra 6 verfügbar. Die Software kann gratis über die Homepage `www.geogebra.org/download` heruntergeladen werden (für PC, Tablet oder Smartphone).

Vorteile von GeoGebra:

- kostenlose Software
- Algebra, Geometrie und Tabellenkalkulation sind in einem Programm vereint (ein Programm für alle Anwendungen)
- Perspektivenwechsel möglich (vor allem zwischen Algebra und Geometrie)
- dynamische Software (Zugmodus - Punkte/Objekte auf der Zeichenebene können

verschoben werden; alle davon abhängigen Objekte passen sich automatisch an)

- interaktive Unterrichtsmaterialien verfügbar
- benutzerfreundliche Oberfläche (Befehle in der Eingabezeile werden angezeigt)

Nachteil von GeoGebra:

- AnwenderInnen müssen über PC, Tablet oder Smartphone verfügen

Das Grafikfenster:

Im Lehrplan wird vorgeschrieben, den Lösungsbereich eines Ungleichungssystems in zwei Variablen ermitteln zu können. Da der Lösungsbereich einem Vieleck im $\mathbb{R}^2$ entspricht, kann dies in GeoGebra mit dem Graphikfenster ermittelt werden. Die folgende Abbildung 5.1 zeigt den Startbildschirm mit dem Graphik- und Algebrafenster.

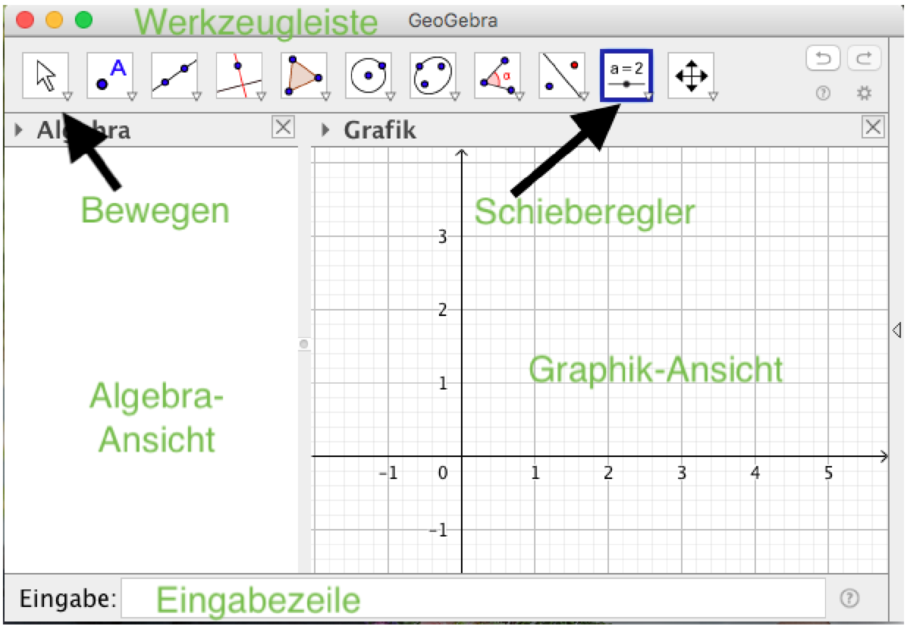


Abbildung 5.1: Startbildschirm bei GeoGebra 5

Wird in der Eingabezeile eine Ungleichung in zwei Variablen x und y eingegeben, so er-

scheint direkt im Graphik - Fenster die zugehörige Gerade und der Lösungsbereich wird farbig markiert (vgl. Abbildungen 3.1 und 3.2). Die Ungleichung erscheint im Algebra - Fenster.
Um Elemente in der Graphik zu bewegen, muss das Pfeil - Symbol in der Werzeugleiste aktiviert sein. Bei der linearen Optimierung kann auch der Schieberegler verwendet werden. dazu muss dieser in der Werkzeugleiste ausgewählt werden. Die genauen Vorgangsweisen werde ich später noch genauer erläutern.

5.3 Anwendung in der Schule

5.3.1 Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Bevor man das Thema „lineare Optimierung“ beginnen kann, muss als Vorbereitung das graphische Lösen einer linearen Ungleichung in zwei Variablen x und y besprochen werden. Da im Vorfeld (1. Klasse) das Lösen linearer Gleichungssysteme in 2 oder mehreren Variablen behandelt wird, kann darauf aufgebaut werden. Die Schüler und Schülerinnen wissen bereits, dass die Lösungen einer Gleichung in zwei Variablen $ax + by = c$ (mit a, b und $c \in \mathbb{R}$) auf einer Geraden liegen.
Diese Gerade teilt die Ebene in 2 Halbebenen, die jeweils durch eine Ungleichung beschrieben werden (vgl. Abschnitt 3.1.1). Ist die Ungleichung $ax + by \leq c$ gegeben, so ist eine Halbebene die Lösungsmenge der Ungleichung. Um festzustellen, welche Halbebene nun die Lösungsmenge darstellt, setzt man einen Punkt einer Halbebene, der nicht auf der Geraden liegt, in die Ungleichung ein. Erfüllt dieser Punkt die Ungleichung, so ist jene Halbebene, in der der Punkt liegt die Lösungsmenge. Sonst ist es die andere Halbebene.
Das Relationszeichen entscheidet, ob die Gerade selbst zur Lösungsmenge gehört.

Wird eine lineare Ungleichung in 2 Variablen graphisch mit GeoGebra gelöst, so wird die Lösungsmenge automatisch gefärbt und die Randgerade je nach Relationszeichen durchgezogen oder strichliert gezeichnet (siehe Abb. 3.1 und 3.2). Es entfällt also die Überprüfung welche Halbebene der Lösungsmenge entspricht.
In der Praxis würde ich am Beginn des Themas trotzdem ein paar Übungen händisch lösen. Einerseits kann so die Konstruktion von Geraden im Koordinatensystem wiederholt werden und andererseits sollen die Schüler und Schülerinnen auch selbst in der Lage sein, die richtige Halbebene auszuwählen. Es ist meiner Meinung nach sehr wichtig, dass die mathematischen Hintergründe zuerst verstanden werden. Erst wenn klar ist, welche Entscheidungen oder Rechenschritte notwendig sind, sollte man den Vorteil einer Software ausnützen. Ansonsten besteht die Gefahr, dass sich die Schüler und Schülerinnen zu sehr auf die Software verlassen.

Eingabe bei GeoGebra:

Die Ungleichung wird in der Eingabezeile eingegeben. Dabei verwendet man <= für $\leq$ und >= für $\geq$. Falls Dezimalzahlen als Koeffizienten auftreten, schreibt man in GeoGebra einen Punkt für das Komma. Die Randgerade und die gefärbte Lösungsmenge erscheinen im Graphikfenster.

Lineare Ungleichungssysteme bestehen aus zwei oder mehreren linearen Ungleichungen. Jede Ungleichung legt eine Halbebene fest. Der Durchschnitt aller Lösungsmengen bildet die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (das sind also all jene Punkte, die alle Ungleichungen erfüllen).

Eingabe bei GeoGebra:

Bei GeoGebra können Ungleichungssysteme auf zwei Arten eingegeben werden. Man kann jede Ungleichung einzeln eingeben und bekommt jeweils eine gefärbte Halbebene als

Lösungsmenge. Der Bereich der am Ende am dunkelsten gefärbt ist, ist die Lösungsmenge des Systems. Oder man gibt in der Eingabezeile alle Ungleichungen des Systems ein und trennt diese durch &&. Dann werden alle Randgeraden gezeichnet, aber nur die Lösungsmenge aller Ungleichungen gefärbt. Wenn ein System aus vielen Ungleichungen besteht, ist die zweite Variante zu empfehlen, da die Übersichtlichkeit erhöht wird. Beide Möglichkeiten werden in den Abbildungen 5.2 und 5.3 für ein Ungleichungssystem mit drei Ungleichungen dargestellt.

