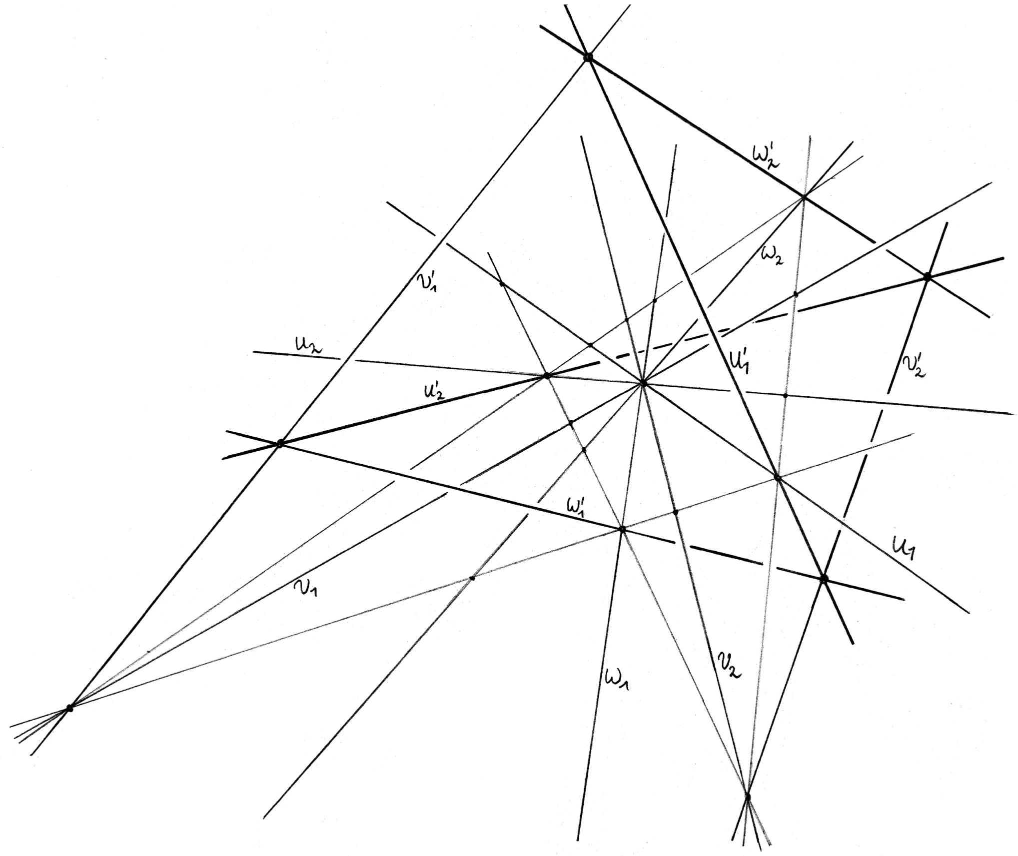
Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Ein kategorisches Axiomensystem für den dreidimensionalen projektiven Raum



Diplomarbeit
im Studiengang Mathematik

vorgelegt von Laurens Wittchow

im Dezember 2018

betreut von Prof. Dr. Tim Netzer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das zentrale Resultat dieser Arbeit ist ein kategorisches Axiomensystem[1] S für den dreidimensionalen projektiven Raum[2] mitsamt einem rein geometrischen Beweis dieser Kategorizität. Dabei wurde angestrebt, die Anzahl der undefinierten Grundbegriffe in S so gering wie möglich zu halten. Auf definierte Begriffe wurde in den Axiomen ganz verzichtet. Um dem sogenannten Dualitätsprinzip im projektiven Raum von vorneherein gerecht zu werden, wurden Geraden als die einzigen Grundobjekte gewählt, auf die sich die Axiome von S beziehen. Sie werden hier als *Strahlen* bezeichnet, um ihren Charakter als elementare Objekte hervorzuheben. Geraden werden ja oft als Punktmengen definiert.

Es ist dann naheliegend, die zweistellige Relation des *sich Treffens* von Strahlen als undefinierte Relation zu nehmen. Genügt diese Relation bereits, um die Theorie des projektiven Raumes[3] kategorisch zu axiomatisieren? Im Prinzip ja, wie Hedrick und Ingold in [1] zeigen. Allerdings führen sie keinen direkten Beweis, sondern berufen sich auf [2], wo Veblen und Young ein kategorisches Axiomensystem für denjenigen Teil der Theorie des projektiven Raumes aufstellen, welcher sich allein auf *Punkte*, *Geraden* und das gegenseitige *Ineinanderliegen* von Punkten und Geraden bezieht. Diese Minimalität in der Anzahl der Grundbegriffe erkaufen sich Veblen und Young dadurch, dass der sogenannte *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* einfach als Axiom angenommen wird (siehe Seite 95 in [2]), ein Satz also, der es sicherlich nicht verdient *Axiom* im ursprünglichen Sinne des Wortes genannt zu werden (in der vorliegenden Arbeit wird der Fundamentalsatz nach langer Vorarbeit erst auf Seite 90 bewiesen).

Dementsprechend kommt das Axiomensystem von Veblen und Young – und damit erst recht dasjenige von Hedrick und Ingold – nicht ohne definierte Begriffe aus (prinzipiell könnten natürlich alle definierten Begriffe eliminiert werden, aber dann wären manche der Axiome faktisch unlesbar). Dem kann durch Hinzunahme einer vierstelligen Relation als weiterem undefinierten Grundbegriff abgeholfen werden, der *Trennungsbeziehung*. Dabei handelt es sich um die projektive Variante der dreistelligen *Zwischenbeziehung* für Punkte einer affinen Geraden. Diesen Weg gehen Borsuk und Szmielew in ihren *Foundations of Geometry* [3], wenngleich auch sie keinen besonderen Wert darauf legen, in ihrem Axiomensystem auf definierte Begriffe zu verzichten.

Auch in der vorliegenden Arbeit wird eine Trennungsbeziehung als undefinierter Grundbegriff angenommen (in Theorem 136 auf Seite 88 wird gezeigt, wie sich diese definieren lässt). Sie bezieht sich statt auf Punkte in einer Geraden auf Strahlen in einem Strahlenbüschel, was anschaulich auch besser zum Charakter der Trennungsbeziehung passt. Neben einer nichtleeren Menge von **Strahlen** als undefinierten Grundobjekten bilden die zweistellige Relation $\mathfrak{T}$ des **sich Treffens** und die vierstellige **Trennungsbeziehung** $\mathcal{T}$ die beiden einzigen undefinierten Grundbegriffe in der Sprache von S. Da keine definierten Begriffe vorkommen, kann das Axiomensystem nun ohne weitere Erklärung angegegben werden.

[1] Ein Axiomensystem heißt **kategorisch**, falls es bis auf Isomorphie genau ein Modell besitzt. Kategorische Axiomensysteme sind insbesondere **modellvollständig**, d.h. in allen Modellen gelten die gleichen Aussagen.

[2] Siehe Seite 13 in Abschnitt I.2 für eine genaue Definition von *(dreidimensionaler) projektiver Raum.*

[3] Gemeint ist die Menge aller wahren Aussagen über den projektiven Raum, welche allein auf das *sich Treffen* von Geraden Begzug nehmen. Wie in dieser Arbeit deutlich werden wird, ist diese Theorie reichhaltiger, als es auf den ersten Blick scheinen mag.

Ein Axiomensystem S für den Strahlenraum

S1 *Jeder Strahl trifft sich selbst.*

S2 *Trifft ein Strahl a einen Strahl b, so trifft auch der Strahl b den Strahl a.*

S3 *Sind a, b distinkte[4] sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch p oder q.*

S4 *Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner c ein Strahl, welcher a, b, p und q trifft, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch c.*

S5 *Sind a, b sich treffende Strahlen, so gibt es zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen.*

S6 *Sind a, b sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner s ein beliebiger weiterer Strahl, so gibt es einen Strahl, welcher jeden der Strahlen a, b, p, q und s trifft.*

S7 *Zu je drei paarweise sich treffenden Strahlen gibt es einen, welcher keinen von ihnen trifft.*

V1 *Sind u, v, w, x paarweise sich treffende distinkte Strahlen und gibt es einander nicht treffende Strahlen p, q, welche u, v, w, x treffen, so gilt $\mathcal{T} u\,x\,v\,w$ oder $\mathcal{T} u\,v\,x\,w$ oder $\mathcal{T} u\,v\,w\,x$.*

V2 *Gilt $\mathcal{T} u\,v\,w\,x$, so treffen sich u, v, w, x paarweise und es gibt einander nicht treffende Strahlen p, q, welche u, v, w, x treffen.*

V3 *Seien $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ Strahlen derart, dass $y_i\,z_j$ sich treffen gdw. $i = j$, ferner z_1, z_2, z_3, z_4 sich paarweise treffen und es einander nicht treffende Strahlen p, q gibt, welche z_1, z_2, z_3, z_4 treffen. Gilt dann $\mathcal{T} y_1\,y_2\,y_3\,y_4$, so auch $\mathcal{T} z_1\,z_2\,z_3\,z_4$.*

O1 *Gilt $\mathcal{T} u\,v\,w\,x$, so sind u, v, w, x distinkt.*

O2 *Gilt $\mathcal{T} u\,v\,w\,x$, so auch $\mathcal{T} v\,w\,x\,u$ und $\mathcal{T} x\,w\,v\,u$.*

O3 *Gilt $\mathcal{T} u\,v\,w\,x$ und $\mathcal{T} u\,v\,x\,y$, so auch $\mathcal{T} u\,w\,x\,y$.*

O4 *Seien A, B Mengen von Strahlen und u, v Strahlen derart, dass $\mathcal{T} u\,a\,b\,v$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es einen Strahl s, sodass $\mathcal{T} u\,a\,s\,b$ für alle $a \in A \backslash s$ und $b \in B \backslash s$.*

Es wurde natürlich angestrebt, das Axiomensystem möglichst redundanzfrei zu halten. Ob tatsächlich jedes Axiom unabhängig von den übrigen ist, wird hier allerdings nicht näher untersucht. Auch auf mögliche Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Räume wird nicht eingegangen. In der Literatur zur axiomatischen Geometrie wird gerne von Axiomensystemen ausgegangen, die sowohl für die Geometrie der Ebene als auch alle höherdimensionalen Räume gültig sind, und die dann lediglich um entsprechende Dimensionsaxiome ergänzt werden müssen, wenn ein Raum konkreter Dimension betrachtet werden soll. Die Vorteile dieses Vorgehens liegen auf der Hand. Es gibt allerdings wichtige, anschaulich keineswegs elementare Sätze (wie z.B. den Satz von Desargues, siehe Theorem 91 auf Seite 46), welche in der Geometrie des dreidimensionalen Raumes aus wenigen elementaren Axiomen beweisbar sind, während sie in der Geometrie der Ebene als Axiome angenommen werden, da sie sich innerhalb derselben nicht auf einfachere Axiome zurückführen lassen (siehe etwa [4]). Auch aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit ein von vorneherein auf den dreidimensionalen Raum zugeschnittenes Axiomensystem entwickelt. Hiervon abgesehen ist es auch gar nicht möglich, mit den in S zugrundegelegten Grundbegriffen die Geometrie der Ebene zu

[4]Wir verwenden das Wort *distinkt* allgemein für *paarweise voneinander verschieden*.

axiomatisieren (je zwei Geraden in einer projektiven Ebene treffen sich). Die Wahl dieser Grundbegriffe wiederum hängt wie bereits erwähnt mit dem Dualitätsprinzip zusammen (siehe Theorem 27 auf Seite 15), welches wesentlich von der Dimension des betrachteten Raumes abhängt.

In allen mir bekannten Werken, in denen ein kategorisches Axiomensystem für den projektiven Raum aufgestellt wurde (nämlich [2, [3] und [4]), wird der entsprechende Kategorizitätsbeweis nicht rein geometrisch geführt, sondern mittels Einführung von Koordinaten, wobei die Theorie der reellen Zahlen vorausgesetzt wird. Dagegen wird in der vorliegenden Arbeit an keiner Stelle von der Theorie der rellen Zahlen Gebrauch gemacht, sondern vielmehr umgekehrt ein vollständig angeordneter Körper rein geometrisch konstruiert (siehe Theorem 145 auf Seite 94) und gezeigt, dass es bis auf Isomorphie nur einen solchen gibt (siehe Theorem 169 im Anhang). Aus diesem Grund, aber auch weil in den drei genannten Werken neben den Geraden Punkte als Grundobjekte angenommen werden, wurde der große Bogen des Kategorizitätsbeweises für das System S weitgehend eigenständig entwickelt. Hingegen entstammen alle größeren Einzelresultate in mehr oder weniger abgewandelter Form den verschiedenen im Literaturverzeichnis angeführten Werken. Als wichtigste Quelle sei neben den bereits genannten [2] und [3] die wunderbare *Geometrie der Lage* [5] von Theodor Reye hervorgehoben, deren klare und anschauliche Ausführungen den Ursprung für viele der Beweisideen in dieser Arbeit bilden, wenngleich sie fern von jeglicher Axiomatik gehalten sind. Die ersten Anregungen zur Beschäftigung mit der projektiven Geometrie fand ich zunächst in *Projective Geometry* [6] von L. Edwards und dann vor allem in *Strahlende Weltgestaltung* [7] von G. Adams.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Kapitel, die unabhängig voneinander gelesen werden können. Im ersten Kapitel werden ausgehend von einem Axiomensystem A für den Anschauungsraum die Grundbegriffe und Axiome von S eingeführt bzw. bewiesen, d.h. es wird (unter Voraussetzung von A) die Existenz eines Modells von S gezeigt. In der Literatur wird ein solcher (relativer) Existenzbeweis gewöhnlich durch Konstruktion eines Koordinatenmodells geführt, wobei auf die Existenz der reellen Zahlen verwiesen wird, die ihrerseits auf rein mengentheoretische Annahmen zurückgeführt werden kann. Der hier gewählte geometrische Weg ist sicherlich umständlicher, hat aber den Vorteil, dass dadurch zugleich eine Anschauung für den projektiven Raum entwickelt wird. Im zweiten Kapitel, dem eigentlichen Kern dieser Arbeit, wird dann ganz unabhängig von dieser Modellkonstruktion bewiesen, dass je zwei Modelle von S isomorph sind. Auch hier wurde angestrebt, möglichst rein geometrisch vorzugehen. Die notwendigen Ausnahmen hiervon bilden die mit dem Präfix *Meta* gekennzeichneten Lemmata und Theoreme.

Notationen

- Wir verwenden das Wort **distinkt** für *paarweise voneinander verschieden*.
- ι bezeichne den logischen **Kennzeichnungsoperator**: Lies $\iota v\, \varphi$ als *dasjenige* v *sodass* φ.
- $\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der positiven ganzen Zahlen und
- $\mathbb{N}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen $\leq n$.
- S_n bezeichne die Gruppe der Permutationen der Menge $\mathbb{N}_n$.
- Wir schreiben kurz $A \backslash a_1, \ldots, a_n$ für $A \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$.
- Eine **Abbildung** oder **Funktion** ist ein Tripel $f = \langle \bar{f}, A, B \rangle$, wobei A, B Mengen sind und $\bar{f} \subseteq A \times B$ eine rechtseindeutige Zuordnung von A nach B. Dabei ist $\bar{f}$ der **Graph** und A ist die **Domäne**, kurz $\operatorname{dom} f$, der Abbildung f.
- Ist f eine Abbildung und X eine Menge, so bezeichne $f\lceil X \rfloor := \{f(x)\,;\; x \in X \cap \operatorname{dom} f\}$ das Bild von X unter f.
- Seien R, R' zwei n-stellige Relationen. Eine Abbildung f heißt R-R'-**Homomorphismus**, falls
  $$R\, a_1 \ldots a_n \Rightarrow R'\, f(a_1) \ldots f(a_n), \qquad \forall a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{dom} f.$$
  Ist f zusätzlich bijektiv und die Umkehrabbildung f^{-1} ein R'-R-Homomorphismus, so ist f ein R-R'-**Isomorphismus**.
- Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt **Symmetrie** einer n-stelligen Relation R, falls
  $$R\, a_1 \ldots a_n \Rightarrow R\, a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(n)}, \qquad \forall a_1, \ldots, a_n.$$
  R heißt X-**symmetrisch**, falls $X \subseteq S_n$ nur Symmetrien von R enthält.

I. Vom Anschauungsraum zum Strahlenraum

Bei den in diesem Kapitel vorausgesetzten Grundbegriffen handelt es sich um drei Sorten von Gegenständen, den **Punkten**, **Geraden** und **Ebenen**, eine symmetrische zweistellige Relation $\mathfrak{I}$, die **Inzidenzrelation**, und eine dreistellige Relation $\mathcal{Z}$, die **Zwischenbeziehung**. Für $\mathfrak{I}ab$ sagen wir *a liegt in b* oder *b liegt in a* oder *a, b liegen ineinander*. Statt $\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{I}a_i b$ sagen wir auch *$a_1, \ldots, a_n$ haben b gemein*. Durch die Wahl der Bezeichnungen für die Grundbegriffe und durch die wechselseitigen logischen Beziehungen, in die sie im folgenden Axiomensystem A gebracht werden, sollte klar werden, welche Phänomene der inneren Anschauung des Raumes gemeint sind.

Ein Axiomensystem A für den Anschauungsraum

A1 *Es gibt zwei distinkte Geraden, welche keine Ebene gemein haben.*

A2 *In jeder Ebene liegt mindestens eine Gerade. In jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.*

A3 *Haben ein Punkt und eine Ebene eine Gerade gemein, so liegen sie ineinander.*

A4 *Zwei distinkte Punkte haben genau eine Gerade gemein.*

A5 *Eine Gerade und ein nicht in ihr liegender Punkt haben genau eine Ebene gemein.*

A6 *Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so haben sie auch eine Gerade gemein.*

A7 *Zu jeder Geraden und jedem nicht in ihr liegenden Punkt gibt es genau eine Gerade, welche in dem Punkt liegt und mit der gegebenen Gerade eine Ebene, aber keinen Punkt gemein hat.*

AV1 *Haben distinkte Punkte $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ eine Gerade gemein, so gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bac}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bca}$.*

AV2 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so sind $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ Punkte, die eine Gerade gemein haben.*

AV3 *Seien ε eine Ebene und $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ drei Punkte in ε, welche keine Gerade gemein haben; sei ferner g eine Gerade, welche in ε liegt, jedoch in keinem der Punkte $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$. Liegt dann in g ein Punkt $\textsc{m}$ sodass $\mathcal{Z}\textsc{amb}$, so liegt in g auch ein Punkt $\textsc{m}'$, sodass $\mathcal{Z}\textsc{am}'\textsc{c}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bm}'\textsc{c}$.*

AO1 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so sind $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ distinkt.*

AO2 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so auch $\mathcal{Z}\textsc{cba}$.*

AO3 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$ und $\mathcal{Z}\textsc{acd}$, so auch $\mathcal{Z}\textsc{bcd}$.*

AO4 *Sind A, B Mengen von Punkten und gibt es einen Punkt $\textsc{p}$ derart, dass $\mathcal{Z}\textsc{abp}$ für alle $\textsc{a} \in A$ und $\textsc{b} \in B$, so gibt es einen Punkt $\textsc{s}$, sodass $\mathcal{Z}\textsc{asb}$ für alle $\textsc{a} \in A \backslash \textsc{s}$ und $\textsc{b} \in B \backslash \textsc{s}$.*

Das Kapitel gliedert sich in vier Abschnitte. In Abschnitt I.1 wird ein Fragment des Axiomensystems A zugrundegelegt. Es handelt sich um die reinen Inzidenzaxiome unter Ausschluss des Parallelenaxioms A7. Diese Axiome gehören der sogenannten absoluten Geometrie an und gelten auch im projektiven Raum. Daher können wir auf die im ersten Abschnitt bewiesenen Resultate zurückgreifen, wenn wir später den projektiven Raum untersuchen. In Abschnitt I.2 kommt dann das Parallelenaxiom hinzu, was die Einführung der sogenannten *Fernelemente* ermöglicht. Es wird gezeigt, dass der um die Fernelemente erweiterte Anschauungsraum den Inzidenzaxiomen des projektiven Raumes genügt, welche die Grundlage für die Untersuchungen in Abschnitt I.3 bilden. In diesem dritten Abschnitt wird wiederum rein axiomatisch gearbeitet, ohne Bezugnahme auf die konkrete Gestalt des im vorhergehenden Abschnitt konstruierten projektiven Raumes. Der Abschnitt gipfelt in dem Beweis der ersten sieben Axiome des Systems S, also derjenigen Axiome, welche allein auf das sich Treffen von Strahlen Bezug nehmen. Sie gelten insbesondere für die Geraden des im zweiten Abschnitt konstruierten konkreten projektiven Raumes. Für diesen wird dann schließlich in Abschnitt I.4 auf der Grundlage des kompletten Axiomensystems A die Trennungsbeziehung eingeführt und bewiesen, dass auch die übrigen sieben Axiome von S gelten.

Es werden verschiedene Inzidenzrelationen $\mathfrak{I}$ innerhalb dieses Kapitels erklärt. Wir vereinbaren gleich allgemein für jeden dieser Fälle die verschiedenen Redeweisen: a **liegt in** b und b **liegt in** a und a, b **liegen ineinander** für

$$\mathfrak{I}ab.$$

Ferner: $a_1, \ldots, a_n$ **haben** b **gemein** für

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{I}a_i b.$$

I.1. Inzidenzstruktur des Anschauungsraumes

Wir setzen zunächst nur die ersten fünf Axiome von A voraus. Sie gelten auch in Räumen mit mehr als drei Dimensionen. Letztere werden später durch Hinzunahme von Axiom A6 ausgeschlossen.

A1 *Es gibt zwei distinkte Geraden, welche keine Ebene gemein haben.*

A2 *In jeder Ebene liegt mindestens eine Gerade. In jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.*

A3 *Haben ein Punkt und eine Ebene eine Gerade gemein, so liegen sie ineinander.*

A4 *Zwei distinkte Punkte haben genau eine Gerade gemein.*

A5 *Eine Gerade und ein nicht in ihr liegender Punkt haben genau eine Ebene gemein.*

1 Satz

Zwei Punkte haben stets eine Gerade gemein.

Beweis: Im Fall von zwei distinkten Punkten gilt dies nach Axiom A4. Der Fall von einem Punkt lässt sich hierauf zurückführen, da es nach Axiom A1 und Axiom A2 einen von ihm verschiedenen Punkt gibt. ■

2 Satz

Eine Gerade g und ein Punkt P haben stets eine Ebene gemein.

Beweis: Nach Axiom A5 genügt es den Fall zu betrachten, dass P in g liegt. Gemäß Axiom A1 gibt es eine von g verschiedene Gerade, und diese hat nach Axiom A4 höchstens einen Punkt mit g gemein; nach Axiom A2 liegt in ihr somit ein nicht in g liegender Punkt Q. Sei ε gemeinsame Ebene von g und Q gemäß Axiom A5. Dann liegt neben g nach Axiom A3 auch P in ε. ■

3 Satz

Je drei Punkte A, B, C haben eine Ebene gemein.

Beweis: Wähle mit Satz 1 eine gemeinsame Gerade g von A und B und mit Satz 2 eine gemeinsame Ebene ε von g und C. Nach Axiom A3 liegen mit g auch A und B in ε. ■

4 Satz

Zwei distinkte Ebenen haben höchstens eine Gerade gemein.

Beweis: Seien α, β zwei Ebenen, welche zwei distinkte Geraden g, h gemein haben. Sei P gemäß Axiom A2 und A4 ein Punkt in h, welcher nicht in g liegt. Gemäß Axiom A5 haben g und P nur eine Ebene gemein. Da P nach Axiom A3 in α und in β liegt, folgt $\alpha = \beta$. ■

Zwei Geraden liegen **windschief**, falls sie keine Ebene gemein haben.

5 Satz

Zu jeder Geraden g gibt es eine windschiefe.

Beweis: Seien a, b zwei zueinander windschiefe Geraden gemäß Axiom A1. Wir können o.E. annehemen, dass g weder zu a noch zu b windschief liegt, also eine Ebene α mit a und eine Ebene β mit b gemein hat. Insbesondere ist g von a und b verschieden, sodass mit Axiomen A2 und A4 die Existenz von nicht in g liegenden Punkten A in a bzw. B in b folgt. Sei h gemeinsame Gerade von A und B gemäß Satz 1. Angenommen h liegt nicht windschief zu g, hat also eine Ebene ε mit g gemein. Gemäß Axiom A3 liegt A in α und ε, und liegt B in β und ε. Da α und β auch die Gerade g mit ε gemein haben, folgt $\alpha = \varepsilon = \beta$ gemäß Axiom A5. Damit haben a, b die Ebene ε gemein, ein Widerspruch. ■

A6 *Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so haben sie auch eine Gerade gemein.*

6 Satz

In jeder Ebene ε liegen drei Punkte, welche keine Gerade gemein haben.

Beweis: Seien g eine Gerade in ε und A, B distinkte Punkte in g gemäß Axiom A2. Nach Axiom A3 liegen A und B in ε. Wähle mit Satz 5 eine zur Geraden g windschiefe Gerade h und mit Satz 2 eine h und A gemeinsame Ebene α. Die Ebenen ε, α haben den Punkt A und damit nach Axiom A6 auch eine Gerade a gemein. Da die Gerade a mit h die Ebene α gemein hat, ist sie von der Geraden g verschieden (denn g, h liegen windschief), hat also gemäß Axiom A4 höchstens einen Punkt mit ihr gemein. Nach Axiom A2 liegt somit in a ein nicht in g liegender Punkt P. Nach Axiom A3 liegt mit a auch P in ε. Da g nach Axiom A4 die einzige gemeinsame Gerade von A und B ist, haben A, B, P keine Gerade gemein. ■

7 Satz

Zu jeder Ebene ε gibt es einen nicht in ε liegenden Punkt.

Beweis: Wähle mit Axiom A1 eine nicht in ε liegende Gerade g, mit Satz 6 einen Punkt A in ε und mit Satz 2 eine g und A gemeinsame Ebene α. Dann haben ε, α den Punkt A und mithin gemäß Axiom A6 auch eine Gerade a gemein. Da die Gerade g nicht in ε liegt, ist sie von der Geraden a verschiedenen und hat daher nach Axiom A4 höchstens einen Punkt mit ihr gemein. Es liegt somit nach Axiom A2 ein Punkt P in g, welcher nicht in a liegt. Mit g liegt nach Axiom A3 auch P in α, d.h. α ist die gemäß Axiom A5 einzige gemeinsame Ebene von a und P. Also liegt P nicht in ε. ■

8 Satz

Zu jeder Ebene ε und jedem Punkt P gibt es eine Gerade, welche in P liegt, jedoch nicht in ε.

Beweis: Sei Q gemäß Satz 7 ein nicht in ε liegender Punkt und sei g gemeinsame Gerade von P und Q gemäß Satz 1. Nach Axiom A3 liegt g nicht in ε. ■

9 Satz

Hat eine Gerade mit einer Ebene mehr als einen Punkt gemein, so liegt sie in ihr.

Beweis: Seien ε eine Ebene und g eine Gerade, welche mit ε zwei distinkte Punkte A und B gemein hat. Wähle mit Satz 7 einen nicht in ε liegenden Punkt C und mit Satz 3 eine in A, B, C liegende Ebene ε'. Dann sind $\varepsilon', \varepsilon$ distinkt und haben gemäß Axiom A6 eine Gerade g' gemein. Nach Axiom A5 liegt die Gerade g' in den Punkten A und B (denn sie hat mit ihnen die Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ gemein) und ist daher gemäß Axiom A4 mit g identisch. ■

10 Satz

Haben zwei Geraden einen Punkt gemein, so haben sie auch eine Ebene gemein.

Beweis: Nach Satz 2 bleibt die Behauptung für zwei distinkte Geraden zu zeigen. Seien also a, b distinkte Geraden, welche einen Punkt P gemein haben. Wähle mit Axiom A2 einen von P verschiedenen Punkt Q in b und mit Satz 2 eine a und Q gemeinsame Ebene ε. Nach Axiom A3 liegt mit a auch der Punkt P in ε. Somit hat die Gerade b die zwei distinkten Punkte P und Q mit der Ebene ε gemein, liegt also nach Satz 9 in ihr. ■

I.2. Einführung der Fernelemente

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir zumindest prinzipiell formal axiomatisch gearbeitet, wenngleich dabei natürlich der Anschauungsraum als intendiertes Modell vor Augen stand. In diesem Abschnitt werden wir uns direkt auf den Anschauungsraum beziehen, also auf ein konkretes Modell (der ersten sieben Axiome) von A. Wir denken uns also in diesem Abschnitt Punkte, Geraden und Ebenen als konkrete Gegenstände (der inneren Anschauung), und die Inzidenzrelation als eine konkrete Relation auf der Menge aller dieser Gegenstände. Wir setzen voraus, dass sie neben den sechs Axiomen aus Abschnitt I.1 noch dem Parallelenaxiom genügen:

A7 *Zu jeder Geraden und jedem nicht in ihr liegenden Punkt gibt es genau eine Gerade, welche in dem Punkt liegt und mit der gegebenen Gerade eine Ebene, aber keinen Punkt gemein hat.*

Zwei Geraden liegen **parallel**, falls sie identisch sind oder eine Ebene, jedoch keinen Punkt gemein haben. Aus Axiom A7 folgt unmittelbar:

11 Satz

Seien g eine Gerade und P ein Punkt. Dann liegt in P genau eine zu g parallele Gerade.

12 Satz

Das Parallel-Liegen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden.

Beweis: Reflexivität und Symmetrie gelten per Definition. Es bleibt zu zeigen, dass zwei Geraden a, b parallel liegen, falls sie jeweils zu einer dritten Geraden c parallel liegen. Wir können dazu o.E. annehmen, dass die Gerade c von den Geraden a und b verschiedenen ist, mit ihnen also jeweils keinen Punkt, aber Ebenen α bzw. β gemein hat. Ferner können wir o.E. annehmen, dass auch a und b keinen Punkt gemein haben, da sie andernfalls gemäß Satz 11 identisch wären. Nach dieser Voraussetzung bleibt zu zeigen, dass a und b eine Ebene gemein haben.

Wähle dazu mit Axiom A2 einen Punkt A in a und mit Satz 2 eine b und A gemeinsame Ebene ε. Gemäß Axiom A3 liegt A in α, sodass also die Ebenen α und ε den Punkt A und damit nach Axiom A6 auch eine Gerade a' gemein haben. Falls a', c parallel liegen, folgt $a' = a$ mit Satz 11, sodass in diesem Fall ε gemeinsame Ebene von a und b ist. Da a', c die Ebene α gemein haben, können wir also o.E. annehmen, dass sie auch einen Punkt gemein haben. Nach Axiom A3 haben dann auch die Ebenen ε und β diesen Punkt gemein, und da er nicht in der ihnen ebenfalls gemeinsamen Geraden b liegt (sonst hätten ihn b, c gemein), folgt $\varepsilon = \beta$ mit Axiom A5. Insbesondere liegt der Punkt A in β, sodass also α und β neben der Geraden c den nicht in ihr liegenden Punkt A gemein haben. Wiederum mit Axiom A5 folgt $\alpha = \beta$, womit auch in diesem Fall eine den Geraden a und b gemeinsame Ebene gefunden ist. ■

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennen wir **Fernpunkte**.[1] Wir erweitern nun die Inzidenzrelation, indem wir festlegen, dass eine Gerade und ein Fernpunkt **ineinanderliegen**, wenn die Gerade ein Element des Fernpunktes ist.[2] Aus Satz 11 folgt unmittelbar:

13 Satz

Ein Punkt und ein Fernpunkt haben genau eine Gerade gemein.

Ein Fernpunkt und eine Ebene **liegen ineinander**, falls sie eine Gerade gemein haben.

14 Satz

In jeder Ebene ε liegen mindestens vier Fernpunkte.

Beweis: Wähle mit Axiom A2 eine Gerade a in ε sowie drei distinkte Punkt A_1, A_2, A_3 in a. Gemäß Axiom A3 liegen dann A_1, A_2, A_3 auch in ε. Sei P gemäß Satz 6 ein Punkt in ε, welcher nicht in a liegt, und sei a_i für $i = 1, 2, 3$ jeweils gemeinsame Gerade von P und A_i gemäß Satz 1. Die Geraden a_1, a_2, a_3 liegen nach Satz 9 in ε und sind von a und damit nach Axiom A4 auch paarweise voneinander verschieden. Da a, a_1, a_2, a_3 paarweise einen Punkt gemein haben, müssen sie somit nach Satz 13 in paarweise verschiedenen Fernpunkten liegen. Diese vier Fernpunkte liegen in ε. ■

15 Satz

Eine Ebene ε und eine nicht in ihr liegende Gerade g haben entweder einen Punkt oder einen Fernpunkt gemein.

[1] Es ist für das Folgende völlig irrelevant, um was für Objekte es sich bei den Fernpunkten handelt. Wichtig ist nur, dass jeder Geraden genau ein solches Objekt zugeordnet wird, und zwar so, dass parallelen Geraden das selbe Objekt entspricht. Ferner sollten diese Objekte von den Punkten, Geraden und Ebenen verschieden sein, damit bei der im Folgenden vorgenommenen Erweiterung der Inzidenzrelation keine Widersprüche entstehen. Entsprechendes gilt auch in Bezug auf die anderen, noch einzuführenden Fernelemente.

[2] Beachte auch hier und im Folgenden die in der Vorbemerkung zu diesem Kapitel vereinbarten Sprechweisen.

Beweis: Angenommen ε und g haben sowohl einen Punkt P als auch einen Fernpunkt gemein. Letzteres bedeutet, dass in ε eine zu g parallele Gerade g' liegt. Da g, g' distinkt sind (denn nach Voraussetzung liegt g nicht in ε), haben sie eine Ebene ε', jedoch keinen Punkt gemein. Insbesondere liegt der Punkt P nicht in g'. Als Punkt von g liegt P jedoch in ε' (Axiom A3). Mit Axiom A5 folgt $\varepsilon = \varepsilon'$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass g nicht in ε liegt.

Angenommen nun, ε und g haben keinen Punkt gemein. Wähle mit Satz 6 einen Punkt A in ε und mit Satz 2 eine g und A gemeinsame Ebene α. Die Ebenen α und ε haben den Punkt A und mithin nach Axiom A6 auch eine Gerade a gemein. Die Geraden g, a liegen parallel, denn sie haben die Ebene α, jedoch keinen Punkt gemein (ein solcher wäre nach Axiom A3 ein gemeinsamer Punkt von g und ε). Der Fernpunkt von a liegt somit sowohl in ε als auch in g. ■

16 Satz

Eine Gerade a und ein nicht in ihr liegender Fernpunkt B haben genau eine Ebene gemein.

Beweis: Wähle mit Axiom A2 einen Punkt P in a und mit Satz 13 eine P und B gemeinsame Gerade b. Die Geraden a und b sind distinkt und haben den Punkt P gemein. Nach Satz 10 haben sie auch eine Ebene ε gemein. Mit der Geraden b liegt auch ihr Fernpunkt B in ε. Damit ist ε gemeinsame Ebene von a und B.

Sei nun ε' beliebige gemeinsame Ebene von a und B. Dann liegt mit a auch der Punkt P in ε' (Axiom A3) und ist damit gemeinsamer Punkt von b und ε'. Da b und ε' auch den Fernpunkt B gemein haben, muss b nach Satz 15 in ε' liegen. Also haben $\varepsilon, \varepsilon'$ die beiden distinkten Geraden a und b gemein und sind damit nach Satz 4 identisch. ■

Zwei Ebenen liegen **parallel**, falls sie identisch sind oder keinen Punkt gemein haben.

17 Lemma

Für zwei Ebenen α und β sind äquivalent:

1. *α und β liegen parallel.*
2. *α und β haben mehr als einen Fernpunkt gemein.*
3. *α und β haben alle ihre Fernpunkte gemein.*

Beweis: Zu „1 $\Rightarrow$ 3“: Seien α, β parallel angenommen und sei a eine beliebige Gerade in α. Es genügt aus Symmetriegründen zu zeigen, dass dann a zu einer in β liegenden Geraden parallel liegt. Wir können dazu o.E. annehmen, dass α und β distinkt sind und somit keinen Punkt gemein haben. Wähle mit Satz 6 einen Punkt B in β und sodann mit Satz 2 eine a und B gemeinsame Ebene ε. Die Ebenen ε und β haben den Punkt B und somit nach Axiom A6 auch eine Gerade b gemein. Die Gerade b liegt zur Geraden a parallel, denn sie hat mit ihr die Ebene ε, aber keinen Punkt gemein (ein solcher wäre nach Axiom A3 auch gemeinsamer Punkt von α und β).

Zu „3 $\Rightarrow$ 2“: Dies folgt aus der Tatsache, dass in einer Ebene nach Satz 14 stets mehr als ein Fernpunkt liegt.

Zu „2 $\Rightarrow$ 1“: Angenommen α und β liegen nicht parallel, sind also distinkt und haben einen Punkt und damit nach Axiom A6 auch eine Gerade g gemein. Nach Satz 16 können α und β neben der Geraden g nicht auch noch einen nicht in ihr liegenden Fernpunkt gemein haben. Also haben sie nur einen Fernpunkt (nämlich den von g) gemein. ■

18 Korollar

Das Parallel-Liegen von Ebenen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Ebenen.

Beweis: Dies ergibt sich aus der Äquivalenz „1 ⇔ 3“ von Lemma 17. ■

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennen wir **Ferngeraden**. Eine Ebene und eine Ferngerade **liegen ineinander**, falls die Ebene ein Element der Ferngerade ist.

19 Satz

Eine Ferngerade und ein Punkt haben genau eine Ebene gemein.

Beweis: Seien ε eine Ebene und P ein Punkt. Zu zeigen ist, dass in P genau eine zu ε parallele Ebene liegt. Die Eindeutigkeit einer solchen Ebene folgt aus Korollar 18, da nichtparalle Ebenen keinen Punkt gemein haben. Zur Existenz: Seien A,B zwei distinkte Fernpunkte in ε gemäß Satz 14 und seien a bzw. b gemeinsame Geraden von P und A bzw. B gemäß Satz 13. Dann haben a, b den Punkt P und mithin nach Satz 10 auch eine Ebene ε' gemein. Nach Axiom A3 liegt P in ε', und da $\varepsilon, \varepsilon'$ die beiden Fernpunkte A und B gemein haben, liegen sie nach Lemma 17 parallel. ■

Ein Fernpunkt und eine Ferngerade **liegen ineinander**, falls sie eine Ebene gemein haben.

20 Satz

Ein Fernpunkt liegt genau dann in einer Ebene, wenn er in deren Ferngeraden liegt.

Beweis: Die Implikation „⇒“ gilt per Definition. Die Implikation „⇐“ folgt aus der Äquivalenz „1 ⇔ 3“ von Lemma 17. ■

21 Satz

Eine Ferngerade und eine nicht in ihr liegende Ebene haben genau einen Fernpunkt gemein.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass eine Ebene α mit der Ferngeraden einer zu ihr nichtparallelen Ebene β genau einen Fernpunkt gemein hat. Dies ist nach Satz 20 äquivalent dazu, dass α und β genau einen Fernpunkt gemein haben. Da sie nicht parallel liegen, haben α und β einen Punkt, damit nach Axiom A6 eine Gerade und mithin deren Fernpunkt gemein. Nach Lemma 17 haben sie keinen weiteren Fernpunkt gemein. ■

22 Satz

Zwei distinkte Fernpunkte A und B haben genau eine Ferngerade gemein.

Beweis: Seien a eine Gerade in A und γ eine gemeinsame Ebene von a und B gemäß Satz 16. Dann liegt auch A in γ, d.h. die Fernpunkte A und B haben die Ebene γ und damit auch deren Ferngerade gemein. Nach Lemma 17 haben sie keine weitere Ferngerade gemein. ■

Die Menge aller Fernpunkte und Ferngeraden nennen wir **Fernebene**. Sie **liegt in** allen Fernpunkten und allen Ferngeraden, wie auch umgekehrt per Definition Letztere allesamt in ihr liegen.

Wir vereinigen nun die Menge der Punkte mit der Menge der Fernpunkte zu einer Menge, deren Elemente wir **Punkte*** nennen. Ähnlich fassen wir die Geraden und Ferngeraden unter dem Wort

Gerade* zusammen und bezeichnen mit **Ebene*** neben den Ebenen auch die Fernebene. Zusammen mit der erweiterten Inzidenzrelation $\mathfrak{I}^*$ bilden sie eine Struktur, die wir im Folgenden einfach den **projektiven Raum** nennen wollen.

23 Theorem

Für den projektiven Raum gelten folgende Aussagen:

1. *Es gibt zwei distinkte Geraden*, welche keine Ebene* gemein haben.*
2. *In jeder Geraden* liegen mindestens vier Punkte*.*
3. *Haben ein Punkt* und eine Ebene* eine Gerade* gemein, so liegen sie ineinander.*
4. *Zwei distinkte Punkte* haben genau eine Gerade* gemein.*
5. *Eine Gerade* und ein nicht in ihr liegender Punkt* haben genau eine Ebene* gemein.*
6. *Eine Gerade* und eine nicht in ihr liegende Ebene* haben genau einen Punkt* gemein.*

Beweis:

1. Dies folgt aus Axiom A1 und der Tatsache, dass die Fernebene in keiner Geraden liegt.
2. In einer Geraden liegen neben ihrem Fernpunkt nach Axiom A2 noch drei Punkte. In einer Ferngeraden liegen nach Satz 14 vier Fernpunkte.
3. Ist der Punkt* ein Punkt, so ist die Gerade* eine Gerade und mithin die Ebene* eine Ebene und die Behauptung folgt aus Axiom A3. Sei also der Punkt* ein Fernpunkt. Dann können wir o.E. annehmen, dass die Ebene* eine Ebene ist. Ist nun die Gerade* eine Gerade, so gilt die Behauptung per Definition; ist sie hingegen eine Ferngerade, so folgt die Behauptung aus Satz 20.
4. Im Fall, dass es sich um zwei Punkte handelt, folgt die Behauptung aus Axiom A4 und der Tatsache, dass Ferngeraden nicht in Punkten liegen. Aus dem selben Grund folgt die Aussage aus Satz 13 im Fall, dass es sich um einen Punkt und einen Fernpunkt handelt. Im verbleibenden Fall von zwei Fernpunkten folgt die Behauptung aus Satz 22 und der Tatsache, dass distinkte Fernpunkte keine Gerade gemein haben.
5. Handelt es sich um eine Gerade und einen Punkt, so folgt die Behauptung aus Axiom A5 und der Tatsache, dass in der Fernebene keine Geraden oder Punkte liegen. Aus dem selben Grund folgt die Aussage aus den Sätzen 16 bzw. 19 im Falle einer Geraden und eines Fernpunktes bzw. einer Ferngeraden und eines Punktes. Im Fall schließlich, dass es sich um eine Ferngerade und einen Fernpunkt handelt, folgt aus Satz 20, dass sie neben der Fernebene keine Ebene gemein haben.
6. Handelt es sich um eine Gerade und eine Ebene, so haben sie nach Satz 15 entweder einen Punkt oder einen Fernpunkt gemein; sie haben aber nur höchstens einen Fernpunkt gemein (da die Gerade nur in einem Fernpunkt liegt) und nach Satz 9 auch nur höchstens einen Punkt. Handelt es sich um eine Ferngerade und eine Ebene, so folgt die Behauptung aus Satz 21 und der Tatsache, dass in einer Ferngeraden keine Punkte liegen. Im verbleibenden Fall, dass es sich nämlich bei der Ebene* um die Fernebene handelt und somit die Gerade* eine Gerade sein muss (denn alle Ferngeraden liegen in der Fernebene), ist der Fernpunkt der Geraden der einzige ihnen gemeinsame Punkt*. ■

I.3. Inzidenzstruktur des projektiven Raumes

Wie bereits angekündigt arbeiten wir in diesem Abschnitt wieder rein axiomatisch, indem wir die in Theorem 23 für den projektiven Raum bewiesenen Aussagen als Axiome annehmen. Wir setzen die selben Grundbegriffe voraus wie in Abschnitt I.1, also drei Sorten von Gegenständen, **Punkte**, **Ebenen** und **Geraden**, sowie eine symmetrische zweistellige **Inzidenzrelation**.