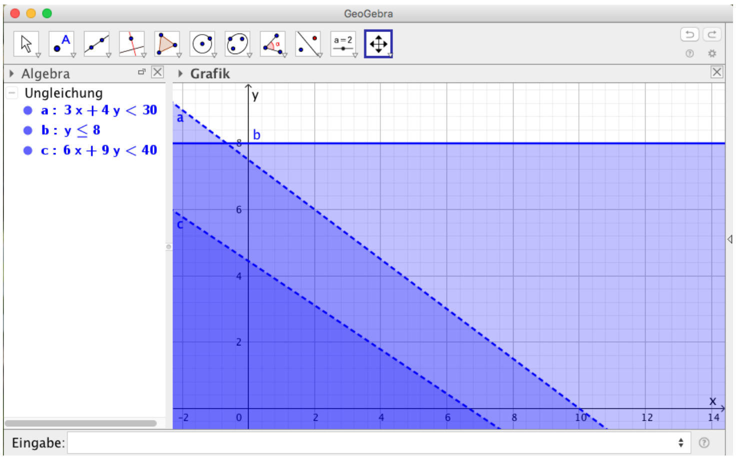


Abbildung 5.2: Einzelne Eingabe der Ungleichungen

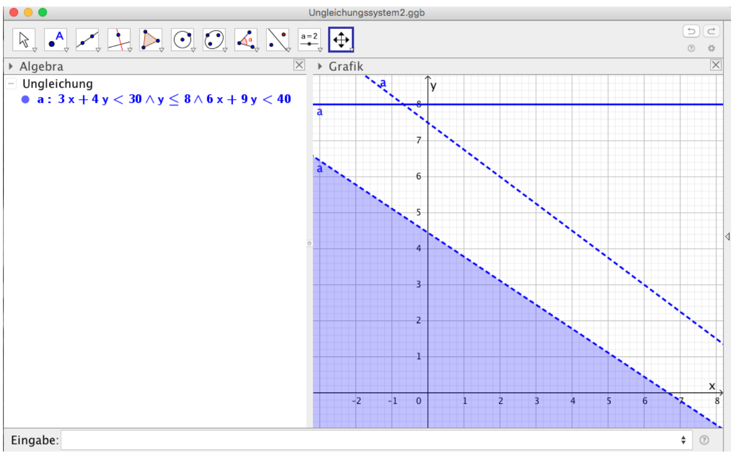


Abbildung 5.3: Gemeinsame Eingabe der Ungleichungen

Nach der Eingabe der Ungleichungen kann die Größe der Achsen bearbeitet werden, um den ganzen Lösungsbereich zu sehen. Dazu kann entweder bei den Graphik - Einstellungen (rechter Mausklick auf das Graphik - Fenster) unter Grundeinstellungen der Bereich der Achsen festgelegt werden, den man sehen will. Dort kann auch die Beschriftung und die Skalierung verändert werden. Oder man verwendet die Scroll - Funktion der Maus. Dadurch verändert sich die Größe der Achsen.

Der Lösungsbereich eines Ungleichungssystems kann beschränkt, unbeschränkt oder leer sein. Dies wird in den folgenden Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6 veranschaulicht.

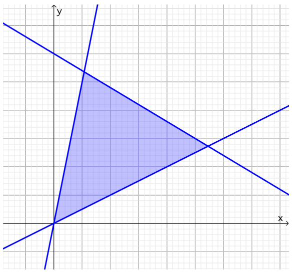


Abbildung 5.4: beschränkt

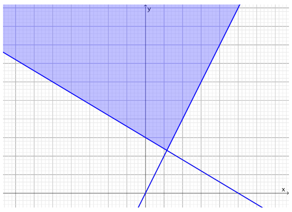


Abbildung 5.5: unbeschränkt

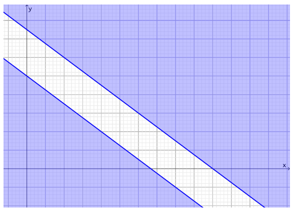


Abbildung 5.6: leer

Das graphische Lösen einer linearen Ungleichung in zwei Variablen und das Bestimmen der Lösungsmenge eines Ungleichungssystems muss im Vorfeld mit den Schülern und Schülerinnen gut eingeübt werden; bildet es doch die Grundlage der linearen Optimierung. In Schulbüchern ([15], [16] oder [17]) wird diesen Themen eine große Anzahl an Beispielen gewidmet. Es gibt dazu auch sehr viele Beispiele, bei denen ein Lösungsbereich graphisch vorgegeben ist und die Schüler und Schülerinnen das passende Ungleichungssystem dazu aufstellen sollen. Solche Aufgaben fallen in die Handlungsdimensionen A und C; diese Dimensionen sind besonders wichtig, um das mathematische Verständnis zu fördern. Besonders wenn die graphische Lösung mittels GeoGebra ermittelt wird, können solche Beispiele helfen die mathematischen Hintergründe und Grundlagen zu wiederholen bzw. verfestigen.

Meist sind auch einige Beispiele zum Modellieren von linearen Ungleichungen angeführt (Dimension A). Aus eigener Unterrichtserfahrung kann ich berichten, dass sich Schüler und Schülerinnen teilweise sehr schwer tun, aus einem Text eine Ungleichung zu modellieren. Deshalb finde ich es wichtig auch diesen Typ von Aufgaben gut zu üben. Die Kompetenz des Modellierens/Transferierens spielt nicht nur in der linearen Optimierung eine große Rolle, sondern wird bei vielen weiteren Themen, die im Schulunterricht behandelt werden (Polynomfunktionen vom Grad 2, 3 und 4; lineare und quadratische Gleichungen; Aufstellen von Formeln) benötigt.

Um die Modellierung eines Ungleichungssystems etwas zu erleichtern, kann meistens eine Tabelle zur übersichtlicheren Darstellung der Textangabe aufgestellt werden. Die Ungleichungen können dann abgelesen werden. Ich möchte dazu ein Beispiel aus einem Schulbuch angeben.

Ein Hersteller für Modeschmuck hat 800 Glasperlen und 500 Metallperlen gekauft. Diese werden nun in zwei verschiedenen Arten von Schmuckstücken verarbeitet. Für jede Kette „Melanie“ werden 20 Glasperlen und 10 Metallperlen verarbeitet, für jede Kette „Sophia“ werden 30 Glasperlen und 20 Metallperlen verarbeitet. Stelle in einem geeigneten Koordinatensystem dar, welche Möglichkeiten der Hersteller zur Produktion von x Stück „Melanie“ und y Stück „Sophia“ hat. [16, S.26, Aufgabe 116]
Dieses Beispiel wird den Handlungsdimensionen A und B zugeordnet.

Der Sachverhalt wird nun übersichtlich in einer Tabelle dargestellt, die Wahl der Variablen ist schon vorgegeben.

	Kette Melanie (x)	Kette Sophia (y)	Verfügbarkeit
Anzahl Glasperlen	20	30	800
Anzahl Metallperlen	10	20	500

Nun können die Ungleichungen zeilenweise abgelesen werden. Die erste Zeile beschreibt den Verbrauch an Glasperlen, die zweite Zeile den Verbrauch an Metallperlen (bei Herstellung von x Ketten „Melanie“ und y Ketten „Sophia“). Die Nichtnegativitätsbedingungen müssen ebenfalls angegeben werden:

I) $20x + 30y \leq 800$

II) $10x + 20y \leq 500$

III) $x \geq 0$

IV) $y \geq 0$

Die Lösung dieses Ungleichungssystems soll nun graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Die Lösungsmenge wurde mit GeoGebra bestimmt; siehe Abbildung 5.7.

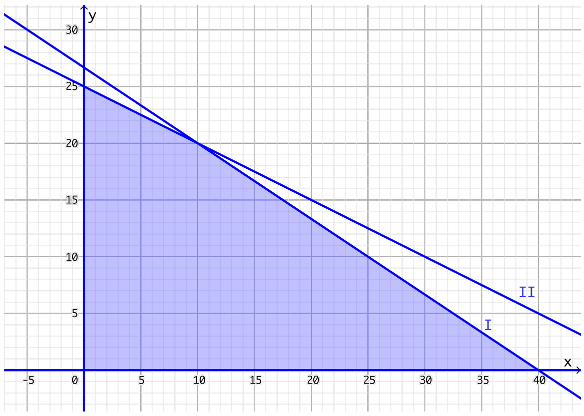


Abbildung 5.7: Möglichkeiten der Produktion für x Ketten „Melanie“ und y Ketten „Sophia“

Der blau markierte Lösungsbereich gibt nun alle möglichen Produktionsmengen an. So kann der Hersteller zum Beispiel jeweils 10 Ketten beider Modelle herstellen. Er könnte auch 40 Ketten des Modells „Melanie“ und keine Kette des Modells „Sophia“ produzieren. Da der Hersteller nur ganze Ketten herstellen kann, kommen alle ganzzahligen Zahlenpaare des Lösungsbereiches als Möglichkeit in Frage.