Ein Axiomensystem P für den projektiven Raum

P1 *Es gibt zwei distinkte Geraden, welche keine Ebene gemein haben.*

P2 *In jeder Geraden liegen mindestens vier Punkte.*

P3 *Haben ein Punkt und eine Ebene eine Gerade gemein, so liegen sie ineinander.*

P4 *Zwei distinkte Punkte haben genau eine Gerade gemein.*

P5 *Eine Gerade und ein nicht in ihr liegender Punkt haben genau eine Ebene gemein.*

P6 *Eine Gerade und eine nicht in ihr liegende Ebene haben genau einen Punkt gemein.*

Die Axiomensysteme P und A stimmen in den ersten fünf Axiomen fast überein – nur Axiome A2 und P2 unterscheiden sich voneinander. Die folgenden Sätze 25 und 26 zeigen, dass auch A2 und A6 in P gelten. Dazu benötigen wir:

24 Lemma

Haben zwei distinkte Geraden einen Punkt gemein, so haben sie auch eine Ebene gemein.

Beweis: Seien a, b distinkte Geraden, welche einen Punkt P gemein haben. Dann haben sie nach Axiom P4 keinen weiteren Punkt gemein und mit Axiom P2 folgt die Existenz eines nicht in a liegenden Punktes Q in b. Sei ε eine a und Q gemeinsame Ebene gemäß Axiom P5. Nach Axiom P3 liegt mit a auch der Punkt P in ε. Somit hat die Gerade b die zwei distinkten Punkte P und Q mit der Ebene ε gemein, liegt also nach Axiom P6 in ihr. ■

25 Satz

In jeder Ebene ε liegt mindestens eine Gerade.

Beweis: Seien g, h gemäß Axiom P1 zwei distinkte Geraden, welche keine Ebene gemein haben. Wir können o.E. annehmen, dass weder g noch h in ε liegt. Dann folgt mit Axiom P6, dass g und h jeweils Punkte P bzw. Q mit ε gemein haben. Es ist $P \neq Q$, da g und h nach Lemma 24 keinen Punkt gemein haben. Die nach Axiom P4 existierende gemeinsame Gerade von P und Q liegt nach Axiom P6 in ε. ■

Wir können nun bereits auf alle Sätze zurückgreifen, die allein aus den ersten fünf Axiomen von A bewiesen wurden. Dazu gehört insbesondere Satz 5, welcher besagt, dass es zu jeder Geraden eine windschiefe gibt. Wir führen dazu auch hier die zweistellige Relation **windschief** ein für Geraden, welche keine Ebene gemein haben.

26 Satz

Zwei Ebenen α und β haben stets eine Gerade gemein.

Beweis: Wähle mit Satz 25 eine Geraden a in α, von der wir o.E. annehmen können, dass sie nicht in β liegt. Nach Axiom P6 hat sie somit einen Punkt P mit β gemein. Sei A gemäß Axiom P2 ein von P verschiedener Punkt in a. Nach Axiom P3 liegen P und A in α. Sei g eine zu a windschiefe Gerade gemäß Satz 5. Dann liegt g nicht in der Ebene α, hat also nach Axiom P6 einen Punkt A' mit ihr gemein. Es liegt A' nicht in a, denn nach Lemma 24 haben a, g keinen Punkt gemein. Insbesondere sind die Punkte A, A' distinkt. Sei a' die ihnen gemäß Axiom P4 gemeinsame Gerade. Sie ist von a verschieden und liegt nach Axiom P6 ebenfalls in α. Auch von ihr können wir daher o.E. annehmen, dass sie nicht in β liegt und somit nach Axiom P6 einen Punkt Q mit β gemein hat. Er liegt nach Axiom P3 in α und ist nach Axiom P4 von P verschieden (sonst wäre er neben A ein zweiter gemeinsamer Punkt von a und a'). Die den Punkten P und Q gemeinsame Gerade (wiederum Axiom P4) liegt nach Axiom P6 wie diese sowohl in α als auch in β. ■

Damit gehören alle Sätze von Abschnitt I.1 zur Theorie von P. Axiom P6, das Axiom, wodurch P über Abschnitt I.1 hinausgeht, hat die Eigentümlichkeit, dass es aus Axiom P5 durch Vertauschen der Begriffe *Punkt* und *Ebene* hervorgeht. Solche Sätze nennen wir **Duale** voneinander.

27 Metatheorem (Dualitätsprinzip)

Die Theorie von P enthält mit jedem Satz auch dessen Dual.

Beweis: Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass die Duale der Axiome P1 – P6 aus P folgen. Axiome P5 und P6 sind Duale voneinander und Axiom P3 ist logisch äquivalent zu seinem Dual. Axiom P1 impliziert zusammen mit Lemma 24 sein eigenes Dual. Das Dual von Axiom P4 folgt aus Satz 26 und Satz 4. Es bleibt das Dual von Axiom P2 zu zeigen: In jeder Geraden g liegen mindestens vier Ebenen. Sei dazu h eine zu g windschiefe Gerade gemäß Satz 5, seien P_1, P_2, P_3, P_4 gemäß Axiom P2 vier distinkte Punkte in h und sei ε_i für $i = 1, 2, 3, 4$ gemäß Satz 2 gemeinsame Ebene von g und P_i. Nach Wahl liegt h in keiner der Ebenen ε_i, hat also nach Axiom P6 jeweils nur genau einen Punkt mit ihnen gemein. Mit P_1, P_2, P_3, P_4 sind daher auch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ distinkt. ■

Als erste Anwendung des Dualitätsprinzips führen wir das Dual von Satz 2 an:

28 Satz

Eine Gerade und eine Ebene haben stets einen Punkt gemein.

29 Satz

Zwei Geraden haben genau dann einen Punkt gemein, wenn sie eine Ebene gemein haben.

Beweis: Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist gerade die Aussage von Satz 10, die Implikation „$\Leftarrow$“ das Dual dazu. ■

Zwei Geraden **treffen** sich, falls sie eine Ebene gemein haben. Dies ist nach Satz 29 äquivalent dazu, dass sie einen Punkt gemein haben, wovon wir im Folgenden stillschweigend Gebrauch machen werden.

30 Satz

Seien a, b distinkte sich treffende Geraden, sodass sie also einen Punkt P und eine Ebene ε gemein haben. Dann liegt jede a und b treffende Gerade in ε oder in P.

Beweis: Sei c eine a und b treffende Gerade und angenommen, c liegt nicht in P. Dann hat c mit a und b jeweils von P verschiedene Punkte A bzw. B gemein. Diese sind nach Axiom P4 auch voneinander verschieden (da $a \neq b$) und liegen nach Axiom P3 beide in ε. Nach Axiom P6 liegt damit auch c in ε. ■

31 Satz

Seien a, b, c drei Geraden, welche eine Ebene ε, jedoch keinen Punkt gemein haben. Dann liegt jede a, b und c treffende Gerade in ε.

Beweis: Sei g eine a, b und c treffende Gerade, welche also mit a, b, c respektive Punkte A, B, C gemein hat. Diese liegen nach Axiom P3 in ε und sind nach Voraussetzung nicht alle identisch. Also hat g zwei distinkte Punkte mit der Ebene ε gemein und liegt damit nach Axiom P6 in ihr. ■

Geraden $a_1, \ldots, a_n$ liegen **cozyklisch**, falls sie sich paarweise treffen und es zueinander windschiefe Geraden p, q gibt, welche jeweils $a_1, \ldots, a_n$ treffen.

32 Satz

Geraden $a_1, \ldots, a_n$ liegen genau dann cozyklisch, wenn sie einen Punkt und eine Ebene gemein haben.

Beweis: Zu „$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung haben $a_1, \ldots, a_n$ paarweise einen Punkt und eine Ebene gemein, sodass wir o.E. annehmen können, dass zwei von ihnen, etwa a_1, a_2, distinkt sind. Seien P ein gemeinsamer Punkt und ε eine gemeinsame Ebene von a_1, a_2. Seien p, q gemäß Voraussetzung windschiefe Geraden, welche jeweils $a_1, \ldots, a_n$ treffen. Nach Satz 30 liegen sie jeweils in einem der beiden Elemente P oder ε, nicht aber beide im selben Element, da sie sich nicht treffen. Wir können daher o.E. annehmen, dass etwa q in ε aber nicht in P liegt, mithin p in P aber nicht in ε. Dann haben a_1, a_2, q keinen Punkt gemein, denn als solcher käme nach Theorem 23.4 nur P in Frage. Da die Geraden $a_1, \ldots, a_n$ jeweils die drei Geraden a_1, a_2, q treffen, liegen sie nach Satz 31 in der Ebene ε. Dual analog folgt, dass a_1, a_2, p keine Ebene gemein haben und somit $a_1, \ldots, a_n$ im Punkt P liegen.

Zu „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung haben die Geraden $a_1, \ldots, a_n$ einen Punkt P sowie eine Ebene ε gemein. Insbesondere treffen sie sich paarweise, sodass die Existenz von zwei sie treffenden, aber zueinander windschiefen Geraden zu zeigen bleibt. Wähle mit Satz 8 eine Gerade p in P, welche nicht in ε liegt, und dual eine Gerade q in ε, welche nicht in P liegt. Insbesondere treffen p und q die Geraden $a_1, \ldots, a_n$. Wir können o.E. annehmen, dass mindestens zwei der Geraden $a_1, \ldots, a_n$ distinkt sind; der Fall $a_1 = \cdots = a_2$ kann hierauf durch Wahl einer von der Geraden a_1 verschiedenen, aber sie treffenden Geraden (etwa p), zurückgeführt werden. Seien also $i, j \in \mathbb{N}_n$ mit $a_i \neq a_j$ gewählt. Nach Axiom P4 haben dann a_i, a_j nur den Punkt P, mithin a_i, a_j, q keinen Punkt gemein. Gemäß Satz 31 liegt somit jede a_i, a_j, q treffende Gerade in ε. Also treffen sich p, q nicht. ■

Das folgende Theorem zeigt, dass die ersten sieben Axiome von S aus P folgen, wenn sie auf (projektive) Geraden und die definierte Relation des sich Treffens bezogen werden.

33 Theorem

1. *Jede Gerade trifft sich selbst.*
2. *Trifft eine Gerade a eine Gerade b, so trifft auch die Gerade b die Gerade a.*
3. *Sind a, b distinkte sich treffende Geraden und sind p, q zwei a und b treffende Geraden, welche nicht einander treffen, so trifft jede a und b treffende Gerade auch p oder q.*

4. *Sind a, b distinkte sich treffende Geraden und sind p, q zwei a und b treffende Geraden, welche nicht einander treffen, und ist ferner c eine Gerade, welche a, b, p und q trifft, so trifft jede a und b treffende Gerade auch c.*

5. *Sind a, b sich treffende Geraden, so gibt es zwei a und b treffende Geraden, welche nicht einander treffen.*

6. *Sind a, b sich treffende Geraden und sind p, q zwei a und b treffende Geraden, welche nicht einander treffen, und ist ferner s eine beliebige weitere Gerade, so gibt es eine Gerade, welche jede der Geraden a, b, p, q und s trifft.*

7. *Zu je drei paarweise sich treffenden Geraden gibt es eine, welche keine von ihnen trifft.*

Beweis:

1. Gemäß Axiom P2 liegt in jeder Gerade ein Punkt, den sie also mit sich selbst gemein hat.

2. Dies gilt per Definition.

3. Nach Voraussetzung haben a, b einen Punkt P und eine Ebene ε gemein und nach Satz 30 liegt jede a und b treffende Gerade in P oder in ε. Dies gilt insbesondere für die beiden Geraden p, q, und da sie sich nicht treffen, liegt eine von ihnen in P, die andere in ε. Jede a und b treffende Gerade hat also mit der einen den Punkt P oder mit der anderen die Ebene ε gemein.

4. Nach Voraussetzung liegen a, b, c cozyklisch, haben also nach Satz 32 einen Punkt P und eine Ebene ε gemein. Da nach Satz 30 jede a und b treffende Gerade in ε oder in P liegt, trifft sie in jedem Fall c.

5. Nach Voraussetzung haben a, b einen Punkt P und eine Ebene ε gemein, liegen also gemäß Satz 32 cozyklisch.

6. Nach Satz 30 (bzw. im Fall $a = b$ nach Voraussetzung) haben a, b, q einen Punkt oder eine Ebene gemein. Gemäß dem Dualitätsprinzip können wir o.E. letzteres annehmen, d.h. a, b, q haben eine Ebene ε gemein. Wähle mit Satz 28 einen gemeinsamen Punkt S von s und ε, mit Satz 2 eine gemeinsame Ebene γ von p und S und mit Satz 26 eine gemeinsame Gerade c von γ und ε. Als Gerade in ε trifft c die Geraden a, b und q, als Gerade in γ auch die Gerade p. Die Ebene γ ist von ε verschieden, denn sonst wäre sie gemeinsame Ebene von p und q. Mit Axiom P5 folgt, dass die Gerade c im Punkt S liegt und damit auch s trifft.

7. Seien a, b, c drei paarweise sich treffende Geraden. Im Fall $a = b = c$ folgt die Existenz einer sie nicht treffenden Gerade mit Satz 5. Wir können also o.E. annehmen, dass a von b und c verschieden ist. Nach Satz 30 haben a, b, c einen Punkt oder eine Ebene gemein, wobei wir gemäß dem Dualitätsprinzip o.E. letzteres annehmen können, d.h. a, b, c haben eine Ebene ε gemein. Nach Axiom P4 hat a mit b und c jeweils nicht mehr als einen Punkt gemein, sodass wir mit Axiom P2 einen Punkt A in a wählen können, welcher weder in b noch in c liegt, sowie in b einen Punkt B, welcher nicht in a liegt. Dann sind die Punkte A, B distinkt und liegen nach Axiom P3 in ε. Nach Axiom P6 liegt daher auch die ihnen gemäß Axiom P4 gemeinsame Gerade d in ε und ist von den Geraden a, b, c verschieden, hat also gemäß Axiom P4 jeweils nicht mehr als einen Punkt mit ihnen gemein. Nach Axiom P2 liegt daher ein Punkt P in d, welcher in keiner der Geraden a, b, c liegt. Wähle mit Satz 8 eine Gerade g in P, welche nicht in der Ebene ε liegt, also gemäß Axiom P6 neben P keinen Punkt mit ihr gemein hat. Dann hat die Gerade g mit keiner der Geraden a, b, c einen Punkt gemein, denn einen solchen hätte sie nach Axiom P3 auch mit ε gemein. ■

I.4. Einführung der Trennungsbeziehung

In diesem Abschnitt wird an Abschnitt I.2 angeknüpft, d.h. die Worte *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* beziehen sich wie dort auf den Anschauungsraum, während sich die Worte *Punkt**, *Gerade** und *Ebene** auf den projektiven Raum beziehen. Da die Inzidenzrelation $\mathfrak{I}^*$ des projektiven Raumes mit der Inzidenzrelation $\mathfrak{I}$ des Anschauungsraumes auf dem Träger des letzteren übereinstimmt, müssen sie sprachlich nicht auseinandergehalten werden. Das selbe gilt für die definierten Relationen des *Gemein-Habens*, des *Windschief-Liegens* und des *sich Treffens* (da die Fernebene in keiner Geraden liegt). Insofern der projektive Raum in Betracht kommt, können wir nach Theorem 23 auf die Resultate von Abschnitt I.3 zurückgreifen. Wie dort gezeigt wurde, zählen dazu auch sämtliche in Abschnitt I.1 bewiesenen Sätze. Auf Letztere werden wir uns aber auch dann berufen können, wenn wir Aussagen über den Anschauungsraum treffen wollen. Sie haben also für diesen Abschnitt zweierlei Bedeutung.

Wir setzen das komplette Axiomensystem A für den Anschauungsraum voraus, also neben den sieben Inzidenzaxiomen auch die sieben Ordnungsaxiome:

AV1 *Haben distinkte Punkte $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ eine Gerade gemein, so gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bac}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bca}$.*

AV2 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so sind $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ Punkte, die eine Gerade gemein haben.*

AV3 *Seien ε eine Ebene und $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ drei Punkte in ε, welche keine Gerade gemein haben; sei ferner g eine Gerade, welche in ε liegt, jedoch in keinem der Punkte $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$. Liegt dann in g ein Punkt $\textsc{m}$ sodass $\mathcal{Z}\textsc{amb}$, so liegt in g auch ein Punkt $\textsc{m}'$, sodass $\mathcal{Z}\textsc{am}'\textsc{c}$ oder $\mathcal{Z}\textsc{bm}'\textsc{c}$.*

AO1 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so sind $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ distinkt.*

AO2 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$, so auch $\mathcal{Z}\textsc{cba}$.*

AO3 *Gilt $\mathcal{Z}\textsc{abc}$ und $\mathcal{Z}\textsc{acd}$, so auch $\mathcal{Z}\textsc{bcd}$.*

AO4 *Sind A, B Mengen von Punkten und gibt es einen Punkt $\textsc{p}$ derart, dass $\mathcal{Z}\textsc{abp}$ für alle $\textsc{a} \in A$ und $\textsc{b} \in B$, so gibt es einen Punkt $\textsc{s}$, sodass $\mathcal{Z}\textsc{asb}$ für alle $\textsc{a} \in A \backslash \textsc{s}$ und $\textsc{b} \in B \backslash \textsc{s}$.*

34 Satz

Haben distinkte Punkte $\textsc{a}, \textsc{b}, \textsc{c}$ eine Gerade gemein, so gilt genau einer der drei Fälle:

$$\mathcal{Z}\textsc{abc} \quad \text{oder} \quad \mathcal{Z}\textsc{bac} \quad \text{oder} \quad \mathcal{Z}\textsc{bca}.$$

Beweis: Dass mindestens einer der drei Fälle gilt, ist gerade die Aussage von Axiom AV1. Der mittlere und der rechte Fall schließen sich gegenseitig aus, da sie nach Axiom AO3 gemeinsam einen Widerspruch zu Axiom AO1 implizieren:

$$\mathcal{Z}\textsc{bac} \wedge \mathcal{Z}\textsc{bca} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\textsc{aca}.$$

Hierauf lässt sich mit Axiom AO2 die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Auftretens des linken mit einem der beiden anderen Fälle zurückführen:

$$\mathcal{Z}\textsc{abc} \wedge \textsc{bac} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\textsc{cba} \wedge \textsc{cab}$$

und

$$\mathcal{Z}\textsc{abc} \wedge \textsc{bca} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\textsc{abc} \wedge \textsc{acb}.$$

■

35 Satz

Seien A, B, C Punkte, welche keine Gerade gemein haben, und seien A', B', C' Punkte derart, dass $\mathcal{Z}BA'C$ und $\mathcal{Z}AB'C$ und $\mathcal{Z}AC'B$. Dann haben auch A', B', C' keine Gerade gemein.

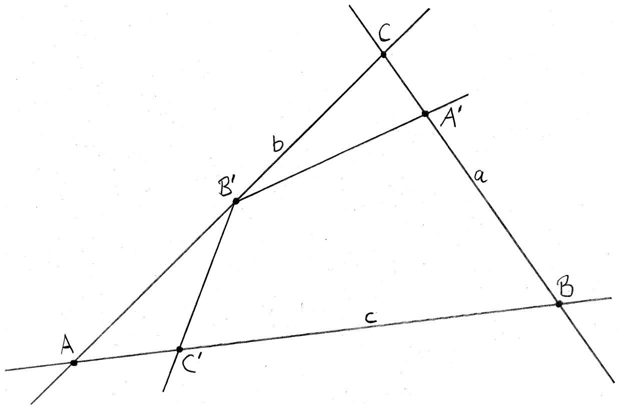


Abbildung I.1.

Beweis: Gemäß den Axiomen AO1 und AV1 sind die Punkte B, A', C bzw. A, B', C bzw. A, C', B jeweils distinkt und haben respektive Geraden a, b, c gemein. Es sind a, b, c distinkt, da A, B, C keine Gerade gemein haben. Nach Axiom A4 sind somit auch die Punkte A', B', C' distinkt. Angenommen, sie haben eine Gerade gemein. Dann können wir gemäß Axiom AV1 und aus Symmetriegründen o.E. annehmen, dass $\mathcal{Z}A'B'C'$ (beachte Axiom AO2).

Nach Axiom A4 liegt die Gerade b in keinem der Punkte A', C', B, und diese haben auch keine Gerade gemein. Sei ε gemeinsame Ebene von A, B, C gemäß Satz 6. Nach Axiom A6 liegen die Geraden a, b, c in ε, also nach Axiom A3 auch die Punkte A', B', C'. Gemäß Axiom AV3 (angewendet auf die Ebene ε, die Punkte A', C', B und die Gerade b) folgt die Existenz eines Punktes P in b sodass $\mathcal{Z}A'PB$ oder $\mathcal{Z}C'PB$. Gemäß den Axiomen AV2 und A4 liegt der Punkt P im ersten Fall in a, im zweiten Fall in c, ist also (als Punkt von b) im ersten Fall mit C, im zweiten Fall mit A identisch. Es folgt also $\mathcal{Z}A'CB$ oder $\mathcal{Z}C'AB$. Beides steht nach Satz 34 im Widerspruch zu den Voraussetzungen. ■

36 Satz

Seien a, b Geraden, welche einen Punkt P gemein haben und seien u_1, u_2 zueinander parallele, nicht in P liegende Geraden, welche mit a, b respektive Punkte A_1, B_1 bzw. A_2, B_2 gemein haben. Dann gilt:

1. $\mathcal{Z}PA_1A_2 \Leftrightarrow \mathcal{Z}PB_1B_2$ *und*
2. $\mathcal{Z}A_1PA_2 \Leftrightarrow \mathcal{Z}B_1PB_2$.

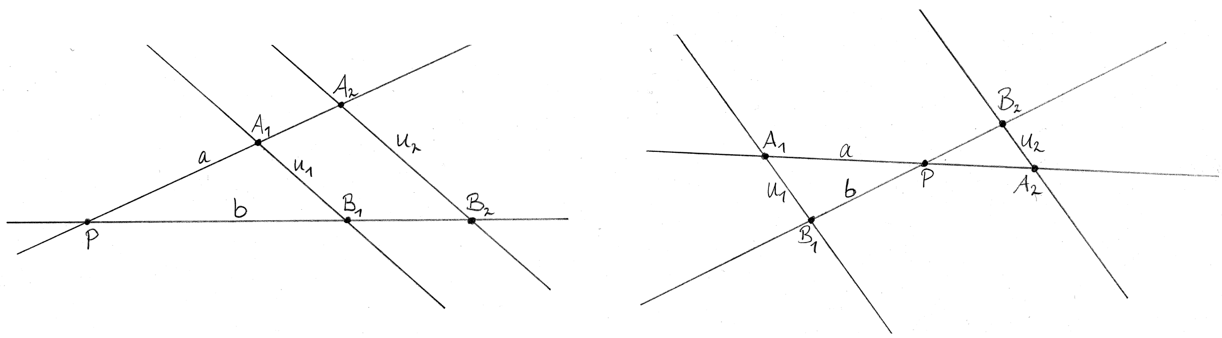


Abbildung I.2.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es jeweils die Implikation „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Da für $i = 1,2$ die Gerade u_i nicht in P liegt, ist sie von den Geraden a, b verschieden und hat somit nach Axiom A4 außer A_i bzw. B_i keine weiteren Punkte mit a bzw. b gemein. Im Fall $a = b$ gilt daher $A_1 = B_1$ und $A_2 = B_2$ und die Behauptung ist trivial. Wir können also o.E. annehmen, dass $a \neq b$, mithin $A_1 \neq B_1$ und $A_2 \neq B_2$. Wiederum gemäß Axiom A4 haben dann P, A_2, B_2 keine Gerade gemein. Nach Axiom AO1 gilt wegen der Voraussetzung $\mathcal{Z}PA_1A_2$ bzw. $\mathcal{Z}A_1PA_2$ ferner $A_1 \neq A_2$, sodass also u_1, u_2 distinkt sind und mithin keinen Punkt gemein haben. Letzteres bedeutet insbesondere, dass u_1 weder in A_2 noch in B_2 liegt und $B_1 \neq B_2$. Sei ε gemeinsame Ebene von a, b gemäß Satz 10. Nach Axiom A3 liegen die Punkte P, A_1, B_1, A_2, B_2 in ε, gemäß Axiom A6 auch die Gerade u_1.

Zu 1: Gilt $\mathcal{Z}PA_1A_2$, so folgt mit Axiom AV3 (angewendet auf die Ebene ε, die Punkte P, A_2, B_2 und die Gerade u_1) die Existenz eines Punktes B in u_1, sodass $\mathcal{Z}PBB_2$ oder $\mathcal{Z}A_2BB_2$. Gemäß den Axiomen AV2 und A4 liegt B im ersten Fall in b, im zweiten Fall in u_2. Letzterer Fall ist somit ausgeschlossen, da u_1, u_2 keinen Punkt gemein haben. Also liegt B in b und es gilt $\mathcal{Z}PBB_2$. Damit ist $B = B_1$ der den Geraden u_1, b gemeinsame Punkt, womit $\mathcal{Z}PB_1B_2$ gezeigt ist.

Zu 2: Gilt $\mathcal{Z}A_1PA_2$, so gilt nach Satz 34 weder $\mathcal{Z}PA_1A_2$ noch $\mathcal{Z}PA_2A_1$ und mithin nach 1. weder $\mathcal{Z}PB_1B_2$ noch $\mathcal{Z}PB_2B_1$. Wiederum gemäß Satz 34 folgt $\mathcal{Z}B_1PB_2$. ■

37 Satz

Seien a, b, c Geraden, welche einen Punkt P gemein haben und seien u_1, u_2 zueinander parallele, nicht in P liegende Geraden, welche mit a, b, c respektive Punkte A_1, B_1, C_1 bzw. A_2, B_2, C_2 gemein haben. Dann gilt*

$$\mathcal{Z}A_1B_1C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Z}A_2B_2C_2.$$

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es die Implikation „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Da für $i = 1,2$ die Gerade u_i nicht im Punkt* P liegt, ist sie von den Geraden a, b, c verschieden, hat mit ihnen also gemäß Axiom A4 respektive nur den Punkt A_i, B_i, C_i gemein. Im Fall $u_1 = u_2$ gilt daher $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ und $C_1 = C_2$ und die Behauptung ist trivial. Wir können also o.E. annehmen, dass u_1, u_2 eine Ebene ε, aber keinen Punkt gemein haben. Insbesondere gilt also $A_1 \neq A_2$ und $B_1 \neq B_2$ und $C_1 \neq C_2$. Nach Axiom A3 liegen die Punkte $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ in der Ebene ε, gemäß Axiom A6 auch die Gerade b. Wegen der Voraussetzung $\mathcal{Z}A_1B_1C_1$ sind die Punkte A_1, B_1, C_1 nach Axiom AO1 distinkt. Mit Theorem 23.4 folgt, dass die Gerade b in keinem der Punkte A_1, A_2, C_1, C_2 liegt, und die Punkte A_1, C_1, A_2 bzw. C_1, C_2, A_2 jeweils distinkt sind und keine Gerade gemein haben. Wir zeigen $\mathcal{Z}A_2B_2C_2$ durch Fallunterscheidung:

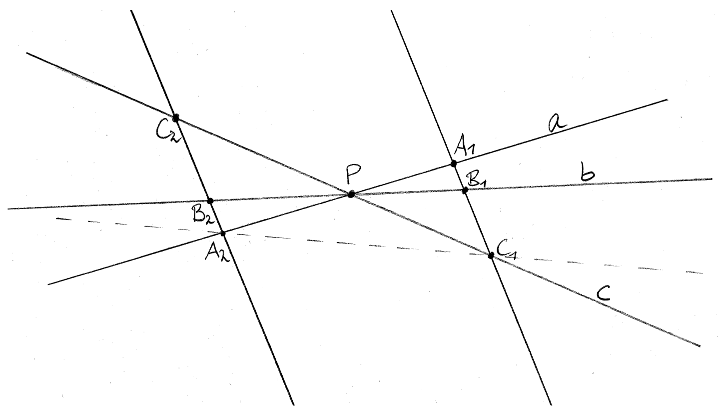


Abbildung I.3.

Fall $\mathcal{Z}A_1PA_2$: Dann ist P ein Punkt und nach Satz 36.2 gilt auch $\mathcal{Z}C_1PC_2$. Gemäß Axiom AV3 (angewendet auf die Ebene ε, die Punkte C_1, C_2, A_2 und die Gerade b) folgt die Existenz eines Punktes B in b sodass $\mathcal{Z}C_1BA_2$ oder $\mathcal{Z}C_2BA_2$. Der erste Fall ist nach Satz 35 (angewendet auf die Punkte A_1, C_1, A_2 und die Punkte B, P, B_1) ausgeschlossen, da B, P, B_1 die Gerade b gemein haben. Es gilt also $\mathcal{Z}C_2BA_2$. Der Punkt B liegt in u_2, denn er hat nach Axiom AV2 eine Gerade mit A_2, C_2 gemein und nach Axiom A4 kann es sich dabei nur um die Gerade u_2 handeln. Damit ist $B = B_2$ der einzige gemeinsame Punkt von b und u_2 und es gilt $\mathcal{Z}C_2B_2A_2$. Mit Axiom AO2 folgt $\mathcal{Z}A_2B_2C_2$.

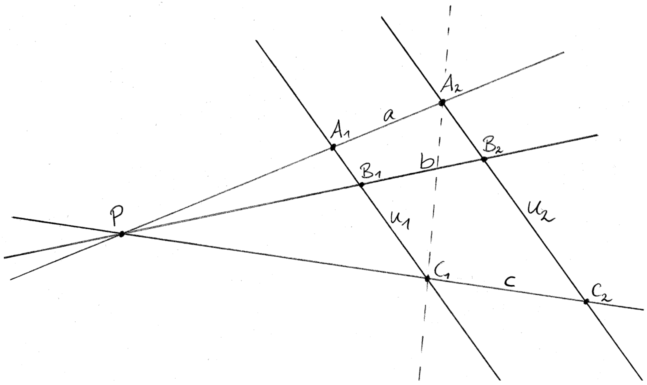


Abbildung I.4.

Fall $\neg\mathcal{Z}A_1PA_2$: Dann gilt nach Satz 36.2 auch $\neg\mathcal{Z}C_1PC_2$. Es folgt, dass für *jeden* Punkt B in b weder $\mathcal{Z}A_1BA_2$ noch $\mathcal{Z}C_1BC_2$ gilt, denn gemäß den Axiomen AV2 und A4 liegt B im ersten Fall in a, im zweiten Fall in c, ist also nach Theorem 23.4 in jedem Fall mit dem Punkt* P identisch. Gemäß Axiom AV3 (angewendet auf die Ebene ε, die Punkte A_1, C_1, A_2 und die Gerade b) folgt die Existenz eines Punktes Q in b sodass $\mathcal{Z}C_1QA_2$. Gemäß Axiom AV3 (angewendet auf die Ebene ε, die Punkte C_1, A_2, C_2 und die Gerade b) folgt die Existenz eines Punktes B in b sodass $\mathcal{Z}A_2BC_2$. Gemäß den Axiomen AV2 und A4 liegt B in u_2 und ist daher mit B_2 identisch. Also gilt $\mathcal{Z}A_2B_2C_2$. ■

38 Lemma

Seien α eine Ebene und z eine Gerade in α. Dann gilt:

1. *Es gibt eine zu z windschiefe Gerade q, welche mit α keinen Punkt gemein hat.*
2. *Ist q eine zu z windschiefe Gerade, welche mit α keinen Punkt gemein hat, so hat sie mit jeder von α verschiedenen Ebene in z genau einen Punkt gemein. Dabei entsprechen distinkten Ebenen distinkte Punkte.*

Beweis:

1. Wähle mit Satz 7 einen nicht in α liegenden Punkt P und mit Satz 14 eine vom Fernpunkt von z verschiedenen Fernpunkt Q in α. Sei q gemeinsame Gerade von P und Q gemäß Satz 13. Mit P liegt nach Axiom A3 auch q nicht in α. Da q, α den Fernpunkt Q gemein haben, haben sie somit nach Satz 15 keinen Punkt gemein. Nach Axiom A3 haben daher auch q, z keinen Punkt gemein. Somit liegen q, z windschief, denn nach Wahl von Q liegen sie nicht parallel.
2. Da q, z windschief liegen, liegt der Fernpunkt Q von q nicht in z. Dagegen liegt Q nach Satz 15 in α, da q, α keinen Punkt gemein haben. Nach Satz 16 ist α die einzige gemeinsame Ebene von z und Q. Ist also β eine beliebige von α verschiedene Ebene in z, so liegt Q nicht in β. Damit liegt auch q nicht in β und mit den Sätzen 15 und 9 folgt, dass q, β genau einen Punkt B gemein haben. Da q, z windschief liegen, liegt B nach Satz 10 nicht in z. Gemäß Axiom A5 ist daher β die einzige gemeinsame Ebene von z und B. ■

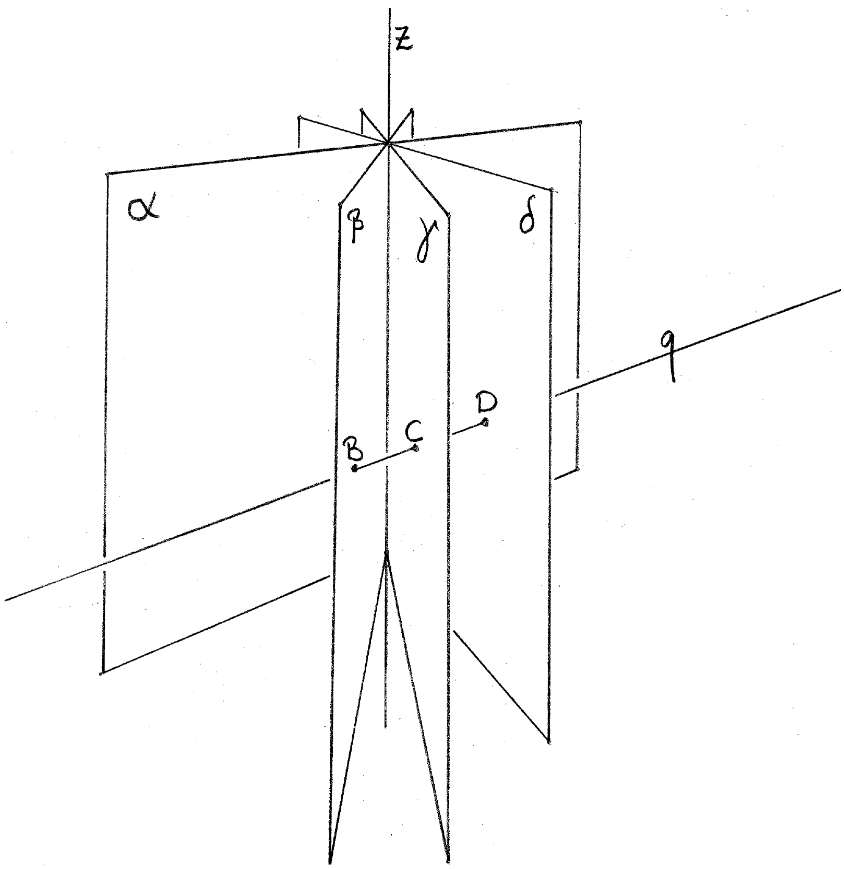


Abbildung I.5.

Wir definieren eine vierstellige Relation $\mathcal{T}$ auf der Menge aller Ebenen durch:

$\mathcal{T}\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$	:gdw.	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ haben eine Gerade z gemein und es gibt eine zu z windschiefe Gerade q, welche mit α keinen Punkt, mit β, γ, δ respektive Punkte B, C, D gemein hat derart, dass $\mathcal{Z}BCD$.

39 Satz

Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distinkte Ebenen, welche eine Gerade z gemein haben. Dann gilt $\mathcal{T}\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma$ oder $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\delta\,\gamma$ oder $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$.

Beweis: Nach Lemma 38 gibt es eine zu z windschiefe Gerade q, welche mit α keinen Punkt, mit β, γ, δ respektive distinkte Punkte B, C, D gemein hat. Gemäß Axiom AV1 gilt mindestens einer der Fälle $\mathcal{Z}DBC$ oder $\mathcal{Z}BDC$ oder $\mathcal{Z}BCD$. ■

40 Satz

Gilt $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distinkt.

Beweis: Dies folgt aus Lemma 38.2 und der Tatsache, dass Punkte B, C, D mit $\mathcal{Z}BCD$ nach Axiom AO1 distinkt sind. ■

41 Satz

Gilt $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, so auch $\mathcal{T}\beta\,\gamma\,\delta\,\alpha$ und $\mathcal{T}\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$.

Beweis: Nach Voraussetzung haben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine Gerade z gemein und es gibt eine zu z windschiefe Gerade q, welche mit α keinen Punkt, mit β, γ, δ respektive Punkte B, C, D gemein hat, sodass $\mathcal{Z}BCD$. Nach Axiom AO2 gilt auch $\mathcal{Z}DCB$ und mithin $\mathcal{T}\alpha\,\delta\,\gamma\,\beta$. Damit ist gezeigt:

$$\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\alpha\,\delta\,\gamma\,\beta. \tag{I.1}$$

Sei nun Z ein Punkt in z gemäß Axiom A2 und sei η gemeinsame Ebene von q und Z gemäß Satz 2. Nach Axiom A3 liegen neben Z auch die Punkte B, C, D in η, sodass also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemäß Axiom A6 respektive Geraden a, b, c, d mit η gemein haben. Nach Axiom A5 liegt der Punkt Z in a, b, c, d und liegen die Punkte B, C, D respektive in den Geraden b, c, d (beachte, dass η von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschieden ist, da z, q windschief liegen). Die Geraden q, a haben keinen Punkt gemein (einen solchen hätte q nach Axiom A3 auch mit α gemein), liegen also parallel (denn sie haben die Ebene η gemein).

Die Gerade z ist von der Geraden b verschieden (da z, q windschief) und hat mit ihr den Punkt Z gemein, liegt also nicht im Fernpunkt B' von b. Sei q' gemeinsame Gerade von D und B' gemäß Satz 13. Nach Satz 40 sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distinkt. Insbesondere liegt nach Lemmma 38.2 der Punkt D nicht in β. Also liegt nach Axiom A3 auch q' nicht in β und da q', β den Fernpunkt B' gemein haben, haben sie nach Satz 15 keinen Punkt gemein. Nach Axiom A3 haben somit auch q', z keinen Punkt gemein, liegen also windschief (da z nicht in B' liegt). Mit Lemma 38.2 folgt, dass q' mit den Ebenen α und γ respektive Punkte A' und C' gemein hat. Nach Satz 15 liegt mit D und B' auch die Gerade q' in η, mithin nach Axiom A3 auch die Punkte A', C'. Mit Axiom A5 folgt, dass A' in a und C' in c liegt.

Nach Lemma 38.2 liegen die Punkte C, C' nicht in den Ebenen α, β, δ, sind also insbesondere von D verschieden. Da die Geraden q, q' distinkt sind (denn q, α haben keinen Punkt gemein) und den Punkt D gemein haben, folgt mit Axiom A4, dass q nicht in C' und q' nicht in C liegt. Ferner liegt nach Axiom A3 der Punkt C nicht in b, der Punkt C' nicht in a. Aus $\mathcal{Z}DCB$ folgt nun $\mathcal{Z}C'CZ$ mit Satz 36.2 (angewendet auf die Geraden q, c im Punkt C sowie die parallelen Geraden q', b). Mit Satz 36.1 (angewendet auf die Geraden c, q' im Punkt C' sowie die parallelen Geraden q, a) folgt hieraus $\mathcal{Z}C'DA'$. Also gilt $\mathcal{T}\beta\,\gamma\,\delta\,\alpha$.

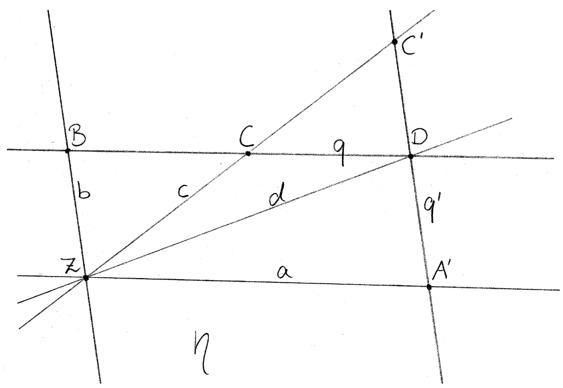


Abbildung I.6.

Damit ist gezeigt:

$$\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\beta\,\gamma\,\delta\,\alpha. \tag{I.2}$$

Aus (I.1) und (I.2) ergibt sich auch die zweite behauptete Symmetrie:

$$\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\alpha\,\delta\,\gamma\,\beta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha.$$

■

42 Lemma

Es gelte $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ und es sei q eine Gerade, welche mit α keinen Punkt, mit β,γ,δ respektive Punkte B, C, D gemein hat. Dann gilt $\mathcal{Z}BCD$.

Beweis: Nach Voraussetzung haben $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ eine Gerade z gemein und es gibt eine zu z windschiefe Gerade u_1, welche mit α keinen Punkt, mit β,γ,δ respektive Punkte B_1, C_1, D_1 gemein hat sodass $\mathcal{Z}B_1C_1D_1$. Ferner sind $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ nach Satz 40 distinkt. Es liegt keiner der Punkte B, C, D in z, denn sonst wäre er nach Axiom A3 gemeinsamener Punkt von q und α. Somit liegen q, z windschief, denn in einer ihnen gemeinsamen Ebene lägen nach Axiom A3 die Punkte B und C, von denen wegen $\beta \neq \gamma$ nach Axiom A5 einer in z liegen müsste. Mit Satz 15 folgt, dass die Fernpunkte Q bzw. U der Geraden q und u_1 in α liegen, jedoch in keiner der Ebenen β,γ,δ.

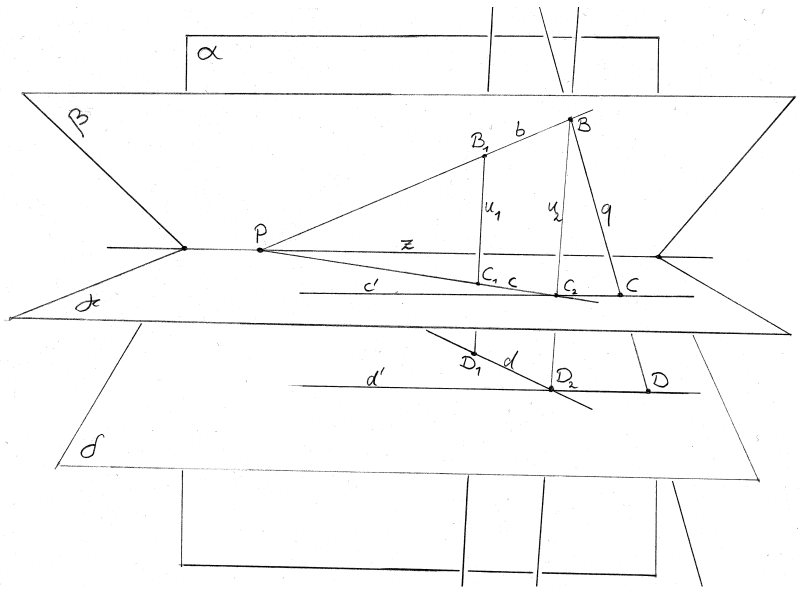


Abbildung I.7.