Im folgenden Teil der Arbeit gehe ich davon aus, dass die Schüler und Schülerinnen das Modellieren und Lösen von linearen Ungleichungssystemen bereits gut geübt haben. Ebenso können sie den Lösungsbereich mit GeoGebra ermitteln.

5.3.2 Lineare Optimierung - Maximumsaufgaben

Bevor ich in der Schule mit den ersten Beispielen starte, möchte ich den Schülern und Schülerinnen einen kurzen Einblick in die Geschichte der linearen Optimierung geben. Dazu würde ich die Entwicklung in den 40er Jahren mit den ersten Anwendungen erläutern und die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften 1975 erwähnen (siehe Kapitel 1). Dadurch sollte die wirtschaftliche Bedeutung dieses Themas hervorgehoben werden.
Sehr oft bekommen Lehrpersonen an Schulen die Fragen gestellt: „Warum lernen wir das? Wozu brauchen wir das?“
Solchen Fragen kann man mit einem kurzen geschichtlichen Einblick bei der linearen Optimierung zuvorkommen. Ebenso glaube ich, dass der Hintergrund der Optimierung sehr gut nachvollziehbar ist. Jede/r kann wohl zustimmen, dass man beim Verkauf von einem beliebigen Produkt den größtmöglichen Gewinn herausholen will bzw. beliebige Kosten möglichst gering halten will.

Ich möchte nun die Begriffe „lineare Optimierungsaufgabe“, „Zielfunktion“, „zulässiger Bereich“ und „optimaler Punkt“ einführen, so wie sie im Schulunterricht gebraucht werden.
Zielfunktion:
Eine Zielfunktion ist eine lineare Funktion Z in zwei Variablen x und y von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$; dabei gilt für alle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $Z(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Zielfunktion wird für die Zielvorgabe formuliert (Gewinn bzw. Kosten).

Lineare Optimierungsaufgabe:

Eine lineare Optimierungsaufgabe ist durch ein lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen und durch eine lineare Zielfunktion gegeben.

Zulässiger Bereich:

Der Lösungsbereich des Ungleichungssystems heißt zulässiger Bereich.

Optimaler Punkt:

Im zulässigen Bereich wird jener Punkt gesucht, dessen Funktionswert bezüglich der Zielfunktion Z möglichst groß bzw. klein ist. Man nennt diesen Punkt den optimalen Punkt.

Anhand zweier Schulbeispiele möchte ich nun die Vorgehensweise beim Lösen von Maximumsaufgaben erläutern. Dazu werde ich auch immer die notwendigen Schritte zur Lösung mit GeoGebra angeben.

Eine Textilfabrik stellt Hemden und Pullover her. Täglich können 70 Hemden und 100 Pullover erzeugt werden, jedoch besteht ein Produktionslimit von insgesamt 140 Stück. Die Herstellungskosten pro Hemd betragen €20, pro Pullover €15. Hemden werden zu €45 pro Stück, Pullover zu €35 pro Stück verkauft.
a) Ermitteln Sie, wie viele Hemden und Pullover erzeugt werden müssen, um maximalen Gewinn zu erzielen.
b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
[15, S.13, Aufgabe 1.17]
Diese Aufgabe wird den Handlungsdimensionen A und B zugeordnet.

Zuerst muss aus der Angabe das lineare Ungleichungssystem modelliert werden. In diesem Fall können die Ungleichungen direkt über die Stückzahlen für Hemden und Pullover aufgestellt werden (Darstellung in Tabellenform braucht man hier nicht), dabei gilt:

x ... Anzahl der Hemden, die erzeugt werden

y ... Anzahl der Pullover, die erzeugt werden

$$
\begin{aligned}
\text{I)} \quad & x \leq 70 \\
\text{II)} \quad & y \leq 100 \\
\text{III)} \quad & x + y \leq 140 \\
\text{IV)} \quad & x \geq 0 \\
\text{V)} \quad & y \geq 0
\end{aligned}
$$

Für die Beschreibung des Gewinns wird die Zielfunktion aufgestellt. Der Gewinn pro Hemd bzw. Pullover wird durch die Differenz aus Verkaufspreis und Herstellungskosten bestimmt: $Z(x, y) = 25x + 20y \rightarrow Max$.
Dieses Ungleichungssystem wird graphisch mit GeoGebra gelöst. Zusätzlich wird die Zielfunktion eingezeichnet. Dazu wählt man einen Wert für Z. Meistens wählt man am Beginn den Wert 0, sodass die Zielfunktion durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. Alle Punkte auf dieser Geraden liefern bezüglich Z den Wert 0. Diese Gerade wird dann parallel verschoben. Dadurch ändert sich jeweils der Wert von Z. Durch die Wertänderung kann auch die Richtung bestimmt werden, in die die Zielfunktion verschoben werden muss (bei Maximumsaufgaben sollt der Wert ständig vergrößert werden).
Diese Verschiebung wird solange durchgeführt, bis der Wert der Zielfunktion möglichst groß ist, aber die Gerade noch durch einen Punkt des zulässigen Bereiches verläuft. Dies ist dann der optimale Punkt.
Die Koordinaten des optimalen Punktes geben dann die optimalen Produktionsmengen für Hemden und Pullover an.

Vorgehensweise bei GeoGebra:

Als erstes wird das Ungleichungssystem bei GeoGebra eingegeben. Ich bevorzuge die gemeinsame Eingabe der Ungleichungen, da der zulässige Bereich besser ersichtlich ist. Dieser Schritt wurde im Vorfeld bereits geübt, sodass dabei im Unterricht keine Probleme entstehen sollten.

Zusätzlich wird dann die Zielfunktion mit dem Wert null eingegeben; dies ist in der Abbildung 5.8 dargestellt. Die Größe des Koordinatensystems muss angepasst werden.

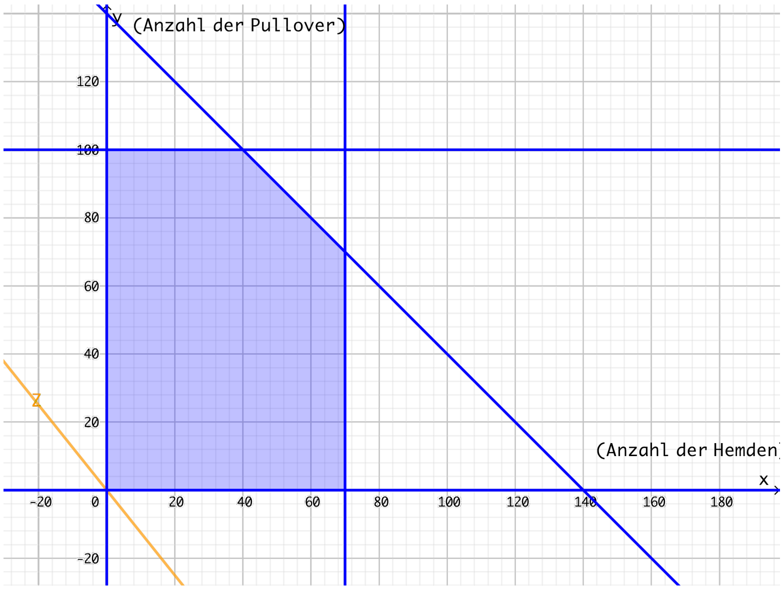


Abbildung 5.8: Lösungsbereich und Zielfunktion mit Wert 0

Nun soll die Zielfunktion parallel verschoben werden. Dazu wird das Pfeil - Symbol in der Werkzeugleiste aktiviert. Die Zielfunktion kann in der Graphik - Ansicht verschoben werden. Gleichzeitig ändert sich der Wert von Z im Algebra - Fenster. Damit kann sofort die Richtung des Verschiebens ermittelt werden; der Wert von Z soll sich vergrößern. In der folgenden Abbildung 5.9 ist das Verschieben der Zielfunktion dargestellt. Es fällt auf, dass durch das Vergrößern des Zielfunktion - Wertes die Gerade „nach oben“ verschoben wird. Das heißt, man soll die Zielfunktion bei Maximumsaufgaben so verschieben, dass sich ihr Ordinatenabschnitt vergrößert.

Der optimale Punkt muss noch im zulässigen Bereich liegen. Die Koordinaten können abgelesen werden: $x = 70$ und $y = 70$.

Die Textilfabrik soll 70 Stück Hemden und 70 Stück Pullover erzeugen um maximalen

Gewinn zu erzielen.

Der maximale Gewinn wird durch Einsetzen des optimalen Punktes in die Zielfunktion bestimmt: $Z(70, 70) = 25 \cdot 70 + 20 \cdot 70 = 3150$ Euro.

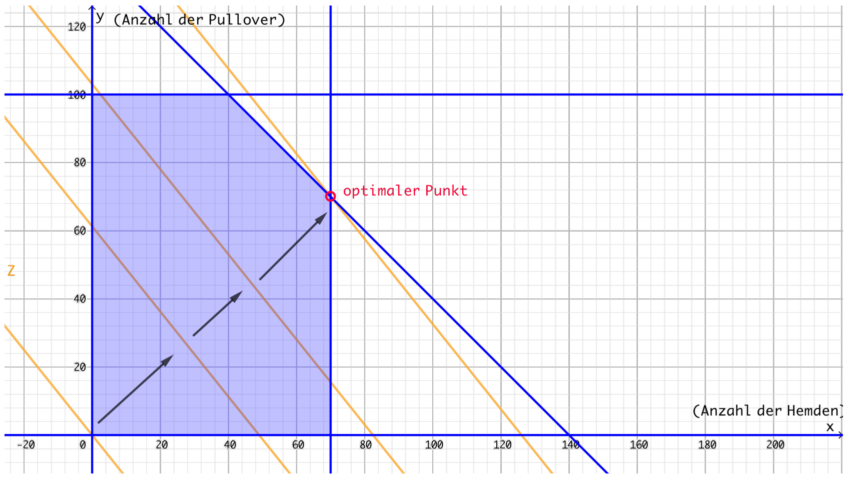


Abbildung 5.9: Parallelverschieben der Zielfunktion und optimaler Punkt

Ein Nachteil der gemeinsamen Eingabe der Ungleichungen liegt darin, dass der optimale Punkt nicht als Schnittpunkt der Geraden, die den zulässigen Bereich begrenzen, bestimmt werden kann. Für die Schnittpunktsberechnung müssen bei GeoGebra zwei Geraden ausgewählt werden. Die begrenzenden Geraden gelten aber als ein Element, da sie gemeinsam eingegeben wurden.

Sollte das Ablesen der Koordinaten also nicht genau möglich sein, muss der Schnittpunkt noch extra bestimmt werden. Das kann man entweder in der CAS - Ansicht durch Gleichsetzen der beiden Geraden machen oder in einer separaten Datei graphisch (die zwei begrenzenden Geraden getrennt als zwei Geraden eingeben und dann Schnittpunkt bestimmen).

Bei diesem Beispiel kann der optimale Punkt gut abgelesen werden, sodass eine separate Berechnung nicht nötig ist. Eventuell muss man in das Graphik - Fenster hineinzoomen (mit Maus scrollen).

An einem zweiten Beispiel möchte ich nun eine andere Möglichkeit zeigen, um bei GeoGebra den optimalen Punkt zu finden.

Lieselotte möchte 180.000 € in zwei verschiedene Aktien investieren. Die erste Aktie kostet 25 € pro Stück, die zweite Aktie kostet 45 € pro Stück. Bei der ersten Aktie ist eine Gewinnausschüttung von 5,30 € pro Stück zu erwarten, bei der zweiten Aktie 2,10 € pro Stück. Lieselotte möchte mindestens 20.000 €, aber höchstens ein Drittel des Geldes in die erste Aktie investieren. Sie möchte allerdings mindestens 1000 Stück von der zweiten Aktie kaufen.
a) Stelle die von Lieselotte geforderten Bedingungen als Ungleichung auf.
b) Berechne, wie viele Stück von jeder Aktie Lieselotte kaufen sollte, damit ein maximaler Gewinn erzielt werden kann. Bestimme den maximalen Gewinn.
[17, S. 13, Aufgabe 1.24]
Diese Aufgabe wird den Handlungsdimensionen A, B und C zugeordnet.

Zuerst werden die Variablen festgelegt und die Ungleichungen modelliert. Ich verzichte an dieser Stelle darauf, die Angabe übersichtlich in einer Tabelle zusammenzufassen. Im Schulunterricht würde ich diese Tabelle im Vorfeld anschreiben, wenn ich das Gefühl habe, dass die Schüler und Schülerinnen noch Schwierigkeiten beim Modellieren haben.

x ... Stückzahl von Aktie 1
y ... Stückzahl von Aktie 2

$$\begin{array}{rll} \text{I)} & 25x \geq 20000 & \text{(Investition in € in Aktie 1)} \\ \text{II)} & 25x \leq 60000 & \text{(Investition in € in Aktie 1)} \\ \text{III)} & 25x + 45y \leq 180000 & \text{(Gesamtinvestition in €)} \\ \text{IV)} & y \geq 1000 & \text{(Mindestanzahl der Aktie 2)} \\ \text{V)} & x \geq 0 & \text{(Nichtnegativität)} \\ \text{VI)} & y \geq 0 & \text{(Nichtnegativität)} \end{array}$$

Als Zielfunktion wird die Höhe des Gewinns formuliert: $Z(x, y) = 5,30x + 2,10y \rightarrow Max.$

Vorgehensweise bei GeoGebra:

Das Ungleichungssystem wird graphisch wieder mit GeoGebra dargestellt. Bei diesem Beispiel wähle ich die Variante, die Ungleichungen einzeln einzugeben. Für die Sichtbarkeit des zulässigen Bereiches muss die Bildgröße durch Scrollen angepasst werden. Der zulässige Bereich ist das dunkelste Vieleck im Koordinatensystem (die Nichtnegativitätsbedingungen lässt man bei der Einzeleingabe meist weg, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen), siehe dazu Abbildung 5.10.

An diesem Beispiel möchte ich die Verwendung des sogenannten Schiebereglers für die Gewinnfunktion erläutern. Zuerst muss in der Werkzeugleiste der Schieberegler aktiviert werden und man klickt auf die Position im Graphikfenster, wo der Schieberegler positioniert werden soll. Es öffnet sich ein eigenes Fenster um die Eigenschaften des Schiebereglers anzulegen. Dabei werden folgende Einstellungen benötigt:

- Zahl (da der Gewinn durch eine Zahl ausgedrückt wird)
- Namen für diese Zahl wählen, z.B.: Gewinn
- unter Intervall wird die Größe des Gewinns festgelegt: von null (kleinstmöglicher Gewinn) bis 20000 (größtmöglicher Gewinn - muss abgeschätzt werden); Schrittweite ist bereits vorgegeben

- unter Schieberegler wird die Ausrichtung des Schiebereglers festgelegt (automatisch horizontal oder man stellt auf vertikal um)

Zum Abschluss wird noch die Gewinnfunktion eingegeben und zwar unter dem Namen des Schiebereglers, also $Gewinn = 5,30x + 2,10y$. Dadurch erscheint die Gewinnfunktion im Graphikfenster (siehe Abb. 5.10). Der Gewinn ist auf null (kleinstmöglicher Wert) gestellt, daher verläuft die Gerade durch den Ursprung. Um die Zielfunktion nun zu

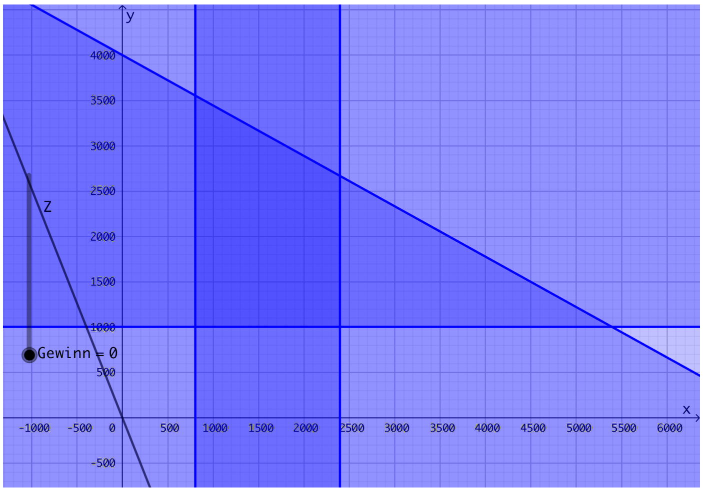


Abbildung 5.10: Zulässiger Bereich und Zielfunktion Z mit Schieberegler

verschieben, muss der „Bewegen - Button“ aktiviert werden. Direkt beim Schieberegler kann der Gewinn erhöht werden und dadurch wird die Gerade der Zielfunktion parallelverschoben. In der Abbildung 5.11 ist die Zielfunktion für einen Gewinn von €17400 dargestellt.