Sei nun u_2 gemeinsame Gerade von B und U gemäß Satz 13. Auch u_2 liegt windschief zu z, denn als gemeinsame Ebene käme gemäß den Axiomen A3 und A5 nur β in Frage, aber U liegt nicht in β. Da u_1, u_2 parallel liegen, haben sie eine Ebene η gemein (im Fall $u_1 = u_2$ folgt dies aus Axiom A2 und Satz 10). Gemäß Axiom A3 liegen die Punkte B_1, C_1, D_1 und B in η. Da die Gerade z zu u_1 windschief liegt, liegt sie nicht in der Ebene η, hat also gemäß Theorem 23.6 genau einen Punkt* P mit ihr gemein. Da sie zu z windschief liegen, liegen die Geraden u_1, u_2 nach Satz 29 nicht in P. Seien b, c, d gemäß Theorem 23.4 die gemeinsamen Geraden von P und respektive B_1, C_1, D_1 (letzteres sind Punkte, sodass es sich bei b, c, d nicht um Ferngeraden handeln kann). Sie liegen nach Theorem 23.6 in der Ebene η sowie respektive in den Ebenen β,γ,δ. Letzteres bedeutet insbesondere, dass c, d nicht in U liegen. Nach Axiom A5 liegt der Punkt B in der Geraden b, denn er hat mit ihr die beiden Ebenen β und η gemein (es ist $\beta \neq \eta$, da z in β liegt). Da die Gerade u_2 mit den Geraden c, d eine Ebene gemein hat (nämlich η) aber jeweils nicht parallel zu ihnen liegt (denn sie liegt in U), hat sie mit ihnen respektive Punkte C_2, D_2 gemein. Aus $\mathcal{Z}B_1C_1D_1$ folgt

$$\mathcal{Z}BC_2D_2 \tag{I.3}$$

gemäß Satz 37 angewendet auf die Geraden b, c, d im Punkt* P und die parallelen Geraden u_1, u_2.

Wegen (I.3) können wir o.E. $q \neq u_2$ annehmen, denn andernfalls gilt $C = C_2$ und $D = D_2$ nach Lemma 38.2. Mit Satz 13 folgt $Q \neq U$, da q, u_2 einen Punkt gemein haben (nämlich B). Letzteres impliziert nach Satz 10, dass q, u_2 auch eine Ebene α' gemein haben. Die Ebenen α, α' haben die beiden Fernpunkte Q und U gemein und liegen somit gemäß Lemma 17 in der selben Ferngeraden

a. Gemäß dem selben Lemma liegen die Ebenen γ, δ nicht in a (denn sie liegen nicht in U), sind also insbesondere von α' verschieden. Nach Axiom A3 liegen die Punkte C, D, C_2, D_2 in α'. Insbesondere hat α' mit den Ebenen γ, δ jeweils Punkte und damit gemäß Axiom A6 respektive Geraden c', d' gemein. Nach Axiom A5 liegen die Punkte C, C_2 in der Geraden c' (denn sie haben mit ihr die Ebenen α', γ gemein) und analog liegen die Punkte D, D_2 in der Geraden d'. Die Fernpunkte der Geraden c', d' haben mit dem Fernpunkt Z von z jeweils eine Ferngerade sowie eine nicht in ihr liegende Ebene gemein (nämlich a und γ bzw. δ), sind also nach Satz 21 mit Z identisch. Insbesondere liegen c', d' zueinander parallel. Hätte die Gerade c' mit der Ebene β neben dem Fernpunkt Z auch den Punkt B gemein, so läge sie nach Satz 15 in ihr; damit läge aber nach Axiom A3 auch der Punkt C in β, d.h. β, γ hätten z und C gemein, was nach Axiom A5 ausgeschlossen ist, da $\beta \neq \gamma$. Also liegt c' nicht in B und analog gilt dies für d'. Aus (I.3) folgt nun $\mathcal{Z} BCD$ mit Satz 36.1 angewendet auf die Geraden q, u_2 im Punkt B, sowie die parallelen Geraden c', d'. ■

43 Satz

Aus $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ und $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon$ folgt $\mathcal{T}\alpha\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$.

Beweis: Nach Voraussetzung und Satz 40 sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ jeweils distinkt und haben eine Gerade gemein. Nach Satz 4 haben α, β höchstens eine Gerade gemein. Also haben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ eine Gerade z gemein. Sei q gemäß Lemma 38 eine zu z windschiefe Gerade, welche mit α keinen, mit $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ respektive Punkte B, C, D, E gemein hat. Nach Lemma 42 gilt $\mathcal{Z} BCD$ und $\mathcal{Z} BDE$. Mit Axiom AO3 folgt $\mathcal{Z} CDE$. Also gilt $\mathcal{T}\alpha\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$. ■

44 Satz

Seien ϑ, π Ebenen, welche eine Gerade z gemein haben, und seien A, B Mengen von Ebenen in z derart, dass $\mathcal{T}\vartheta\,\alpha\,\beta\,\pi$ für alle $\alpha \in A$ und $\beta \in B$. Dann gibt es eine Ebene σ in z, sodass

$$\mathcal{T}\vartheta\,\alpha\,\sigma\,\beta, \qquad \textit{für alle } \alpha \in A\backslash\sigma \textit{ und } \beta \in B\backslash\sigma.$$

Beweis: Wir können o.E. annehmen, dass A und B jeweils mehr als eine Ebene enthalten, denn enthält etwa A keine oder nur eine Ebene α, so kann $\sigma = \vartheta$ bzw. $\sigma = \alpha$ gewählt werden. Sei $\alpha_0 \in A$ und $\beta_0 \in B$ und sei q gemäß Lemma 38.1 eine zu z windschiefe Gerade, welche mit ϑ keinen Punkt gemein hat. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{T}\vartheta\,\alpha_0\,\beta\,\pi$ für alle $\beta \in B$ und $\mathcal{T}\vartheta\,\alpha\,\beta_0\,\pi$ für alle $\alpha \in A$. Nach Satz 40 ist somit jede Ebene $\gamma \in A \cup B$ von ϑ verschieden, hat also nach Lemma 38.2 einen Punkt P_γ mit q gemein. Aus dem selben Grund hat π einen Punkt P mit q gemein. Mit Lemma 42 folgt

$$\mathcal{Z} P_\alpha P_\beta P, \qquad \text{für alle } \alpha \in A \text{ und } \beta \in B.$$

Gemäß Axiom AO4 folgt die Existenz eines Punktes S mit

$$\mathcal{Z} P_\alpha S P_\beta, \qquad \text{für alle } \alpha \in A \text{ und } \beta \in B \text{ mit } P_\alpha \neq S \neq P_\beta. \tag{I.4}$$

Nach Lemma 38.2 haben verschiedene Ebenen in z auch verschiedene Punkte mit q gemein. Gemäß unserer Annahme, dass A und B jeweils mehr als eine Ebene enthalten, gibt es somit Ebenen $\alpha \in A$ und $\beta \in B$ mit $P_\alpha \neq S \neq P_\beta$ und mithin $\mathcal{Z} P_\alpha S P_\beta$. Mit den Axiomen AO1, AV1 und A4 folgt, dass S in q liegt. Sei σ gemeinsame Ebene von z und S gemäß Satz 2. Nach (I.4) erfüllt σ die Behauptung. ■

45 Satz

Sei η eine Ebene und seien a, b zwei nicht in η liegende Geraden. Für $i = 1, 2, 3, 4$ seien ferner α_i eine Ebene in a und β_i eine Ebene in b derart, dass α_i, β_i, η eine Gerade* c_i gemein haben. Gilt dann $\mathcal{T}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$, so auch $\mathcal{T}\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$.*

Beweis:

1. Nach Satz 40 sind die Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ distinkt, somit nach Satz 4 auch die Geraden* c_1, c_2, c_3, c_4 und mithin die Ebenen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ (beachte die Voraussetzungen an a und b). Der gemäß Theorem 23.6 einzige gemeinsame Punkt* C von a und η hat für $i = 1, 2, 3, 4$ mit der Geraden* c_i neben der Ebene* η nach Theorem 23.3 auch die von ihr verschiedene Ebene α_i gemein, liegt daher nach Theorem 23.5 in c_i und somit nach Theorem 23.3 auch in der Ebene β_i. Wiederum gemäß Theorem 23.5 folgt, dass C auch in b liegt (da $\beta_1 \neq \beta_2$) und damit nach Theorem 23.6 der einzige gemeinsame Punkt* von b und η ist.

2. Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass C ein Punkt ist. Dann sind c_1, c_2, c_3, c_4 Geraden und η eine Ebene. Sei Q gemäß Satz 6 ein Punkt in η, welcher nicht in c_1 liegt, und sei q gemäß Satz 13 eine gemeinsame Gerade von Q und dem Fernpunkt U von c_1. Der Punkt Q liegt nach Axiom A5 weder in α_1 noch in β_1. Also liegt nach Axiom A3 auch die Gerade q in keiner der beiden Ebenen α_1, β_1 und hat somit nach Satz 15 auch jeweils keinen Punkt mit ihnen gemein (denn sie hat ihren Fernpunkt U mit ihnen gemein). Hingegen liegt q in η und damit windschief zu den Geraden a und b, denn eine gemeinsame Ebene von q mit a bzw. b läge nach Axiom A3 im Punkt C und wäre daher nach Axiom A5 mit η identisch, was nach Voraussetzung an a, b unmöglich ist. Mit Lemma 38.2 folgt, dass q mit den Ebenen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ respektive Punkte Q_2, Q_3, Q_4 gemein hat. Aus der Voraussetzung $\mathcal{T}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ folgt $\mathcal{Z}Q_2Q_3Q_4$ mit Lemma 42. Für $i = 2, 3, 4$ liegt der Punkt Q_i nach Axiom A3 in η, damit nach Axiom A5 in c_i und somit wieder gemäß Axiom A3 in β_i. Damit ist $\mathcal{T}\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ gezeigt.

3. Wir führen nun den allgemeinen Fall auf den soeben betrachteten zurück. Wähle dazu mit dem Dual von Satz 8 eine nicht in C liegende Gerade* s in η und mit Theorem 23.2 einen von C verschiedenen Punkt A in a (beachte, dass in a nur ein Fernpunkt liegt). Da C der einzige gemeinsame Punkt* von η und a ist (siehe 1.), liegt der Punkt A nicht in η und somit nach Theorem 23.3 auch nicht in s, hat also gemäß Theorem 23.5 eine von η verschiedene Ebene α mit s gemein (da A Punkt ist, kann es sich bei α nicht um die Fernebene handeln). Wiederum gemäß Theorem 23.5 liegen der Punkt* C und damit nach Theorem 23.3 auch die Geraden a, b nicht in α. Insbesondere haben α und b nach Theorem 23.6 nur einen Punkt* gemein. Mit Theorem 23.2 folgt die Existenz eines nicht in α liegenden, von C verschiedenen Punktes B in b. Nach Axiom A3 liegt die den Punkten A und B gemäß Satz 1 gemeinsame Gerade c nicht in α. Da C der einzige gemeinsame Punkt* von η und b ist (siehe 1.), liegt der Punkt B nicht in η und somit nach Theorem 23.3 auch nicht in s, hat also gemäß Theorem 23.5 eine von η und α verschiedene Ebene β mit s gemein (da B Punkt ist, kann es sich bei β nur um eine Ebene handeln). Ebenfalls gemäß Theorem 23.5 liegen die Punkte* A, C und damit nach Theorem 23.3 auch die Geraden c, b nicht in β.

   Für $i = 1, 2, 3, 4$ sei nun C_i gemäß Satz 29 ein gemeinsamer Punkt* der Geraden* s und c_i (beachte, dass s, c_i die Ebene* η gemein haben), seien a_i, b_i gemäß Satz 1 gemeinsame Geraden von C_i, A bzw. C_i, B (es handelt sich um Geraden, da A, B Punkte sind) und sei γ_i gemäß Satz 10 gemeinsame Ebene von a_i, b_i. Nach Theorem 23.3 liegt mit s auch der Punkt C_i in α, β, und liegen mit a_i bzw. b_i auch die Punkte A, B und C_i in γ_i. Mit Theorem 23.6 folgt, dass a_i in α_i, α liegt, b_i in β_i, β, und c in γ_i (beachte, dass A, B, C_i nach Konstruktion distinkt sind). Aus der Voraussetzung $\mathcal{T}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ folgt nun $\mathcal{T}\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$ mit dem in 2. gezeigten

Fall angewendet auf die Ebene α, die Geraden a, c, und die Ebenen α_i, γ_i, welche mit α die Gerade a_i gemein haben (beachte, dass der gemeinsame Punkt* A von a und α ein Punkt ist). Hieraus folgt $\mathcal{T}\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ mit 2. angewendet auf die Ebene β, die Geraden c, b, und die Ebenen γ_i, β_i, welche mit β die Gerade b_i gemein haben (beachte dass der gemeinsame Punkt* B von c und β ein Punkt ist). ■

Wir definieren nun eine vierstellige Relation $\mathcal{T}^*$ auf der Menge aller Geraden* durch:

$\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$:gdw. a, b, c, d haben eine Ebene* η gemein und es gibt eine nicht in η liegende Gerade z, welche mit a, b, c, d respektive Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemein hat derart, dass $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$.

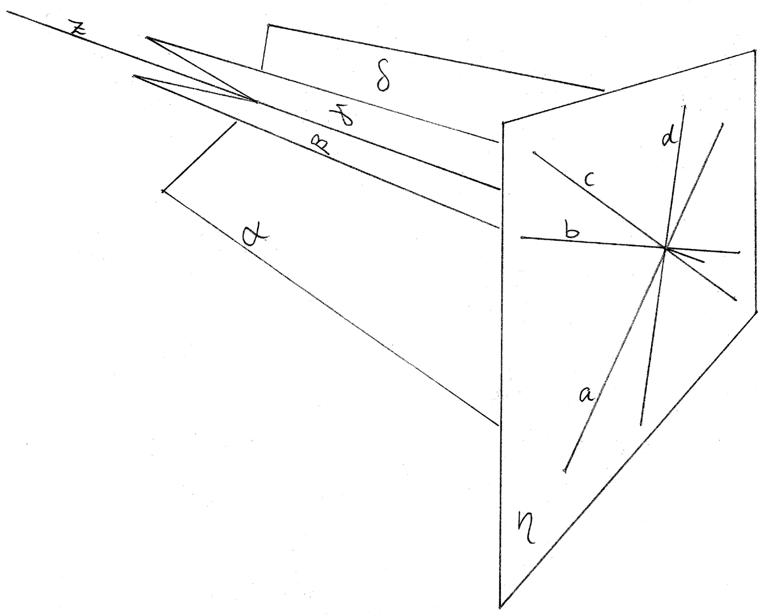


Abbildung I.8.

46 Lemma

Es gelte $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$. Dann sind a, b, c, d distinkt und haben genau eine Ebene η gemein. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respektive in a, b, c, d liegende Ebenen, welche eine nicht in η liegende Gerade z gemein haben, so gilt $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$.*

Beweis: Nach Voraussetzung haben die Geraden* a, b, c, d eine Ebene* η gemein und es gibt eine nicht in η liegende Gerade z', welche mit ihnen respektive Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gemein hat, sodass $\mathcal{T}\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'$. Dann ist z' von a, b, c, d verschieden und nach Satz 40 sind $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ distinkt. Mit Satz 4 folgt, dass auch a, b, c, d distinkt sind und somit η die einzige ihnen gemeinsame Ebene* ist. Die zweite Aussage folgt nun mit Satz 45. ■

Zusammen mit Theorem 33 (und Theorem 23) zeigt das folgende Theorem, dass die Menge X^* der Geraden* zusammen mit der Relation $\mathfrak{T}^*$ des sich Treffens und der Trennungsbeziehung $\mathcal{T}^*$ den Axiomen des Systems S genügen. Wir nennen $\langle X^*, \mathfrak{T}^*, \mathcal{T}^*\rangle$ den **Strahlenraum**.

47 Theorem

1. *Sind a, b, c, d distinkte cozyklische Geraden*, so gilt $\mathcal{T}^* a\, d\, b\, c$ oder $\mathcal{T}^* a\, b\, d\, c$ oder $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$.*
2. *Gilt $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$, so liegen a, b, c, d cozyklisch.*
3. *Seien $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ Geraden* derart, dass $a_i\, b_j$ sich treffen gdw. $i = j$, und b_1, b_2, b_3, b_4 cozyklisch liegen. Gilt dann $\mathcal{T}^* a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, so auch $\mathcal{T}^* b_1\, b_2\, b_3\, b_4$.*
4. *Gilt $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$, so sind a, b, c, d distinkt.*
5. *Gilt $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$, so auch $\mathcal{T}^* b\, c\, d\, a$ und $\mathcal{T} d\, c\, b\, a$.*
6. *Gilt $\mathcal{T}^* a\, b\, c\, d$ und $\mathcal{T}^* a\, b\, d\, e$, so auch $\mathcal{T}^* a\, c\, d\, e$.*
7. *Seien A, B Mengen von Geraden* und seien u, v Geraden* derart, dass $\mathcal{T} u\, a\, b\, v$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es eine Gerade* s, sodass $\mathcal{T} u\, a\, s\, b$ für alle $a \in A \backslash s$ und $b \in B \backslash s$.*

Beweis:

1. Nach Satz 32 haben a, b, c, d einen Punkt* P sowie eine Ebene* η gemein. Wähle mit Satz 7 einen nicht in η liegenden Punkt Q (ein solcher existiert natürlich erst recht, wenn η die Fernebene ist) und mit Satz 1 eine gemeinsame Gerade z von P und Q. Dann liegt z nach Theorem 23.3 nicht in η und hat mit den Geraden* a, b, c, d den Punkt* P, also gemäß Satz 29 auch respektive Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemein (da z eine Gerade ist, kann es sich nur um Ebenen handeln). Nach Satz 4 sind mit a, b, c, d auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distinkt. Mit Satz 39 folgt die Behauptung.

2. Nach Voraussetzung haben die Geraden* a, b, c, d eine Ebene* η gemein und es gibt eine nicht in η liegende Gerade z, welche mit ihnen respektive Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemein hat. Nach Theorem 23.6 hat z einen Punkt* P mit η gemein. Nach Theorem 23.3 liegt P in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und damit nach Theorem 23.5 in a, b, c, d (beachte, dass η von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschieden ist). Also haben die Geraden* a, b, c, d die Ebene* η und den Punkt* P gemein. Mit Satz 32 folgt, dass sie cozyklisch liegen.

3. Nach 2. und Satz 32 haben die Gerden* a_1, a_2, a_3, a_4 eine Ebene* α sowie einen Punkt* A gemein. Auch die Geraden* b_1, b_2, b_3, b_4 haben nach Satz 32 eine Ebene* β und einen Punkt* B gemein. Gemäß Theorem 23.3 liegt A in α und B in β. Für $i = 1, 2, 3, 4$ haben nach Voraussetzung die Geraden* a_i, b_i einen Punkt* C_i gemein, und dieser liegt nach Theorem 23.3 in den Ebenen* α und β. Da die Gerade* a_1 nicht in β liegt (sonst träfe sie b_2), hat sie nach Theorem 23.6 neben C_1 keinen weiteren Punkt* mit β gemein. Somit liegt der Punkt* A nicht in β (es ist $A \neq C_1$, da sich sonst a_2, b_1 träfen). Analog folgt, dass B nicht in α liegt. Insbesondere sind die Ebenen* α, β distinkt, haben also nach Satz 26 eine Gerade* c gemein, in der nach Theorem 23.5 auch die Punkte* C_1, C_2, C_3, C_4 liegen. Hingegen liegt nach Theorem 23.3 weder A noch B in c.

   Sei nun γ eine von α und β verschiedene Ebene in c gemäß dem Dual von Theorem 23.2 (beachte, dass es nur eine Fernebene gibt). Sei ferner C gemäß Satz 6 ein Punkt in γ welcher nicht in c und damit gemäß Theorem 23.5 auch weder in α noch in β liegt. Wähle mit Satz 1 gemeinsame Geraden a und b von C mit A bzw. B. Die Geraden* b, c liegen windschief, denn hätten sie eine Ebene* gemein, so läge diese gemäß Theorem 23.3 in B und C und wäre daher nach Theorem 23.5 sowohl mit β als auch mit γ identisch, im Widerspruch zur Wahl von γ. Analog folgt, dass auch a, c windschief liegen. Insbesondere liegt a nicht in α. Nach Satz 29 hat die Gerade a mit den Geraden* a_1, a_2, a_3, a_4 respektive Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, und die Gerade b mit den Geraden* b_1, b_2, b_3, b_4 respektive Ebenen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ gemein. Aus der Voraussetzung $\mathcal{T}^* a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ folgt $\mathcal{T} \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ mit Lemma 46.

Nach Theorem 23.3 liegen für $i = 1, 2, 3, 4$ die Punkte* c und c_i in α_i, β_i und γ, mithin nach Theorem 23.6 auch die ihnen gemäß Satz 1 gemeinsame Gerade* c_i. Die Geraden a, b liegen nicht in γ, weil windschief zu c. Mit Satz 45 (angewendet auf die Ebene γ, die Geraden a, b und die Ebenen α_i, β_i, welche mit γ die Gerade* c_i gemein haben) folgt $\mathcal{T}\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$. Damit ist $\mathcal{T}^*b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ gezeigt.

4. Dies gilt nach Lemma 46.

5. Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 41.

6. Nach Voraussetzung haben die Geraden* a, b, c, d eine Ebene* η gemein und es gibt eine nicht in η liegende Gerade z, welche mit ihnen respektive Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemein hat, sodass $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Nach 2. liegen $a\,b\,c\,d$ und $a\,b\,d\,e$ jeweils cozyklisch, haben also nach Satz 32 jeweils eine Ebene* und einen Punkt gemein. Da a, b nach 4. distinkt sind, haben sie nur einen Punkt* p und nur eine Ebene*, nämlich η gemein. Die Geraden a, b, c, d, e liegen also in η und in p. Nach Theorem 23.3 liegt p in den Ebenen* α, β und damit nach Theorem 23.5 auch in z. Da somit z, e den Punkt* p gemein haben, haben sie nach Satz 29 auch eine Ebene ε gemein (beachte, dass z eine Gerade ist). Gemäß Lemma 46 folgt $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon$. Zusammen mit $\mathcal{T}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ impliziert dies $\mathcal{T}\alpha\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ gemäß Satz 43. Damit ist $\mathcal{T}^*a\,c\,d\,e$ gezeigt.

7. Wir können o.E. annehmen, dass A und B nicht leer sind. Sei $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$. Dann gilt $\mathcal{T}^*u\,a_0\,b_0\,v$, d.h. u, a_0, b_0, v haben eine Ebene* η gemein und es gibt eine nicht in η liegende Gerade z, welche mit ihnen respektive Ebenen $\vartheta, \alpha_0, \beta_0, \gamma$ gemein hat, sodass $\mathcal{T}\vartheta\,\alpha_0\,\beta_0\,\gamma$. Wie in 6. (für die Gerade* e) folgt, dass jede Gerade* $c \in A \cup B$ in η liegt und mit z eine Ebene ε_c gemein hat. Gemäß Lemma 46 gilt

$$\mathcal{T}\vartheta\,\varepsilon_a\,\varepsilon_b\,\gamma, \qquad \forall a \in A, b \in B$$

und mit Satz 44 folgt die Existenz einer Ebene σ in z, sodass

$$\mathcal{T}\vartheta\,\varepsilon_a\,\sigma\,\varepsilon_b, \qquad \text{für alle } a \in A, b \in B \text{ mit } \varepsilon_a \neq \sigma \neq \varepsilon_b. \tag{I.5}$$

Die den Ebenen* σ, η gemäß Satz 26 gemeinsame Gerade* s ist von der Geraden z verschieden, da letztere nicht in η liegt. Nach Satz 4 gilt somit $\varepsilon_c \neq \sigma$ für alle $c \in A \cup B$ mit $c \neq s$. Gemäß (I.5) erfüllt daher s die Behauptung. ■

II. Der Strahlenraum

Dieses ganze zweite Kapitel zielt darauf ab zu zeigen, dass je zwei Modelle von S isomorph sind. Es wird nichts behandelt, was nicht letztendlich für diesen Beweis nötig sein wird. Nichtsdestotrotz sind die hier entwickelten Resultate natürlich auch für sich von Interesse und sollten nicht nur als Mittel zu diesem Zweck angesehen werden. Es folgt ein grober Überblick über das Kapitel.

Die ersten vier Abschnitte sind unabhängig von der Trennungsbeziehung gehalten und stehen auf der Grundlage der ersten sieben Axiome von S. In Abschnitt II.1 wird die karge Sprache von S etwas angereichert, indem unter anderem Punkte und Ebenen sowie eine Inzidenzrelation eingeführt werden.[1] Um dem Dualitätsprinzip treu zu bleiben, wird allerdings statt *Punkt* oder *Ebene* das Wort *Plexus* verwendet, welches *Punkt oder Ebene* bedeutet. Auch der zentrale Begriff des Strahlenbüschels wird eingeführt, hier kurz *Zyklus* genannt. Abschnitt II.2 ist dem Beweis des Satzes von Desargues gewidmet, der in der Geometrie der Ebene üblicherweise als Axiom genommen wird. Er spielt eine entscheidende Rolle für den Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie, der in den darauffolgenden Abschnitten bis Abschnitt II.8 entwickelt wird. Der verhältnismäßig einfachere Teil des Fundamentalsatzes, die Existenzaussage, wird bereits in Abschnitt II.3 bewiesen.

In Abschnitt II.4 wird dann die sechsstellige Relation $\mathcal{Q}$ eingeführt. Sie bildet gewissermaßen das Herzstück des ganzen Kapitels und ist für alles Weitere von zentraler Bedeutung. Mit ihrer Hilfe werden in Abschnitt II.8 auf den Zyklen Strukturen vollständig angeordneter Körper definiert, was dann für die Konstruktion eines Isomorphismus zwischen zwei Modellen von S benutzt werden kann, da bekanntlich je zwei vollständig angeordnete Körper isomorph sind (dies wird im Anhang bewiesen). Die in Abschnitt II.6 untersuchte vierstellige Relation $\mathcal{H}$ der harmonisch Konjugierten ist nur ein Spezialfall von $\mathcal{Q}$. Mittels ihr kann die für die Anordnung der Körperstrukturen notwendige Trennungsbeziehung definiert werden (siehe Theorem 136 auf Seite 88). Umgekehrt ist aber die Trennungsbeziehung zunächst nötig, um wichtige Eigenschaften von $\mathcal{Q}$ zu beweisen, weshalb sich die Untersuchungen ab Abschnitt II.5 auch auf die Ordnungsaxiome stützen. Dort wird zunächst der wichtige Satz von Fano bewiesen, der wie der Satz von Desargues oft als Axiom angenommen wird. Er kann zwar unabhängig von der Trennungsbeziehung formuliert werden, aber sein Beweis stützt sich wesentlich auf das Ordnungsaxiom V3. Um zu zeigen, dass jeder Strahl in der Relation $\mathcal{Q}$ durch die übrigen bereits eindeutig bestimmt ist, sind topologische Überlegungen notwendig, die in Abschnitt II.7 entwickelt werden.

Nachdem die Abschnitte II.2 bis II.8 im Wesentlichen dem Studium der eindimensionalen Zyklen gewidmet sind, werden die Früchte dieser Untersuchungen in den Abschnitten II.9 und II.10 auf den ganzen Raum übertragen. Dabei spielen die *Regelscharen* die vermittelnde Rolle: Sie sind eindimensionale Gebilde wie der Zyklus, bilden aber im Gegensatz zu ihm eine räumlich-gekrümmte Fläche (siehe Abbildung II.30 auf Seite 99). Sie stehen dann im Zentrum des Kategorizitätsbeweises in Abschnitt II.11.

[1]Zusammen mit den Strahlen als Geraden bilden diese ein Modell von P. Dies wird in Abschnitt II.1 gezeigt, ohne jedoch explizit darauf einzugehen.

II.1. Elementare Sätze über den Strahlenraum

Wie angekündigt, setzen wir hier und in den folgenden drei Abschnitten nur die ersten sieben Axiome von S voraus, welche allein auf das *sich Treffen* von Strahlen Bezug nehmen:

S1 *Jeder Strahl trifft sich selbst.*

S2 *Trifft ein Strahl a einen Strahl b, so trifft auch der Strahl b den Strahl a.*

S3 *Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch p oder q.*

S4 *Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner c ein Strahl, welcher a, b, p und q trifft, so trifft jeder a und b treffende Strahl auch c.*

S5 *Sind a, b sich treffende Strahlen, so gibt es zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen.*

S6 *Sind a, b sich treffende Strahlen und sind p, q zwei a und b treffende Strahlen, welche nicht einander treffen, und ist ferner s ein beliebiger weiterer Strahl, so gibt es einen Strahl, welcher jeden der Strahlen a, b, p, q und s trifft.*

S7 *Zu je drei paarweise sich treffenden Strahlen gibt es einen, welcher keinen von ihnen trifft.*

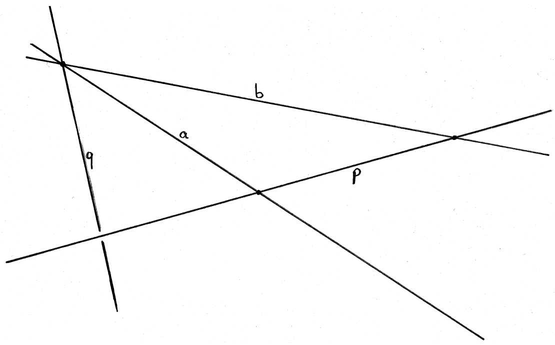


Abbildung II.1. Illustration zu den Axiomen S3, S4, S5 und S6.

Unter einem **Strahlengebilde** verstehen wir eine beliebige Menge von Strahlen. Ein Strahl heißt **Leitstrahl** eines Strahlengebildes, falls er jeden Strahl desselben trifft. Die Menge aller Leitstrahlen eines Strahlengebildes S nennen wir dessen **Leitschar** und bezeichnen sie mit

$$\mathcal{L}(S).$$

48 Satz

Für Strahlengebilde A und B gilt:

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(A)$.
2. $A \subseteq \mathcal{L}(B) \Rightarrow B \subseteq \mathcal{L}(A)$.
3. $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$.
4. $A \subseteq \mathcal{L}^2(A)$.
5. $\mathcal{L}^3(A) = \mathcal{L}(A)$.

Beweis: Aussagen 1. und 3. ergeben sich unmittelbar aus der Definiton von $\mathcal{L}$, Aussagen 2. und 4. machen zusätzlich von Axiom S2 Gebrauch. Zu 5: Gemäß 4. gilt $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}^3(A)$ und $A \subseteq \mathcal{L}^2(A)$; gemäß 1. impliziert letzteres $\mathcal{L}^3(A) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^2(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$. ■

Ein Strahlengebilde S ist **plektisch**, falls $S \subseteq \mathcal{L}(S)$, d.h. falls sich je zwei seiner Strahlen treffen. Ein Strahlengebilde S ist **zyklisch**, falls S plektisch ist und $\mathcal{L}(S)$ nicht plektisch ist.

Offensichtlich ist jede Teilmenge eines plektischen bzw. zyklischen Strahlengebildes selbst plektisch bzw. zyklisch.

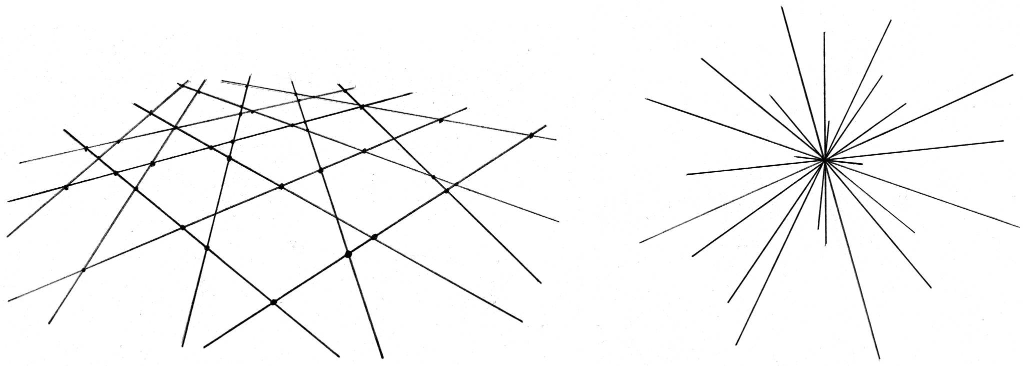


Abbildung II.2. Zwei plektische Strahlengebilde.

Sind $s_1, \dots, s_n$ endlich viele Strahlen, so sagen wir $s_1 \dots s_n$ liegen **coplektisch** bzw. **cozyklisch**, falls $\{s_1, \dots, s_n\}$ plektisch bzw. zyklisch ist. Ferner schreiben wir auch einfach

$$\mathcal{L}(s_1 \dots s_n) \qquad \text{für} \qquad \mathcal{L}(\{s_1, \dots, s_n\}).$$

Zwei Strahlen liegen **windschief**, falls sie sich nicht treffen.

Mithilfe der eingeführten Abkürzungen lassen sich einige der Axiome prägnanter formulieren:

49 Satz (Axiom S3)

Sind a, b distinkte sich treffende und $p, q \in \mathcal{L}(a\,b)$ windschiefe Strahlen, so gilt

$$\mathcal{L}(a\,b) = \mathcal{L}(a\,b\,p) \cup \mathcal{L}(a\,b\,q).$$

50 Satz (Axiom S4)

Liegen $a\,b\,c$ cozyklisch mit $a \neq b$, so gilt $\mathcal{L}(a\,b) = \mathcal{L}(a\,b\,c)$.

51 Satz (Axiom S5)

Je zwei sich treffende Strahlen liegen cozyklisch.

Unter Voraussetzung von Axiom S5 besagt Axiom S6 im Wesentlichen:

52 Satz (Axiom S6)

Sind a, b sich treffende und s ein beliebiger Strahl, so gibt es einen s treffenden Strahl c, sodass $a\,b\,c$ cozyklisch liegen.

Beweis: Wähle mit Axiom S5 winschiefe Strahlen $p, q \in \mathcal{L}(a\,b)$ und sodann mit Axiom S6 einen Strahl $c \in \mathcal{L}(a\,b\,p\,q\,s)$. Dann liegen $a\,b\,c$ cozyklisch (denn $p, q \in \mathcal{L}(a\,b\,c)$), d.h. c erfüllt die Behauptung. ■

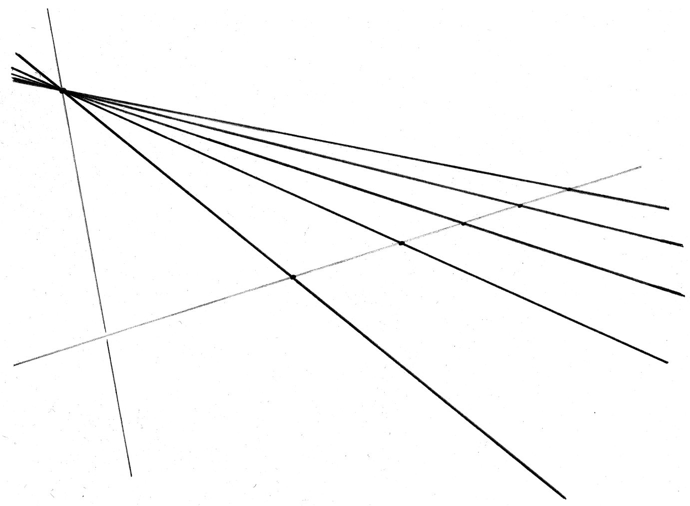


Abbildung II.3. Fünf cozyklische Strahlen.

Satz 50 lässt sich auf beliebige zyklische Strahlengebilde verallgemeinern:

53 Satz

Sind u, v distinkte Strahlen eines zyklischen Strahlengebildes U, so gilt $\mathcal{L}(u\,v) = \mathcal{L}(U)$.

Beweis: Seien $s \in \mathcal{L}(u\,v)$ und $w \in U$ beliebig. Dann liegen $u\,v\,w$ cozyklisch (da U zyklisch) und gemäß Satz 50 folgt, dass $s\,w$ sich treffen. Damit ist $\mathcal{L}(u\,v) \subseteq \mathcal{L}(U)$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion gilt nach Satz 48.1. ■

54 Satz

Haben zwei zyklische Strahlengebilde U und V mehr als einen Strahl gemein, so ist auch $U \cup V$ zyklisch.

Beweis: Seien $u, v \in U \cap V$ distinkte Strahlen gemäß Voraussetzung. Nach Satz 53 ist jeder u und v treffende Strahl Leitstrahl von U und von V, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}(u\,v) \subseteq \mathcal{L}(U \cup V).$$

Mit U und V ist daher auch $U \cup V$ plektisch:

$$U \cup V \subseteq \mathcal{L}(U) \cup \mathcal{L}(V) \subseteq \mathcal{L}(u\,v) \subseteq \mathcal{L}(U \cup V).$$

Andererseits ist $\{u, v\}$ als Teilmenge von U zyklisch und damit $\mathcal{L}(U \cup V)$ als Obermenge von $\mathcal{L}(u\,v)$ nicht plektisch. ■

Ein Strahlengebilde Z heißt **Zyklus**, falls $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$ für zwei distinkte sich treffende Strahlen u, v. In diesem Fall liegen natürlich u und v in Z (siehe auch Satz 48.4).

Zu jedem Strahl u gibt es einen u enthaltenden Zyklus, wie der folgende Satz zeigt:

55 Satz

Zu jedem Strahl u gibt es einen von u verschiedenen Strahl v, sodass $u\,v$ sich treffen.

Beweis: Gemäß Axiom S5 (und Axiom S1) gibt es windschiefe Strahlen $v, v' \in \mathcal{L}(u)$. Es ist $u \neq v$, da sich $u\,v'$ im Gegensatz zu $v\,v'$ treffen. ■

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen den Begriffen *zyklisch* und *Zyklus* her:

56 Satz

Ein Strahlengebilde S ist genau dann zyklisch, wenn es einen Zyklus Z gibt sodass $S \subseteq Z$. Insbesondere ist jeder Zyklus zyklisch.

Beweis: Zu „⇒“: Enthält S höchstens einen Strahl, so folgt die Existenz eines Zyklus $Z \supseteq S$ mit Satz 55.[2] Nehmen wir also an, dass S distinkte Strahlen u und v enthält. Da S zyklisch ist, folgt $\mathcal{L}(u\,v) = \mathcal{L}(S)$ mit Satz 53, und somit $\mathcal{L}^2(u\,v) = \mathcal{L}^2(S) \supseteq S$ gemäß Satz 48.4.
Für „⇐“ genügt es offensichtlich zu zeigen, dass jeder Zyklus Z zyklisch ist. Seien dazu u, v distinkte sich treffende Strahlen mit $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$. Dann gilt $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}^3(u\,v) = \mathcal{L}(u\,v)$ gemäß Satz 48.5. Wegen $\mathcal{L}(u\,v) \supseteq \{u, v\}$ folgt mit Satz 48.1

$$Z = \mathcal{L}(\mathcal{L}(u\,v)) \subseteq \mathcal{L}(u\,v) = \mathcal{L}(Z),$$

d.h. Z ist plektisch. Hingegen ist $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(u\,v)$ nach Axiom S5 nicht plektisch. Also ist Z zyklisch. ■

57 Satz

Sei Z ein Zyklus und seien $x, y \in Z$ distinkt. Dann gilt

$$Z = \mathcal{L}^2(x\,y) = \{z\,;\ x\,y\,z \textit{ liegen cozyklisch}\}\,.$$

Beweis: Die Inklusion $Z \subseteq \{z\,;\ x\,y\,z \text{ liegen cozyklisch}\}$ folgt aus Satz 56 (angewendet auf die Strahlengebilde $\{x, y, z\}$ mit $z \in Z$). Liegen $x\,y\,z$ cozyklisch, so trifft nach Satz 50 jeder x und y treffende Strahl auch z, d.h. $z \in \mathcal{L}^2(x\,y)$ (mit Axiom S2); damit ist auch $\{z\,;\ x\,y\,z \text{ liegen cozyklisch}\} \subseteq \mathcal{L}^2(x\,y)$ gezeigt. Sei nun $z \in \mathcal{L}^2(x\,y)$ beliebig angenommen und seien u, v distinkte sich treffende Strahlen mit $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$; es liegen $u\,v\,x\,y$ im Zyklus Z und somit nach Satz 56 cozyklisch; ähnlich liegen $x\,y\,z$ cozyklisch, da sie im Zyklus $\mathcal{L}^2(x\,y)$ liegen; mit Satz 54 folgt wegen $x \neq y$, dass auch $u\,v\,x\,y\,z$ und damit insbesondere $u\,v\,z$ cozyklisch liegen; hieraus folgt $z \in \mathcal{L}^2(u\,v)$ mit Satz 50 (wie oben für den Zyklus $\mathcal{L}^2(x\,y)$); damit ist auch die Inklusion $\mathcal{L}^2(x\,y) \subseteq Z$ gezeigt. ■

Aus dieser Charakterisierung von Zyklen folgt unmittelbar:

58 Korollar

Zwei distinkte Zyklen haben höchstens einen Strahl gemein.

[2] Beachte, dass es nach Voraussetzung mindestens einen Strahl gibt.

59 Satz

Seien u, v distinkte sich treffende und $p, q \in \mathcal{L}(u\,v)$ windschiefe Strahlen. Dann gilt

$$\mathcal{L}(u\,v\,p\,q) = \mathcal{L}^2(u\,v).$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}(u\,v\,p\,q)$ ein Zyklus.

Beweis: Für jeden Strahl $z \in \mathcal{L}(u\,v\,p\,q)$ liegen $u\,v\,z$ cozyklisch, denn sie liegen coplektisch und werden von den windschiefen Strahlen p, q getroffen; liegen umgekehrt $u\,v\,z$ cozyklisch, so treffen p und q nach Satz 50 mit u und v auch z, d.h. z liegt in $\mathcal{L}(u\,v\,p\,q)$. Hieraus folgt die Behauptung mit Satz 57. ■

60 Satz

Ist Z ein Zyklus, so trifft jeder Strahl mindestens einen Strahl von Z.

Beweis: Seien u, v distinkte sich treffende Strahlen mit $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$ und sei s ein beliebiger Strahl. Nach Satz 52 gibt es einen s treffenden Strahl z sodass $u\,v\,z$ cozyklisch liegen. Nach Satz 57 liegt mit u und v auch z in Z. ■

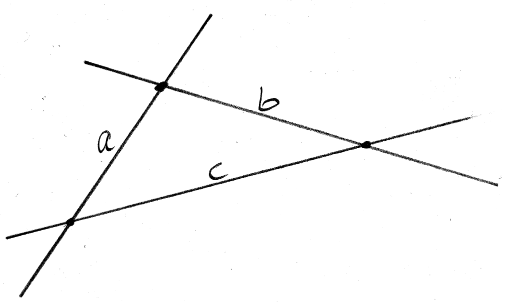
Axiom S7 ist unter Voraussetzung der anderen sechs Axiome zu folgendem Satz äquivalent:[3]

61 Satz

Jeder Zyklus enthält mindestens vier distinkte Strahlen.

Beweis: Sei Z ein beliebiger Zyklus, d.h. $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$ für gewisse distinkte Strahlen u, v. Sei s mit Axiom S7 (und Axiom S1) ein zu u und v windschiefer Strahl und sei $x \in Z$ gemäß Satz 60 ein s treffender und damit insbesondere von u und v verschiedener Strahl. Sei wiederum t mit Axiom S7 ein zu u, v, s windschiefer Strahl und $y \in Z$ mit Satz 60 ein t treffender und damit von u, v, x verschiedener Strahl. Dann sind u, v, x, y vier distinkte Strahlen von Z. ■

Strahlen $a\,b\,c$ liegen **cosimplizial**, falls sie coplektisch liegen, aber nicht cozyklisch.



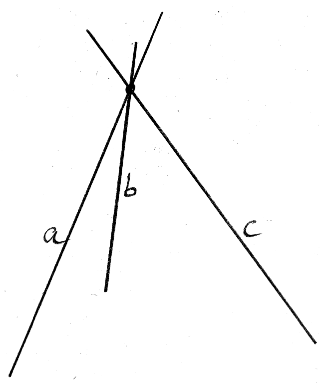


Abbildung II.4. $a\,b\,c$ liegen cosimplizial.

[3]Der Beweis von Axiom S7 aus Satz 61 und den ersten sechs Axiomen ist nicht völlig trivial. Wir verzichten hier darauf ihn zu führen.