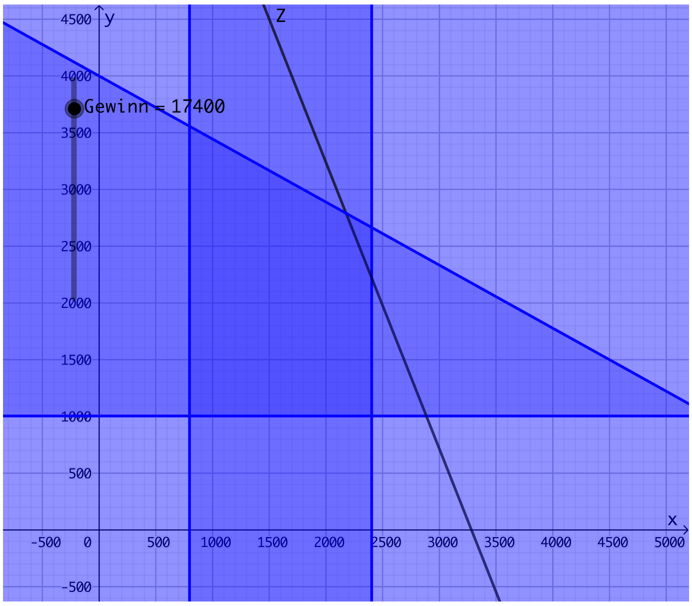


Abbildung 5.11: Verstellen des Schiebereglers

Der Schieberegler kann nun soweit erhöht werden, bis der optimale Punkt erreicht wird. Dazu kann auch ein Zoomen notwendig sein. Um den optimalen Punkt genau zu bestimmen ist es am Besten, den entsprechenden Eckpunkt des zulässigen Bereiches zu berechnen.

Dazu müssen die beiden Randgeraden geschnitten werden, die den Eckpunkt bestimmen. Man öffnet die CAS - Ansicht und kann unter dem Befehl „Löse (<Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen>)“ die zwei Geradengleichungen in den Variablen x und y eingeben, also $Löse(\{25x = 60000, 25x + 45y = 180000\}, \{x, y\})$. Diese Vorgehensweise im CAS kennen die Schüler und Schülerinnen bereits vom Thema lineare Gleichungssysteme (in zwei oder mehreren Variablen).

Dadurch erhält man nun den Schnittpunkt (2400|2666,67). Dieser kommt als optimaler Punkt allerdings nicht in Frage, weil Lieselotte nicht 2666,67 Stück der Aktie 2 kaufen kann. Man sucht also eine ganzzahlige Lösung.

Nun zoomt man soweit zum berechneten Schnittpunkt, dass man ganzzahlige Lösungen im zulässigen Bereich „sehen kann“. In der Abbildung 5.12 sind drei mögliche ganzzahlige Lösungen markiert (Punkte A, B, C), die in der Nähe des berechneten Schnittpunktes liegen. Man wählt nun jenen Punkt als optimalen Punkt aus, der bezüglich der Gewinnfunktion den größten Wert liefert. Graphisch bedeutet das, dass die Gerade der Zielfunktion einen möglichst großen Ordinatenabschnitt besitzt. Für dieses Beispiel bedeutet das, dass der Punkt A der optimale Punkt ist. Seine Koordinaten können abgelesen und der Gewinn berechnet werden:

$x = 2400$ und $y = 2666$.

Lieselotte soll also 2400 Stück der Aktie 1 und 2666 Stück der Aktie 2 kaufen. Sie kann einen Gewinn von €18 318,6 erwarten.

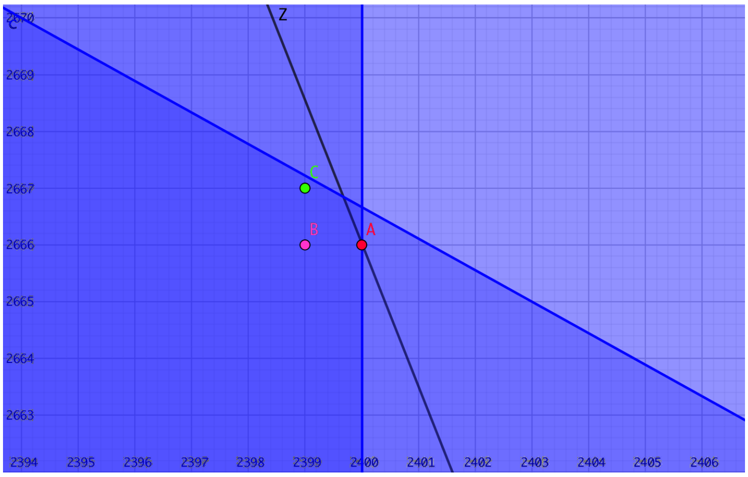


Abbildung 5.12: Aufsuchen einer ganzzahligen Lösung

5.3.3 Lineare Optimierung - Minimumsaufgabe

Im Schulunterricht werden sowohl Maximal- als auch Minimalprobleme behandelt. Ich gebe an dieser Stelle ein Schulbeispiel zu einem Transportproblem an, um das Auffinden des optimalen Punktes zu erläutern. Die Vorgehensweise bei der Modellierung und dem graphischen Lösen des Ungleichungssystems bleibt gleich wie im vorigen Abschnitt.

Ein Holzhändler verfügt über zwei Lagerplätze P_1 und P_2, auf denen er 360 bzw. 240 Paletten Brennholz lagert. Drei Hotels H_1, H_2 und H_3 sollen mit 240, 160 bzw. 200 Paletten beliefert werden. Die Transportkosten in Euro werden in der Tabelle dargestellt:

zu / von	Hotel 1	Hotel 2	Hotel 3
Lagerplatz 1	6	8	4
Lagerplatz 2	6	6	6

a) Stellen Sie das Ungleichungssystem zur Ermittlung der minimalen Kosten auf.
b) Berechnen Sie die minimalen Transportkosten.
[15, S.15, Aufgabe 1.24]
Diese Aufgabe wird den Handlungsdimensionen A und B zugeordnet.

Bei den Aufgaben zu den Transportproblemen bietet sich eine Tabelle zur Darstellung der beförderten Mengen an. Zuerst werden jedoch die Variablen festgelegt. Es sei
x ... Anzahl der Paletten, die von P_1 zu H_1 geliefert werden
y ... Anzahl der Paletten, die von P_1 zu H_2 geliefert werden.

zu / von	H_1	H_2	H_3	Verfügbarkeit
P_1	x	y	$360 - (x + y)$	360
P_2	$240 - x$	$160 - y$	$200 - [360 - (x + y)]$	240
benötigte Menge	240	160	200	

Anhand dieser Tabelle kann das Ungleichungssystem aufgestellt werden. Die Anzahl der transportierten Paletten soll jeweils größer oder gleich null sein (die Klammerausdrücke wurden soweit wie möglich vereinfacht):

I) $x \geq 0$

II) $y \geq 0$

III) $360 - x - y \geq 0$

IV) $240 - x \geq 0$

V) $160 - y \geq 0$

VI) $-160 + x + y \geq 0$

Die Zielfunktion wird für die entstehenden Kosten aufgestellt:

$Z(x, y) = 6x+8y+4\cdot(360-x-y)+6\cdot(240-x)+6\cdot(160-y)+6\cdot(-160+x+y) \rightarrow Min.$

Die Zielfunktion kann noch ausmultipliziert und zusammengefasst werden; dadurch ergibt sich:

$Z(x, y) = 2880 + 2x + 4y \rightarrow Min.$

<u>Vorgehensweise bei GeoGebra:</u>

Die Abbildung 5.13 zeigt den zulässigen Bereich (die Ungleichungen wurden einzeln eingegeben, daher ist das „dunkelste“ Vieleck der zulässige Bereich). Nach Eingabe der Zielfunktion bei GeoGebra mit dem Wert $Z = 0$, verläuft diese unterhalb des Ursprungs. Die Gerade der Zielfunktion kann durch den „Bewegen - Button“ in den Ursprung verschoben werden.