62 Satz

1. *Liegen $a\,b\,c$ cosimplizial, so sind sie distinkt.*
2. *Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen und $p, q \in \mathcal{L}(a\,b)$ windschief, so liegen $a\,b\,p$ und $a\,b\,q$ cosimplizial.*
3. *Zu je zwei distinkten sich treffenden Strahlen a, b gibt es zueinander windschiefe Strahlen p, q sodass $a\,b\,p$ und $a\,b\,q$ cosimplizial liegen.*
4. *Liegen $a\,b\,c$ cosimplizial, so gibt es einen zu c windschiefen Strahl c' sodass $a\,b\,c'$ cosimplizial liegen.*

Beweis:

1. Enthielte das plektische Strahlengebilde $\{a, b, c\}$ weniger als drei Strahlen, so wäre es nach Satz 51 zyklisch.
2. Es liegen $a\,b\,p$ nicht cozyklisch, denn wegen $a \neq b$ träfe sonst q nach Satz 50 mit a und b auch p; da $a\,b\,p$ nach Voraussetzung coplektisch liegen, liegen sie somit cosimplizial. Symmetrisch analog folgt, dass auch $a\,b\,q$ cosimplizial liegen.
3. Dies folgt unmittelbar aus Axiom S5 und Aussage 2.
4. Es ist $a \neq b$ gemäß 1. Außerdem treffen sich $a\,b$, da $a\,b\,c$ coplektisch liegen. Nach 3. gibt es zueinander windschiefe Strahlen p, q, sodass $a\,b\,p$ und $a\,b\,q$ cosimplizial liegen. Es liegt aber einer der Strahlen p oder q windschief zu c, denn sonst lägen beide in $\mathcal{L}(a\,b\,c)$, was unmöglich ist, da $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ nach Voraussetzung plektisch ist. ■

Ein Strahlengebilde P heißt **Plexus**, falls $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$ für cosimpliziale Strahlen a, b, c. In diesem Fall liegen natürlich a, b, c in P. Ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen den Begriffen *zyklisch* und *Zyklus* besteht zwischen *plektisch* und *Plexus*:

63 Satz

Ein Strahlengebilde S ist genau dann plektisch, wenn es einen Plexus P gibt sodass $S \subseteq P$. Insbesondere ist jeder Plexus plektisch.

Beweis: Zu „$\Rightarrow$“: Nach Satz 55 und Satz 62.3 gibt es zu jedem Strahl a Strahlen b, c sodass $a\,b\,c$ cosimplizial liegen. Hieraus folgt die Existenz eines Plexus $P \supseteq S$ im Fall, dass S höchstens einen Strahl enthält. Falls S cosimpliziale Strahlen a, b, c enthält, so erfüllt der Plexus $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$, die Behauptung, da dann $S \subseteq \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(a\,b\,c)$ (gemäß Voraussetzung und Satz 48.1). Es bleibt der Fall zu betrachten, dass S zwei distinkte Strahlen a, b entält, aber kein Strahl $s \in S$ zu $a\,b$ cosimplizial liegt; da S plektisch ist, liegen also $a\,b\,s$ cozyklisch für alle $s \in S$. Wähle mit Satz 62.3 einen Strahl c, sodass $a\,b\,c$ cosimplizial liegen. Nach Satz 50 trifft dann c mit a und b auch jeden weiteren Strahl $s \in S$. Also gilt $S \subseteq \mathcal{L}(a\,b\,c)$.

Zu „$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung gibt es cosimpliziale Strahlen a, b, c mit $S \subseteq \mathcal{L}(a\,b\,c)$; per Definition von „cosimplizial“ ist $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ plektisch, also auch die Teilmenge S. ■

64 Satz

Ein Strahlengebilde S ist genau dann ein Plexus, wenn $S = \mathcal{L}(S)$.

Beweis: Zu „⇒“: Sei P ein Plexus, d.h $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$ für gewisse cosimpliziale Strahlen a, b, c. Da $\{a, b, c\}$ plektisch ist, gilt $\{a, b, c\} \subseteq \mathcal{L}(a\,b\,c) = P$ und Anwenden von $\mathcal{L}$ ergibt $P = \mathcal{L}(a\,b\,c) \supseteq \mathcal{L}(P)$ (Satz 48.1). Da P nach Satz 63 plektisch ist, gilt auch umgekehrt $P \subseteq \mathcal{L}(P)$.
Zu „⇐“: Sei S ein Strahlengebilde mit $S = \mathcal{L}(S)$. Dann ist S plektisch und es gibt nach Satz 63 einen Plexus P mit $S \subseteq P$. Anwenden von $\mathcal{L}$ ergibt $S = \mathcal{L}(S) \supseteq \mathcal{L}(P) = P$, wobei die letzte Gleichheit gemäß „⇒“ gilt. Also ist $S = P$ ein Plexus. ■

65 Korollar

Ist P ein Plexus, so gilt $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$ für je drei cosimpliziale Strahlen $a, b, c \in P$.

Beweis: Nach Satz 64 und Satz 48.1 gilt $P = \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(a\,b\,c)$. Anwenden von $\mathcal{L}$ ergibt (wiederum mit Satz 64 und Satz 48.1): $P = \mathcal{L}(P) \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(a\,b\,c)) = \mathcal{L}(a\,b\,c)$. ■

66 Satz

Hat ein zyklisches Strahlengebilde U mit einem Plexus P mehr als einen Strahl gemein, so gilt $U \subseteq P$.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es distinkte Strahlen $u, v \in U \cap P$. Gemäß Satz 53 gilt $\mathcal{L}(u\,v) = \mathcal{L}(U)$. Wegen $P = \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(u\,v)$ (Satz 64 und Satz 48.1) folgt $P \subseteq \mathcal{L}(U)$ und somit $U \subseteq \mathcal{L}(P) = P$ (Satz 48.2). ■

67 Satz

Ist P ein Plexus und s ein nicht in P liegender Strahl, so ist $P \cap \mathcal{L}(s)$ ein Zyklus.

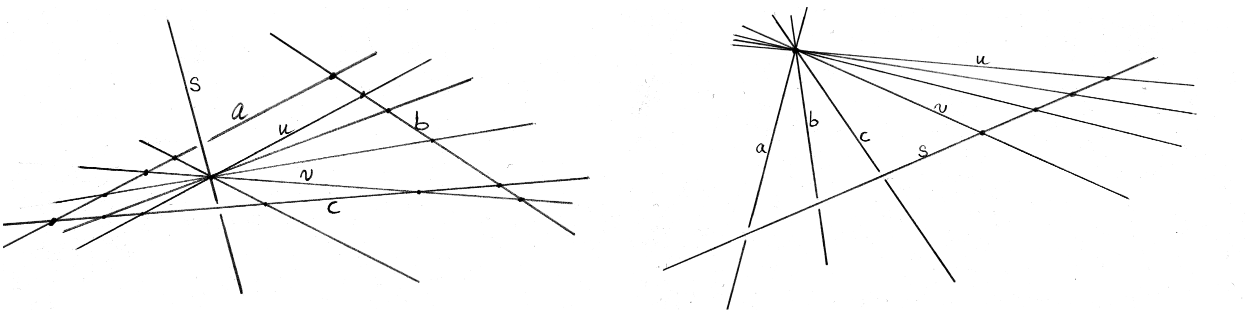


Abbildung II.5.

Beweis: Seien a, b, c cosimpliziale Strahlen mit $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$. Gemäß Voraussetzung liegt s zu mindestens einem der Strahlen a, b, c windschief, etwa zu b. Wähle jeweils mit Satz 52 den Strahl s treffende (und damit von b verschiedene) Strahlen u und v, sodass $a\,b\,u$ bzw. $b\,c\,v$ cozyklisch liegen. Mit a, b, c liegen nach Satz 66 auch u und v im Plexus P (beachte $a \neq b \neq c$ gemäß Satz 62.1) und treffen sich somit gemäß Satz 63. Ferner ist $u \neq v$, da sonst neben $a\,b\,u$ auch $b\,c\,u$ und somit nach Satz 54 $a\,b\,c\,u$ cozyklisch lägen (beachte $b \neq u$). Da $b, s \in \mathcal{L}(u\,v)$ windschief liegen, liegen somit $u\,v\,b$ cosimplizial gemäß Satz 62.2. Mit Korollar 65 folgt $P = \mathcal{L}(u\,v\,b)$. Also gilt

$$P \cap \mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(u\,v\,b) \cap \mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(u\,v\,b\,s)$$

und mit Satz 59 folgt die Behauptung. ■

68 Lemma

Sind P ein Plexus und x, y beliebige Strahlen, so gilt

$$P \cap \mathcal{L}(x\,y) \neq \emptyset.$$

Beweis: Liegen x und y beide in P, so treffen sie sich nach Satz 63, sodass also $x \in P \cap \mathcal{L}(x\,y)$. Andernfalls, d.h. wenn etwa $x \notin P$, ist $P \cap \mathcal{L}(x)$ gemäß Satz 67 ein Zyklus. Als solcher enthält $P \cap \mathcal{L}(x)$ gemäß Satz 60 einen y treffenden Strahl s, d.h. wir haben $s \in P \cap \mathcal{L}(x\,y)$. ■

69 Korollar

Sind S ein plektisches Strahlengebilde und x, y beliebige Strahlen, so gilt

$$\mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(x\,y) \neq \emptyset.$$

Beweis: Sei P gemäß Satz 63 ein Plexus mit $S \subseteq P$. Dann gilt $P = \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(S)$ gemäß Satz 64 (und Satz 48.1) und die Behauptung folgt mit Lemma 68. ■

70 Satz

Liegen $a\,b\,u\,v$ coplektisch, so gibt es einen Strahl s sodass $a\,b\,s$ und $u\,v\,s$ cozyklisch liegen. Liegen dabei $a\,b\,u\,v$ nicht cozyklisch, so ist s eindeutig bestimmt mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Nach Satz 63 gibt es einen Plexus $P \supseteq \{a, b, u, v\}$. Da $a\,b$ nach Satz 51 cozyklisch liegen, ist $\mathcal{L}(a\,b)$ nicht plektisch, d.h. insbesondere gibt es einen Strahl $x \in \mathcal{L}(a\,b)$, der nicht in P liegt (wieder Satz 63). Analog folgt die Existenz eines nicht in P liegenden Strahls $y \in \mathcal{L}(u\,v)$. Sei $s \in P \cap \mathcal{L}(x\,y)$ gemäß Korollar 68. Dann liegen $a\,b\,s$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $P \cap \mathcal{L}(x)$ (siehe Satz 67 und Satz 56); analog liegen $u\,v\,s$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $P \cap \mathcal{L}(y)$.

Ist $s' \neq s$ ein weiterer Strahl sodass $a\,b\,s'$ und $u\,v\,s'$ cozyklisch liegen, so haben die beiden Zyklen $\mathcal{L}^2(a\,b)$ und $\mathcal{L}^2(u\,v)$ mehr als einen Strahl gemein (nämlich s und s'; siehe Satz 57) und sind damit nach Korollar 58 identisch. In diesem Fall liegen also $a\,b\,u\,v$ in einem Zyklus und damit cozyklisch. ■

71 Satz

Zu je zwei distinkten Strahlen a, b eines Plexus P gibt es einen Strahl $c \in P$, sodass $a\,b\,c$ cosimplizial liegen und $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$.

Beweis: Da P nicht zyklisch ist (denn $\mathcal{L}(P) = P$ ist plektisch), ist P nicht Teilmenge des Zyklus $\mathcal{L}^2(a\,b)$ (siehe Satz 56), d.h. es gibt einen Strahl $c \in P$, sodass $a\,b\,c$ nicht cozyklisch liegen (siehe Satz 57). Also liegen $a\,b\,c$ cosimplizial, denn als Strahlen von P liegen sie coplektisch (Satz 63). Nun folgt $P = \mathcal{L}(a\,b\,c)$ mit Korollar 65. ■

Im Beweis des folgenden Satzes machen wir erstmalig von Axiom S3 Gebrauch:[4]

[4] Abgesehen natürlich von dessen Reformulierung in Satz 49, von dem wir bisher keinen Gebrauch gemacht haben.

72 Satz

Sind a, b distinkte sich treffende Strahlen, so gibt es genau zwei Plexi, welche a und b enthalten. Sind P, Q die beiden Plexi, so gilt

$$P \cap Q = \mathcal{L}^2(a\,b) \quad \textit{und} \quad P \cup Q = \mathcal{L}(a\,b).$$

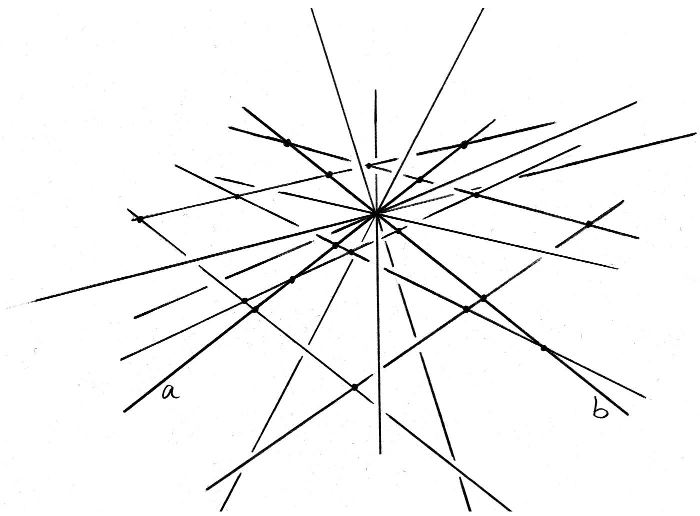


Abbildung II.6.

Beweis: Wähle mit Satz 62.3 zueinander windschiefe Strahlen p, q, sodass $a\,b\,p$ und $a\,b\,q$ cosimplizial liegen. Dann sind $P := \mathcal{L}(a\,b\,p)$ und $Q := \mathcal{L}(a\,b\,q)$ distinkte Plexi, welche a und b enthalten. Es ist $P \cap Q = \mathcal{L}(a\,b\,p) \cap \mathcal{L}(a\,b\,q) = \mathcal{L}(a\,b\,p\,q) = \mathcal{L}^2(a\,b)$ gemäß Satz 59 und nach Satz 49 (also Axiom S3) gilt $P \cup Q = \mathcal{L}(a\,b\,p) \cup \mathcal{L}(a\,b\,q) = \mathcal{L}(a\,b)$.
Ist nun C ein beliebiger a und b enthaltender Plexus, so gibt es nach Satz 71 einen Strahl c, sodass $a\,b\,c$ cosimplizial liegen und $C = \mathcal{L}(a\,b\,c)$. Insbesondere ist $c \in \mathcal{L}(a\,b)$ und liegt damit nach dem bereits Gezeigten in P oder in Q. Mit Korollar 65 folgt im ersteren Fall $\mathcal{L}(a\,b\,c) = P$, im letzteren Fall $\mathcal{L}(a\,b\,c) = Q$. Also sind P und Q die einzigen Plexi, welche a und b enthalten. ∎

Zwei Plexi P und Q **inzidieren**, falls $P \cap Q$ ein Zyklus ist.

73 Korollar

Zwei Plexi inzidieren genau dann, wenn sie distinkt sind und mehr als einen Strahl gemein haben.

Beweis: Die Implikation „⇒“ ist klar, da ein Zyklus einerseits mehr als einen Strahl enthält, andererseits als zyklisches Strahlengebilde eine nicht-plektische Leitschar hat und somit nach Satz 64 (und Satz 63) kein Plexus sein kann. Die Implikation „⇐“ ergibt sich aus Satz 72. ∎

74 Satz

Inzidieren zwei distinkte Plexi P und P' mit dem selben Plexus Q, so haben sie genau einen Strahl gemein und dieser liegt in Q.

Beweis: Nach Voraussetzung sind $Z := P \cap Q$ und $Z' := P' \cap Q$ Zyklen, d.h. es gibt Paare von jeweils distinkten sich treffenden Strahlen u, v bzw. u', v', sodass $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$ und $Z' = \mathcal{L}^2(u'\,v')$. Es ist $Z \neq Z'$, denn sonst enthielte neben P und Q auch P' die beiden Strahlen u, v, was nach

Satz 72 unmöglich ist, da P, Q, P' distinkt sind (siehe Korollar 73). Gemäß Korollar 58 haben Z und Z' somit höchstens einen Strahl gemein, d.h.

$$|Z \cap Z'| \leq 1. \tag{II.1}$$

Insbesondere gibt es einen Strahl $z' \in Z'$, welcher nicht in Z liegt (etwa $z' = u'$ oder $z' = v'$), d.h. sodass $u\,v\,z'$ nicht cozyklisch liegen (Satz 57). Dann liegen $u\,v\,z'$ cosimplizial, denn als Strahlen von Q liegen sie coplektisch (Satz 63). Auch $u\,v\,u'\,v'$ liegen als Strahlen von Q coplektisch und mit Satz 70 folgt die Existenz eines Strahls s, sodass $u\,v\,s$ und $u'\,v'\,s$ cozyklisch liegen, d.h. eines Strahls $s \in \mathcal{L}^2(u\,v) \cap \mathcal{L}^2(u'\,v') = Z \cap Z' = P \cap Q \cap P'$.
Es bleibt zu zeigen, dass P und P' keinen weiteren Strahl gemein haben. Sei also $s' \in P \cap P'$ beliebig. Dann trifft s' die Strahlen u, v (da P plektisch) und z' (da P' plektisch), liegt also in $\mathcal{L}(u\,v\,z') = Q$ (siehe Korollar 65) und damit in $P \cap Q \cap P' = Z \cap Z'$. Da aber Z und Z' nach (II.1) außer s keinen Strahl gemein haben, folgt $s = s'$ ■

Zwei Plexi P und Q sind **gleichartig**, kurz:

$$P \sim Q,$$

falls sie identisch sind oder genau einen Strahl gemein haben. Andernfalls sind P und Q **ungleichartig**, kurz:

$$P \not\sim Q.$$

75 Korollar

Inzidieren zwei Plexi mit ein und demselben dritten Plexus, so sind sie gleichartig.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 74. ■

76 Korollar

Zwei Plexi sind genau dann ungleichartig, wenn sie disjunkt sind oder inzidieren.

Beweis: Dies folgt aus Korollar 73. ■

77 Satz

Die Relation $\sim$ der Gleichartigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Plexi.

Beweis: Reflexivität und Symmetrie sind klar. Zur Transitivität: Seien A, B, C Plexi mit $A \sim B$ und $B \sim C$. Zu zeigen ist $A \sim C$. Wir können o.E. annehmen, dass A, B, C distinkt sind, sodass also insbesondere $B \cap A = \{a\}$ und $B \cap C = \{c\}$ für gewisse Strahlen a und c.

Fall $a = c$: Dann haben A und C den Strahl $s := a = c$ gemein. Es ist zu zeigen, dass s der einzige gemeinsame Strahl von A und C ist. Angenommen also, es gibt einen Strahl $s' \in A \cap C$ mit $s' \neq s$. Dann liegt s' nicht in B (da $B \cap A = \{s\}$) und gemäß Satz 67 ist somit $Z := B \cap \mathcal{L}(s')$ ein Zyklus. Da $s\,s'$ sich treffen (sie liegen beide im Plexus A) ist $s \in Z$. Sei $b \in Z$ ein von s verschiedener Strahl und sei $b' \in B$ gemäß Satz 71 derart, dass $B = \mathcal{L}(s\,b\,b')$. Der Strahl s' trifft s und b aber nicht b' (denn er liegt nicht in B), sodass also $s\,b\,s'$ cosimplizial liegen (Satz 62.2). Es ist also $\mathcal{L}(s\,b\,s')$ ein Plexus, welcher wie auch A und C die zwei Strahlen s, s' enthält. Wegen $A \neq C$ folgt $\mathcal{L}(s\,b\,s') = A$ oder $\mathcal{L}(s\,b\,s') = C$ gemäß Satz 72, mithin $b \in B \cap A$ oder $b \in B \cap C$, im Widerspruch zu $b \neq s = a = c$.

Fall $a \neq c$: Dann ist $a \notin C$ und $c \notin A$, d.h. $Z_a := C \cap \mathcal{L}(a)$ und $Z_c := A \cap \mathcal{L}(c)$ sind Zyklen (Satz 67). Da $a\,c$ sich treffen (sie liegen beide in B) ist $a \in Z_c$ und $c \in Z_a$. Sei $a' \in Z_c$ von a verschieden und $c' \in Z_a$ von c verschieden. Dann liegen $a\,a'c$ cosimplizial, denn nach Konstruktion liegen sie coplektisch ($a\,a'$ treffen sich, denn sie liegen in A) und lägen sie cozyklisch, so wäre $c \in \mathcal{L}^2(a\,a') = Z_c$ (Satz 57), im Widerspruch zu $c \notin A$; analog liegen $c\,c'a$ cosimplizial, da $a \notin C$. Wir haben also Plexi $\mathcal{L}(a\,a'c)$ und $\mathcal{L}(c\,c'a)$, welche die Strahlen a und c enthalten. Da $a', c' \notin B$ (denn $B \cap A = \{a\}$ und $B \cap C = \{c\}$) sind beide Plexi von B verschieden; da auch B die Strahlen a und c enthält, folgt $\mathcal{L}(a\,a'c) = \mathcal{L}(c\,c'a)$ mit Satz 72. Die beiden Plexi A und C sind von diesem Plexus $\mathcal{L}(a\,a'c) = \mathcal{L}(c\,c'a)$ verschieden, haben aber jeweils zwei Strahlen mit ihm gemein und müssen somit nach Korollar 73 jeweils mit ihm inzidieren. Mit Korollar 75 folgt $A \sim C$. ■

78 Satz

Seien u, v distinkte sich treffende Strahlen und sei P ein Plexus. Dann gibt es genau einen Plexus P' mit $P' \sim P$ und $u, v \in P'$.