Da die Zielfunktion nun die Kosten des Holzhändlers beschreibt, wird ein Punkt des zulässigen Bereiches gesucht, sodass der Wert der Zielfunktion möglichst gering ist. Dazu wird die Zielfunktion in Richtung des zulässigen Bereiches parallel verschoben. Bereits der erste Punkt des zulässigen Bereiches, der durch das Verschieben getroffen wird, kommt als optimaler Punkt in Frage. Dieser ist in der Abbildung 5.13 ebenfalls markiert.

Die Zielfunktion soll bei Minimalproblemen also einen möglichst kleinen Ordinatenabschnitt aufweisen.

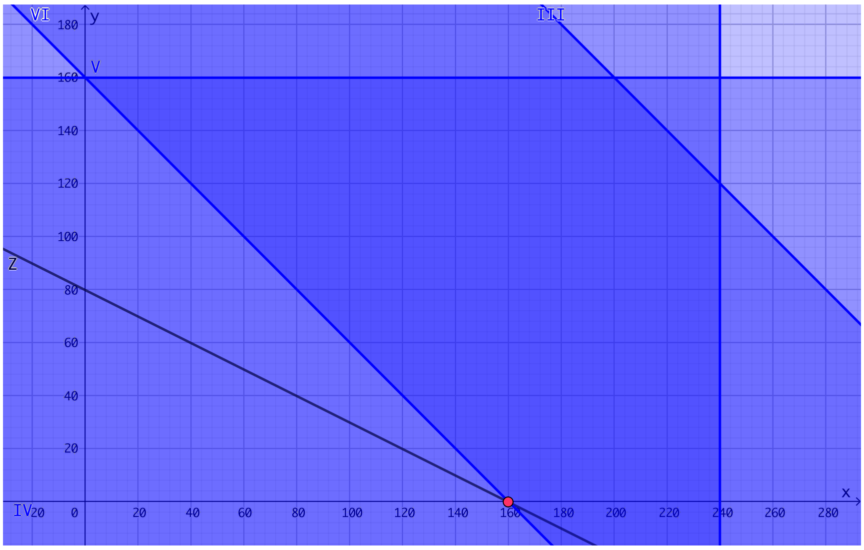


Abbildung 5.13: Graphische Lösung zum Beispiel Holzhändler

Die Koordinaten des optimalen Punktes können abgelesen werden: $(160|0)$. Dadurch ergeben sich folgende Liefermengen:

zu / von	H_1	H_2	H_3
P_1	160	0	200
P_2	80	160	0

Die dabei entstehenden Transportkosten ergeben sich durch Einsetzen des optimalen Punktes in die Zielfunktion: $Z(160, 0) = 2880 + 2 \cdot 160 + 4 \cdot 0 = 3200$ €.

5.3.4 Mehrdeutige Lösung bei der linearen Optimierung

Nicht in allen Fällen gibt es eine eindeutige Lösung des Optimierungsproblems. Auch im Schulunterricht wird darauf eingegangen. Ich finde es wichtig, dass Schüler und Schülerinnen auch wissen, dass nicht jedes Optimierungsproblem eindeutig lösbar ist bzw. manche Probleme auch unlösbar sein können. Damit sollen die Schüler und Schülerinnen Grenzen und Einschränkungen der linearen Optimierung kennen lernen. Ich möchte dazu wieder ein Beispiel aus einem Schulbuch anführen.

Ein Landwirt lagert 2 Arten von Düngemittel D_1 und D_2. Diese enthalten pro Kilogramm Phosphor, Stickstoff und Kalium in den in der Tabelle angegebenen Mengeneinheiten (ME).

	Stickstoff	Phosphor	Kalium
D_1	6	3	10
D_2	6	6	4

Die Mischung beider Düngemittel muss mindestens 54 ME Stickstoff, 30 ME Phosphor, und 48 ME Kalium enthalten. Die Preise pro ME des Düngemittels sind gleich hoch, nämlich 3,5 GE/ME.
a) Erstelle eine graphische Darstellung des möglichen Lösungsbereichs.
b) Ermittle, welche Menge von beiden Düngemitteln verwendet werden sollten, um eine möglichst billige Mischung herzustellen. Berechne die Höhe der Kosten für die optimale Mischung.
[17, S. 17, Aufgabe 1.35]
Diese Aufgabe wird den Handlungsdimensionen A, B und C zugeordnet.

Zuerst muss man wieder das Ungleichungssystem und die Zielfunktion aufstellen. Dabei sei
x ... Menge an Düngemittel D_1 in kg

y ... Menge an Düngemittel D_2 in kg.

$$
\begin{aligned}
\text{I)} \quad & 6x + 6y \geq 54 \\
\text{II)} \quad & 3x + 6y \geq 30 \\
\text{III)} \quad & 10x + 4y \geq 48 \\
\text{IV)} \quad & x \geq 0 \\
\text{V)} \quad & y \geq 0
\end{aligned}
$$

Die Zielfunktion wird für die Kosten formuliert: $Z(x, y) = 3,5x + 3,5y \rightarrow Min.$

Vorgehensweise bei GeoGebra:

Die Ungleichungen werden eingegeben und ebenso die Zielfunktion mit dem Wert 0. In der Abbildung 5.14 ist der blau gefärbte Lösungsbereich und die Zielfunktion Z in rot durch den Ursprung dargestellt. Durch Parallelverschieben der Zielfunktion in den zulässigen Bereich erkennt man, dass die Zielfunktion parallel zur Geraden $6x + 6y = 54$ verläuft. Daher ist es nicht möglich einen eindeutigen optimalen Punkt des zulässigen Bereiches zu finden. Die Lösung ist daher mehrdeutig.
Alle Punkte der roten Strecke zwischen den Endpunkten $(2|7)$ und $(8|1)$ sind optimale Lösungen.

Der Landwirt kann zum Beispiel 2 kg vom Düngemittel 1 und 7 kg vom Düngemittel 2 mischen. Oder er verwendet für die Mischung 5 kg vom Düngemittel 1 und 4 kg vom Düngemittel 2. Es lassen sich einige ganzzahlige Lösungen einfach ablesen, aber natürlich kann der Landwirt auch nicht ganzzahlige Mischungen herstellen.
Die Zielfunktion liefert für alle optimalen Punkte Kosten in Höhe von 31,5 Geldeinheiten (GE).

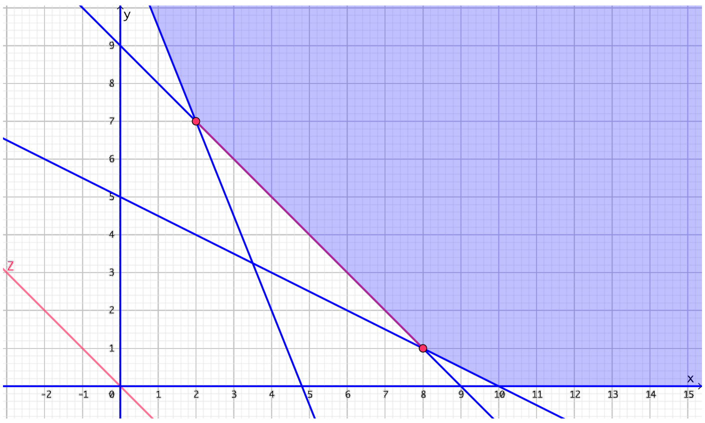


Abbildung 5.14: Mehrdeutige Lösung beim Beispiel Düngemittel

Es ist auch möglich, dass ein Optimierungsproblem unlösbar ist. Dazu möchte ich eine graphische Darstellung angeben. In der Abbildung 5.15 liegt ein unbeschränkter zulässiger Bereich vor. Bei einer Maximierungsaufgabe kann die Zielfunktion nun beliebig große Werte annehmen. Daher kann kein Punkt als optimaler Punkt ausgewählt werden.

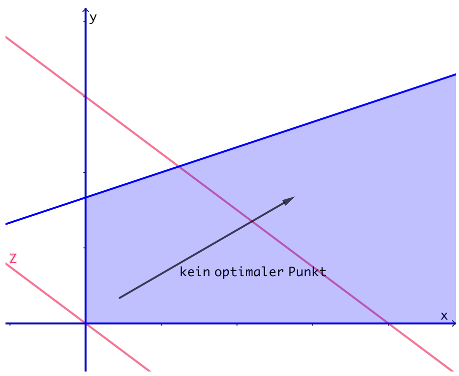


Abbildung 5.15: Unlösbarkeit einer Maximumsaufgabe

5.3.5 Maturaaufgaben

In den Schulbüchern kommen hauptsächlich Aufgaben zur linearen Optimierung vor, die den Handlungsdimensionen A und B zugeordnet werden. Teilweise ist auch die Di-

mension C dabei. Da sowohl im Lehrplan als auch im Kompetenzkatalog für die Reife- und Diplomprüfung alle Handlungsdimensionen vorgeschrieben sind, finde ich es wichtig auch Aufgaben der Dimensionen C und D im Unterricht einzubauen.
Die Dimension C verlangt das Interpretieren und Dokumentieren. Dies kann teilweise bei den Schulbuchaufgaben leicht hinzugefügt werden, indem man die Schüler und Schülerinnen zum Beispiel vor Beginn der Rechnung die notwendigen Schritte für Optimierungsaufgaben beschreiben lässt. Durch Zusatzfragen kann die Interpretation geübt werden; die Interpretation des Ergebnisses ist ohnehin immer zu machen. Bei Aufgaben mit mehrdeutigen Lösungen kann die Interpretation besonders gut geübt werden.

Aber es finden sich kaum Aufgaben zur Handlungsdimension D (Argumentieren und Kommunizieren) in den Schulbüchern. Da aber über den Link `https://aufgabenpool.srdp.at/bhs/index.php?action=14&cmd=3` Übungsbeispiele zur Reife- und Diplomprüfung der BHS abgerufen werden können, kann man auf diese Beispiele zurückgreifen (die Beispiele können dort nach dem Aufgabennamen gesucht werden).
Ich möchte hier Teilaufgaben zweier Beispiele angeben, die besonders die Handlungskompetenzen C und D abprüfen. Beide Beispiele wurden bereits im Rahmen der Reife- und Diplomprüfung gestellt; die gesamten Angaben inklusive Lösungsweg können über den oben genannten Link mit dem entsprechenden Aufgabennamen abgerufen werden.

5.3.5.1 Fruchtsäfte

Ein Unternehmen erzeugt Fruchtsäfte (Apfel-, Birnen-, Trauben- und Orangensaft).

b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt die Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Traubensaft:
$x + 10 \cdot y \leq 200$

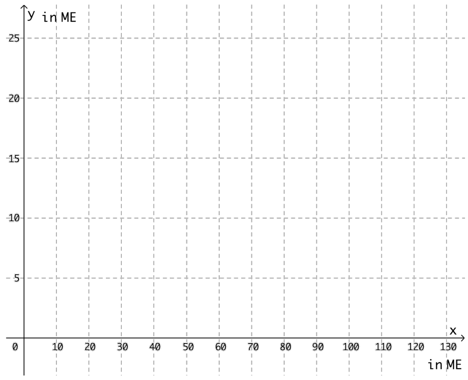
$x + 5 \cdot y \leq 125$

$x \leq 100$

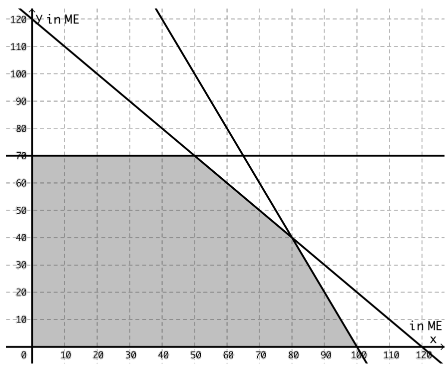
$x \geq 0$

$y \geq 0$

- Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von x ME Apfelsaft und y ME Orangensaft dargestellt.



Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Apfelsaft beträgt €0,12. Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Orangensaft beträgt €0,20. Dabei gilt: 1 ME = 1000 Flaschen.

- Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.
- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
- Ermitteln Sie den maximalen Gewinn pro Tag in €.

Aufgrund einer weiteren Produktionseinschränkung können pro Tag nur maximal 60 ME Apfelsaft hergestellt werden.

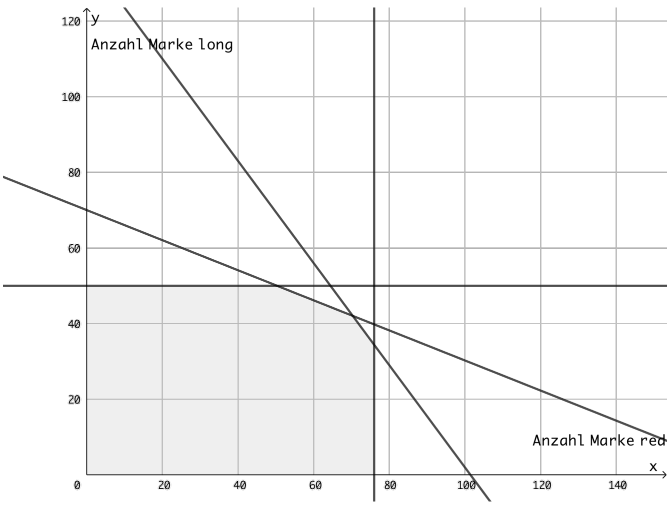
- Begründen Sie, warum sich der maximale Gewinn pro Tag dadurch nicht verändert.

Ich möchte an dieser Stelle nicht auf den genauen Lösungsweg eingehen, da dieser mit der Angabe abrufbar ist. Allerdings möchte ich ein paar Anmerkungen zu den Aufgaben zu den Dimensionen C und D machen.
Bei der Teilaufgabe b) wird das richtige Markieren des Lösungsbereiches der Handlungsdimension C zugeordnet. Bei Verwendung von GeoGebra ist der Lösungsbereich leicht zu erkennen, da dieser automatisch markiert wird. Die Schüler und Schülerinnen müssen die Randgeraden und den Lösungsbereich noch richtig in die vorgegebene Graphik übertragen.
Bei der Teilaufgabe c) wird der letzte Arbeitsauftrag (Begründung) der Handlungsdimension D zugeordnet. In die vorgegebene Graphik kann die zusätzliche Einschränkung leicht eingezeichnet werden. Man kann erkennen, dass sich zwar der zulässige Bereich verkleinert, aber die Zielfunktion und der optimale Punkt nicht beeinflusst werden. Der optimale Punkt und der Gewinn bleiben somit gleich.

5.3.5.2 Gürtelproduktion

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Ledergürtel her.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken red und long dargestellt.



Die Zielfunktion Z beschreibt den Gewinn in Euro: $Z(x, y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

x ... *Anzahl der Gürtel der Marke red*

y ... *Anzahl der Gürtel der Marke long*

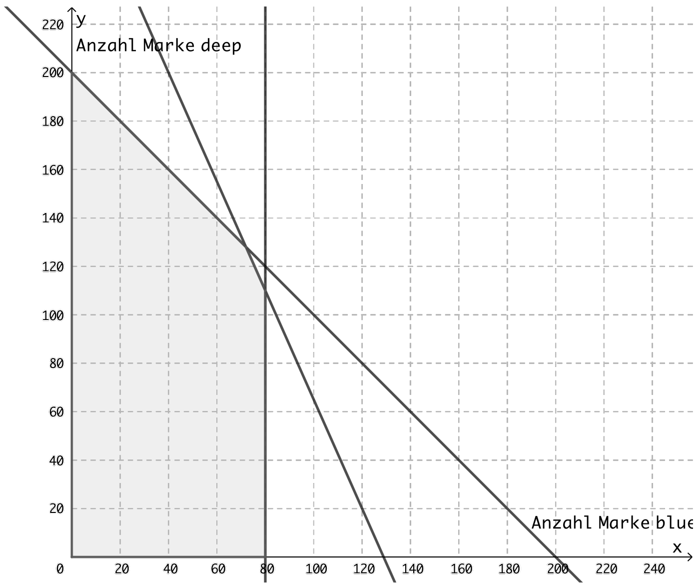
Dieser Gewinn soll maximiert werden.

- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.

- Lesen Sie die optimalen Produktionsmengen näherungsweise ab.

- Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken blue und deep dargestellt.



Jemand behauptet, dass der maximale Gewinn erreicht wird, wenn 60 Gürtel der Marke blue und 120 Gürtel der Marke deep produziert und verkauft werden.

- Erklären Sie, warum man ohne Kenntnis der Zielfunktion beurteilen kann, dass diese Behauptung falsch ist.

Der genaue Lösungsweg kann wieder mit der gesamten Angabe im Internet unter dem obigen Link abgerufen werden.
Bei der Teilaufgabe c) wird das richtige Ablesen des optimalen Punktes der Handlungsdimension C zugeordnet. Dabei kann GeoGebra nur bedingt zur Hilfe genommen werden. Die Ungleichungen zur Beschreibung des zulässigen Bereiches sind nicht angegeben. Daher kann der Lösungsbereich in GeoGebra nicht dargestellt werden (außer man liest die Gleichungen der Randgeraden ab und stellt die Abbildung nach). Die Zielfunkti-

on soll also händisch in die vorgegebene Abbildung gezeichnet und in den optimalen Punkt verschoben werden. Da bei den Abbildungen meist nur die positiven Achsen des Koordinatensystems dargestellt sind, wird das Einzeichnen der Zielfunktion durch den Ursprung erschwert. Das sollte unbedingt im Unterricht geübt werden.
Die Teilaufgabe d) wird der Handlungsdimension D zugeordnet. Hier kann die Erklärung mit dem Hauptsatz der linearen Optimierung erfolgen (der Punkt, der den angegebenen Produktionsmengen entspricht ist kein Eckpunkt bzw. Randpunkt des zulässigen Bereiches).

Anhand dieser zwei ausgewählten Beispiele sieht man, dass nicht alle Teilaufgaben der linearen Optimierung mit Hilfe von GeoGebra gelöst werden können. Teilweise müssen Geraden händisch gezeichnet werden und im Fall von Argumentationen bzw. Interpretationen ist es notwendig auch theoretisches Hintergrundwissen zu haben.
Es ist meiner Meinung nach also besonders wichtig, alle Arten von Beispielen im Schulunterricht zu üben. Sowohl die Übungen aus Schulbüchern, um die Handlungskompetenzen A und B gut abzudecken, aber auch die Übungsbeispiele aus dem Aufgabenpool der Maturaaufgaben, um speziell die Handlungsdimensionen C und D zu trainieren. Dabei soll auch ein guter Mix aus Technologieeinsatz und händischem Rechnen / Konstruieren eingesetzt werden. Auf keinen Fall sollen die Schüler und Schülerinnen den Eindruck bekommen, dass mit GeoGebra alle Aufgaben gelöst werden können. Ein solides Hintergrundwissen ist unbedingt notwendig.

6 Schlusswort

Zum Abschluss der Arbeit möchte ich noch gerne einige persönliche Erfahrungen anbringen. Wie bereits erwähnt, konnte ich schon Unterrichtserfahrung an einer HLW sammeln. Leider war es mir nicht möglich beim Thema der linearen Optimierung auf GeoGebra zurückzugreifen, da die technische Ausstattung nicht gegeben war. Daher mussten alle Beispiele händisch bzw. mit einem graphikfähigen Taschenrechner (TI-82stats) gelöst werden. Die graphische Darstellung des Lösungsbereiches am Taschenrechner ist leider nicht optimal. Das Graphikfenster ist sehr klein und eine Färbung der jeweiligen Halbebenen würde zur Unkenntlichkeit führen. Daher muss auf eine Färbung verzichtet werden. Ebenso ist es nicht möglich die Gerade der Zielfunktion zu verschieben. Also muss man erst wieder händisch mit einem Geodreieck die Parallelverschiebung vornehmen, um den optimalen Punkt zu finden. Diese Vorgangsweise war sehr unbefriedigend und ich hatte im Unterricht immer das Gefühl, dass dieses interessante Thema durch die umständliche graphische Darstellung unbeliebt wurde.
Ich habe sehr schnell auf den Einsatz des Taschenrechners verzichtet. Aber auch die graphische Darstellung durch händische Zeichnungen war teilweise schwierig. Die Konstruktion des zulässigen Bereiches dauerte eine „gefühlte Ewigkeit“. Oft konnte in einer Unterrichtsstunde nur ein einziges Beispiel gelöst werden. Dies war ebenso unbefriedigend.

Schlussendlich habe ich auf die Übungsbeispiele zur Reife- und Diplomprüfung zurückgegriffen. Dadurch wurde der Unterricht wieder interessanter und kurzweiliger. Die Schüler

und Schülerinnen haben wieder deutlich mehr Interesse an der linearen Optimierung gezeigt. Ich denke, dass dies am Aufbau der Maturaaufgaben liegt. Die Unterteilung in Teilaufgaben wurde sehr gut aufgenommen. So konnten auch Schüler bzw. Schülerinnen, denen zum Beispiel die Modellierung der Aufgabe sehr schwer fällt, bei den Teilaufgaben zur Konstruktion des zulässigen Bereiches oder dem Auffinden des optimalen Punktes ihr Wissen und Können unter Beweis stellen. Bei Aufgaben aus den Schulbüchern ist diese Unterteilung leider nicht gegeben. Scheitert man an der Modellierung der Optimierungsaufgabe, so kann das restliche Beispiel nicht mehr gelöst werden.
Ebenso habe ich die Erfahrung gemacht, dass die Schüler und Schülerinnen sehr stolz auf sich selber waren, wenn sie Maturabeispiele lösen können. Ich denke, dass sich der Einsatz dieser Übungsaufgaben im Unterricht lohnt (nicht nur bei der linearen Optimierung) um den Schülern und Schülerinnen auch die Angst vor der Mathematikmatura zu nehmen.

Für mich persönlich war durch diese Erfahrungen klar, dass es doch eine bessere Technologie geben muss, um mathematische Themen, bei denen graphische Darstellungen eine große Rolle spielen, im Unterricht zu behandeln. Privat nutze ich GeoGebra schon mehrere Jahre. Daher werde ich in Zukunft auf jeden Fall GeoGebra auch im Unterricht verwenden und speziell bei der linearen Optimierung nicht darauf verzichten.

Literaturverzeichnis

[1] K. G. Murty. *Linear Programming.* John Wiley & Sons, 1983. ISBN 0-471-09725-X.

[2] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, volume 24. 1744.

[3] R. Tichatschke. „Auf den Schultern von Giganten“ Zur Geschichte der mathematischen Optimierung. `https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb4/INF/TechReports/History-article.pdf`, 2008. Online am 31.1.2018.

[4] K. Schick. *Lineares Optimieren: Einführung in die mathematische Behandlung moderner Probleme in den Wirtschaftswissenschaften*, volume 3. Verlag Moritz Diesterweg, 1981. ISBN 3-425-05316-7.

[5] W. Hochstättler. *Lineare Optimierung.* Springer Spektrum, 2017. ISBN 978-3-662-54425-9.

[6] J. Piehler. *Einführung in die lineare Optimierung.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1970.

[7] T. Ruen. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroelongated_square_pyramid.png`, 2009. Online am 12.2.2018.

[8] T. Ladermann, T. Huke. Lineare Optimierung, was ist das? `users.minet.uni-jena.de/~bezi/Didaktik4/TLadermannTHukeLineareOptimierung.doc`, 2006. Online am 20.2.2018.

[9] H. W. Hamacher, S. Müller. Lineare Optimierung im Mathematikunterricht. `http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/projekte/wimstems/opt1.pdf`. Online am 7.3.2018.

[10] `https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2074/HLW.pdf`. Online am 14.3.2018.

[11] `https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2121/HLA-Land-und-Forstwirtschaft_-Anlage1_2016.pdf`. Online am 14.3.2018.

[12] `https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/srdp_am_clustereinteilung_2018_2017-01-27.pdf`. Online am 14.3.2018.

[13] `https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/08_AMT/Begriffekatalog_ab_2018/srdp_am_kompetenzen_begriffe_2018_hlfs_hum_2017-10-16.pdf`. Online am 14.3.2018.

[14] `https://www.geogebra.org/about`. Online am 15.3.2018.

[15] C. Allerstorfer, M. Langer, A. Siegl. *Angewandte Mathematik @ HUM 2*. Veritas Verlag, 2016. ISBN 978-3-7101-0635-4.

[16] F. Pauer, M. Scheirer-Weindorfer, A. Simon. *Mathematik anwenden HUM 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co KG, 2015. ISBN 978-3-209-08088-2.

[17] B. Wessenberg, P.Hofbauer, H. Metzger-Schuhäker. *Kompetenz: Mathematik, Band 2 HUM*. Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, 2015. ISBN 978-3-230-03871-5.

universität
innsbruck

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/ Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

Datum	Unterschrift