Beweis: Nach Satz 72 gibt es genau zwei Plexi A, B, welche u, v enthalten und für diese gilt $A \cup B = \mathcal{L}(u\,v)$ und $A \cap B = \mathcal{L}^2(u\,v)$. Letzteres bedeutet, dass A, B inzidieren, nach Korollar 76 also insbesondere ungleichartig sind. Es genügt daher zu zeigen, dass $P \sim A$ oder $P \sim B$. Nach Lemma 68 ist $P \cap \mathcal{L}(u\,v) \neq \emptyset$ und wegen $\mathcal{L}(u\,v) = A \cup B$ folgt, dass $P \cap A \neq \emptyset$ oder $P \cap B \neq \emptyset$. Nehmen wir (o.E.) letzteres an, so können P, B nur gleichartig sein oder inzidieren (Korollar 76); im letzteren Fall folgt $P \sim A$ mit Korollar 75, da auch A, B inzidieren. Also gilt $P \sim B$ oder $P \sim A$. ■

79 Korollar

Die Menge der Plexi zerfällt in zwei Äquivalenzklassen bezüglich Gleichartigkeit.

Beweis: Seien u, v distinkte sich treffende Strahlen gemäß Satz 55. Nach Satz 72 gibt es genau zwei die Strahlen u, v enthaltende Plexi P und Q, und diese sind ungleichartig. Andererseits ist nach Satz 78 jeder Plexus zu einem die Strahlen u, v enthaltenden Plexus gleichartig, also zu P oder zu Q. ■

80 Satz

Ist P ein Plexus und s ein nicht in P liegender Strahl, so gibt es genau einen Plexus, welcher s enthält und mit P inzidiert.

Beweis: Nach Satz 67 ist $P \cap \mathcal{L}(s)$ ein Zyklus, d.h. $P \cap \mathcal{L}(s) = \mathcal{L}^2(u\,v)$ für gewisse distinkte sich treffende Strahlen u, v. Sei Q gemäß Satz 72 ein Plexus mit $P \cap Q = \mathcal{L}^2(u\,v)$ und $P \cup Q = \mathcal{L}(u\,v)$. Ersteres bedeutet, dass P, Q inzidieren; wegen $s \in \mathcal{L}(u\,v)$ (denn $u, v \in \mathcal{L}^2(u\,v) \subseteq \mathcal{L}(s)$) impliziert Letzteres $s \in Q$ (da $s \notin P$). Wegen $s \notin P$ kann es nach Satz 74 neben Q keinen weiteren Plexus geben, welcher mit P inzidiert und den Strahl s enthält. ■

81 Satz

Zu jedem Strahl s gibt es von jeder Art mindestens vier Plexi, welche s enthalten.

Beweis: Sei u ein zu s windschiefer Strahl (Axiom S7) und sei v ein u treffender Strahl mit $v \neq u$ (Satz 55). Sei P gemäß Satz 78 ein Plexus der gewünschten Art mit $u, v \in P$. Der Strahl s liegt nicht in P, weil windschief zu u (Satz 63). Damit ist $P \cap \mathcal{L}(s)$ gemäß Satz 67 ein Zyklus. Seien

z_1, z_2, z_3, z_4 mit Satz 61 vier distinkte Strahlen dieses Zyklus. Für $i = 1, 2, 3, 4$ sei P_i ein Plexus mit $P_i \sim P$ und $s, z_i \in P_i$ (wiederum gemäß Satz 78; beachte $s \neq z_i$, da $s \notin P$). Wegen $P_i \neq P$ (denn $s \in P_i$) gilt dann $P_i \cap P = \{z_i\}$. Mit z_1, z_2, z_3, z_4 sind daher auch die Plexi P_1, P_2, P_3, P_4 distinkt. ■

82 Satz

Zu jedem Plexus gibt es einen disjunkten Plexus.

Beweis: Sei P ein beliebiger Plexus. Sei s ein Strahl mit $s \notin P$ (ein solcher existiert nach Satz 62.4). Nach Satz 80 gibt es genau einen Plexus Q, welcher mit P inzidiert und s enthält. Sei Q' gemäß Satz 81 ein von Q verschiedener Plexus mit $Q' \sim Q$ und $s \in Q'$. Mit P, Q sind auch P, Q' ungleichartig, inzidieren aber nicht (da $Q' \neq Q$). Nach Korollar 76 muss Q' also disjunkt zu P sein. ■

Sind $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ Strahlen derart, dass

$$a_i\, a_j \text{ sich treffen} \quad \text{gdw.} \quad |i - j| \neq 3, \qquad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N}_6,$$

so bilden $a_1\, a_2\, a_3\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ ein **Tetraeder**.

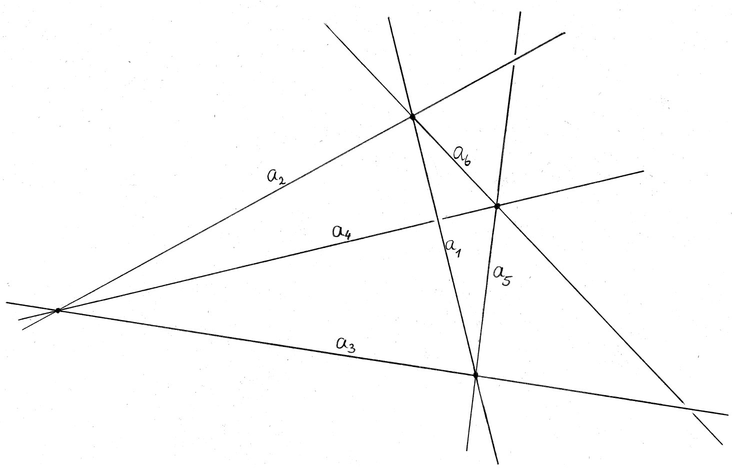


Abbildung II.7. $a_1\, a_2\, a_3\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ bilden ein Tetraeder.

G_T bezeichne die von den Permutationen $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$ und $(3\,6)$ erzeugte Untergruppe von S_6.

83 Satz

Die Relation „bilden ein Tetraeder" ist G_T-symmetrisch.

Beweis: Seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ beliebig, sodass $a_1\, a_2\, a_3\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ ein Tetraeder bilden. Dann liegen die Strahlenpaare

$$a_1\, a_4 \quad a_2\, a_5 \quad a_3\, a_6 \qquad \text{jeweils windschief} \tag{II.2}$$

und außer diesen enthält das Strahlengebilde $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ kein weiteres Paar windschiefer Strahlen (wenn wir die Paare ungeordnet auffassen, d.h. Strahlenpaare $a\,b$ und $b\,a$ identifizieren). Es liegt also jeder Strahl dieses Strahlengebildes zu genau einem anderen Strahl desselben windschief. Für eine Permutation $\pi \in S_6$ bilden somit $a_{\pi(1)}\, a_{\pi(2)}\, a_{\pi(3)}\, a_{\pi(4)}\, a_{\pi(5)}\, a_{\pi(6)}$ genau dann ein Tetraeder wenn die Strahlenpaare

$$a_{\pi(1)}\, a_{\pi(4)} \quad a_{\pi(2)}\, a_{\pi(5)} \quad a_{\pi(3)}\, a_{\pi(6)} \qquad \text{jeweils windschief liegen.}$$

Im Fall $\pi = (1\,2\,3)(4\,5\,6)$ handelt es sich dabei um die Paare

$$a_2\,a_5 \quad a_3\,a_6 \quad a_1\,a_4$$

und im Fall $\pi = (3\,6)$ um die Paare

$$a_1\,a_4 \quad a_2\,a_5 \quad a_6\,a_3.$$

Alle diese Strahlenpaare liegen nach (II.2) windschief. Also sind $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$ und $(3\,6)$ und mithin auch alle Permutationen von G_T Symmetrien der Relation „bilden ein Tetraeder“. ■

84 Satz

Liegen $a\,b\,c$ cosimplizial, so gibt es Strahlen a', b', c' sodass $a\,b\,c\,a'\,b'\,c'$ ein Tetraeder bilden.

Beweis: Sei P gemäß Satz 82 ein zum Plexus $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ disjunkter Plexus. Wähle jeweils mit Lemma 68 Strahlen

$$a' \in P \cap \mathcal{L}(b\,c), \quad b' \in P \cap \mathcal{L}(a\,c), \quad c' \in P \cap \mathcal{L}(a\,b).$$

Wegen $P \cap \mathcal{L}(a\,b\,c) = \emptyset$ liegen a', b', c' nicht in $\mathcal{L}(a\,b\,c)$, d.h. $a\,a'$ und $b\,b'$ und $c\,c'$ liegen windschief. Da $a\,b\,c$ und (als Strahlen von P) auch $a'\,b'\,c'$ coplektisch liegen, erfüllen a', b', c' die Behauptung. ■

85 Satz

Bilden $a_1\,b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,c_2$ ein Tetraeder, so liegen $a_i\,b_j\,c_k$ cosimplizial für $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Beweis: Es ist $a_i \neq b_j$, da a_i im Gegensatz zu b_j sowohl b_1 als auch b_2 trifft. Es sind also $a_i\,b_j$ distinkte sich treffende Strahlen. Da $c_1, c_2 \in \mathcal{L}(a_i\,b_j)$ windschief liegen, liegen nach Satz 62.2 $a_i\,b_j\,c_1$ und $a_i\,b_j\,c_2$ cosimplizial. ■

86 Lemma

Seien a_1, b_1, a_2, b_2 Strahlen, sodass sich $a_i\,b_j$ treffen für $i, j \in \{1, 2\}$ und $a_1\,a_2$ sowie $b_1\,b_2$ jeweils windschief liegen. Dann enthält $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,a_2\,b_2)$ genau zwei Strahlen. Sind c_1, c_2 diese beiden Strahlen, so bilden $a_1\,b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,c_2$ ein Tetraeder.

Beweis: Seien P_1, P_2 distinkte a_1 und b_1 enthaltende Plexi gemäß Satz 72. Für $i = 1, 2$ sei $c_i \in P_i \cap \mathcal{L}(a_2\,b_2)$ gemäß Lemma 68. Offensichtlich liegt c_i in $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,a_2\,b_2)$. Es liegen $a_1\,b_1\,c_i$ cosimplizial, denn lägen sie cozyklisch, so träfe a_2 mit b_1 und c_i auch a_1 (Satz 50; beachte $b_1 \neq c_i$, da $b_1\,b_2$ im Gegensatz zu $c_i\,b_2$ windschief liegen). Für $i = 1, 2$ gilt also $P_i = \mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_i)$ (Korollar 65). Träfe nun c_1 den Strahl c_2, so läge er in $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_2) = P_2$ und es wäre $P_2 = \mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1)$ (wiederum gemäß Korollar 65), im Widerspruch zu $P_2 \neq P_1$. Also liegen $c_1\,c_2$ windschief und $a_1\,b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,c_2$ bilden ein Tetraeder.

Sei nun $c \in \mathcal{L}(a_1\,b_1\,a_2\,b_2)$ beliebig. Wegen $\mathcal{L}(a_1\,b_1) = P_1 \cup P_2$ (siehe Satz 72) liegt dann c in P_1 oder in P_2, d.h. c trifft c_i für ein gewisses $i \in \{1, 2\}$. Dann liegen $c\,c_i\,a_i$ cozyklisch, da sie coplektisch liegen und von windschiefen Strahlen b_1, b_2 getroffen werden. Analog liegen $c\,c_i\,b_i$ cozyklisch, da $a_1, a_2 \in \mathcal{L}(c\,c_1\,b_i)$ windschief liegen. Wäre nun $c \neq c_i$, so lägen damit auch $c\,c_i\,a_i\,b_i$ cozyklisch (Satz 54), was unmöglich ist, da $a_i\,b_i\,c_i$ nach Satz 85 cosimplizial liegen. Also enthält $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,a_2\,b_2)$ neben c_1 und c_2 keinen weiteren Strahl. ■

87 Korollar

Bilden $a_1\,b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,c_2$ ein Tetraeder, so sind $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1)$ und $\mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_2)$ disjunkte Plexi, also insbesondere ungleichartig. Ferner gilt:

$$\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1) \sim \mathcal{L}(a_1\,b_2\,c_2) \sim \mathcal{L}(a_2\,b_1\,c_2) \sim \mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_1)$$

und

$$\mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_2) \sim \mathcal{L}(a_2\,b_1\,c_1) \sim \mathcal{L}(a_1\,b_2\,c_1) \sim \mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_2).$$

Beweis: Gemäß Satz 85 liegen $a_i\,b_j\,c_k$ cosimplizial für $i, j, k \in \{1, 2\}$, sodass es sich tatsächlich um Plexi handelt. Es ist $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1) \cap \mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_2) \subseteq \mathcal{L}(a_1\,b_1\,a_2\,b_2) = \{c_1, c_2\}$ gemäß Lemma 86. Da jedoch die Strahlen $c_1\,c_2$ windschief liegen, liegt keiner von beiden in $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1) \cap \mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_2)$. Damit ist $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1) \cap \mathcal{L}(a_2\,b_2\,c_2) = \emptyset$ gezeigt.

Nach Korollar 73 inzidieren die Plexi $\mathcal{L}(a_1\,b_1\,c_1)$ und $\mathcal{L}(a_1\,b_2\,c_2)$ jeweils mit dem Plexus $\mathcal{L}(a_1\,b_2\,c_1)$ und sind damit nach Korollar 75 zueinander gleichartig. Die übrigen Beziehungen ergeben sich symmetrisch analog (beachte Satz 83). ■

II.2. Der Satz von Desargues

88 Theorem (Desargues im Raume)

Seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ Strahlen derart, dass $a_1\,a_2\,a_3$ und $b_1\,b_2\,b_3$ cosimplizial liegen und $\{a_1, a_2, a_3\} \cap \mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3) = \emptyset$. Dann sind äquivalent:

1. *Es gibt einen Strahl s, sodass*

$$s\,a_1\,b_1 \quad s\,a_2\,b_2 \quad s\,a_3\,b_3 \quad \textit{cosimplizial liegen.}$$

2. *Es gibt Strahlen s_1, s_2, s_3, sodass*

$$a_1\,a_2\,a_3\,s_1\,s_2\,s_3 \quad \textit{und} \quad b_1\,b_2\,b_3\,s_1\,s_2\,s_3 \quad \textit{Tetraeder bilden.}$$

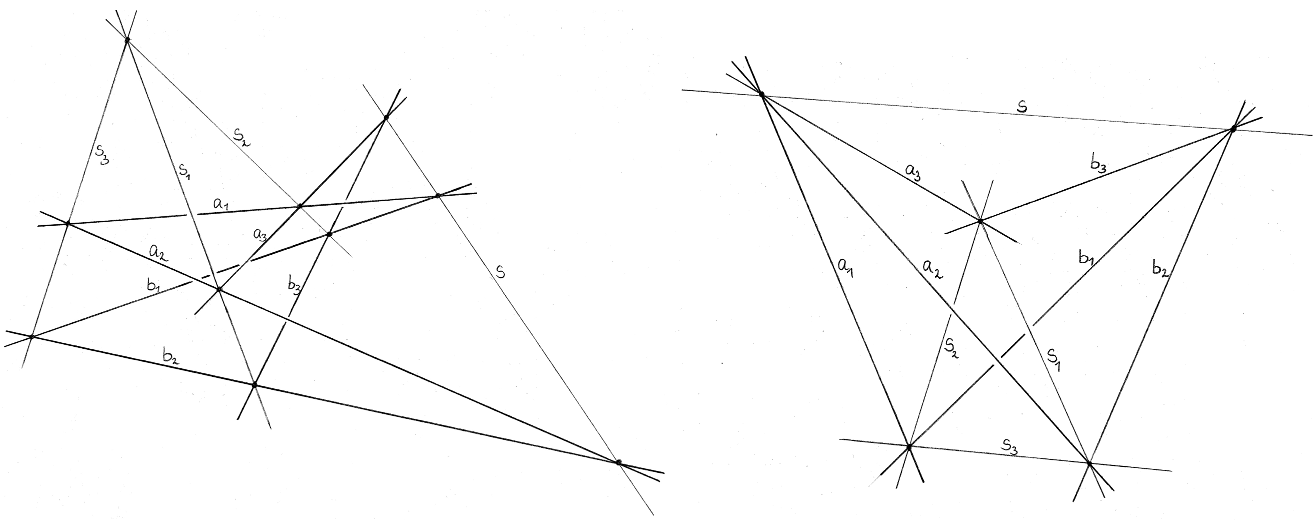


Abbildung II.8.

Beweis: Beachte im Folgenden, dass $a_1\,a_2\,a_3$ und $b_1\,b_2\,b_3$ jeweils coplektisch liegen und $a_1\,a_2\,a_3\,b_1\,b_2\,b_3$ distinkt sind (letzteres nach Satz 62.1 und wegen $a_1, a_2, a_3 \notin \mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3)$).

Zu 1 ⇒ 2: Sei s gemäß 1. gegeben, d.h. insbesondere trifft s alle gegebenen Strahlen und ist von ihnen verschieden. Wir zeigen zunächst:

$$\text{Treffen sich } a_i\,b_j, \text{ so auch } a_j\,b_i, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{II.3}$$

Im Fall $i = j$ ist das klar. Sei also $i \neq j$ und angenommen $a_i\,b_j$ treffen sich. Da sich auch $a_i\,b_i$ treffen und nach Voraussetzung $a_i \notin \mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3)$, liegen dann $a_i\,b_k$ windschief für $k \in \{1, 2, 3\}\backslash i, j$. Wegen $a_i, b_k \in \mathcal{L}(b_i\,b_j\,s)$ liegen also $b_i\,b_j\,s$ cozyklisch. Der Strahl a_j trifft daher mit s und b_j auch b_i (Satz 50, beachte $s \neq b_j$).

Wir zeigen nun die Existenz von i, j, k mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ und sodass

$$\begin{matrix} a_j\,b_i & a_k\,b_i \\ a_i\,b_j & a_i\,b_k \end{matrix} \quad \text{windschief liegen.} \tag{II.4}$$

Wir können dazu natürlich o.E. annehmen, dass es distinkte $j, k \in \{1, 2, 3\}$ gibt sodass $a_j\,b_k$ sich treffen. Gemäß (II.3) treffen sich dann auch $a_k\,b_j$. Sei i mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Wegen $a_j, a_k \notin \mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3)$ liegen dann $a_j\,b_i$ und $a_k\,b_i$ windschief. Mit (II.3) folgt, dass auch $a_i\,b_j$ und $a_i\,b_k$ windschief liegen.

Wähle nun mit Lemma 86 angewendet auf $a_i\,b_i\,b_k\,a_k$ einen Strahl s_j, sodass $a_i\,b_i\,s\,b_k\,a_k\,s_j$ ein Tetraeder bilden. Da nach Voraussetzung $a_i\,a_j\,a_k$ cosimplizial liegen, liegen mit $s_j\,s$ auch $s_j\,a_j$ windschief (sonst läge neben s auch s_j im Plexus $\mathcal{L}(a_i\,a_j\,a_k)$, d.h. $s_j\,s$ träfen sich). Analog: Da $b_i\,b_j\,b_k$ cosimplizial liegen, liegen mit $s_j\,s$ auch $s_j\,b_j$ windschief. Es ist also s_j ein zu a_j, b_j, s windschiefer Strahl, welcher a_i, a_k, b_i, b_k trifft. Symmetrisch analog (vertausche j, k) erhalten wir einen zu a_k, b_k, s windschiefen Strahl s_k, welcher a_i, a_j, b_i, b_j trifft. Es treffen sich $s_j\,s_k$, denn sie liegen wie s in $\mathcal{L}(a_i\,b_i)$, ohne s zu treffen (Axiom S3; beachte $a_i \neq b_i$). Mit Lemma 86 angewendet auf $a_k\,a_j\,s_k\,s_j$ erhalten wir einen Strahl s_i sodass

$$a_k\,a_j\,a_i\,s_k\,s_j\,s_i \quad \text{ein Tetraeder bilden.} \tag{II.5}$$

Insbesondere liegen $a_i\,s_i$ windschief. Da nach (II.4) auch $a_i\,b_j$ windschief liegen, treffen sich $s_i\,b_j$, denn sie liegen wie a_i in $\mathcal{L}(a_j\,s_k)$ (Axiom S3; beachte $a_j \neq s_k$). Analog treffen sich $s_i\,b_k$, da sie wie a_i in $\mathcal{L}(a_k\,s_j)$ liegen, ohne a_i zu treffen. Wegen $s_i \neq b_i$ (denn b_i trifft a_i) folgt mit Lemma 86 angewendet auf $b_k\,b_j\,s_k\,s_j$, dass

$$b_k\,b_j\,b_i\,s_k\,s_j\,s_i \quad \text{ein Tetraeder bilden.}$$

Hieraus und aus (II.5) ergibt sich die Behauptung mit Satz 83.

Zu 2 ⇒ 1: Seien s_1, s_2, s_3 gemäß 2. gegeben. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ treffen sich $a_i\,b_i$ denn sie liegen zu s_i windschief und treffen s_j, s_k für j, k mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (Axiom S3). Die beiden Plexi $\mathcal{L}(a_1\,a_2\,a_3)$ und $\mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3)$ sind nach Korollar 87 jeweils ungleichartig zum Plexus $\mathcal{L}(s_1\,s_2\,s_3)$ und damit nach Korollar 79 zueinander gleichartig. Es gibt also einen Strahl $s \in \mathcal{L}(a_1\,a_2\,a_3) \cap \mathcal{L}(b_1\,b_2\,b_3)$. Angenommen für ein $i \in \{1, 2, 3\}$ liegen $s\,a_i\,b_i$ cozyklisch. Seien j, k sodass $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Dann treffen s_j, s_k mit a_i und b_i auch s. Gemäß Lemma 86 angewendet auf $a_j\,a_k\,s_j\,s_k$ bzw. auf $b_j\,b_k\,s_j\,s_k$ folgt $s = a_i$ und $s = b_i$, im Widerspruch zu $a_i \neq b_i$. Also liegen $s\,a_i\,b_i$ cosimplizial für $i = 1, 2, 3$. ■

Ein Strahl s liegt **cosimplizial zu einem Strahlengebilde** S, falls $s\,a\,b$ cosimplizial liegen für je zwei distinkte Strahlen $a, b \in S$.

89 Satz

Ein Strahl s liegt bereits dann cosimplizial zu einem zyklischen Strahlengebilde U, wenn es Strahlen $u, v \in U$ gibt, sodass $s\,u\,v$ cosimplizial liegen.

Beweis: Da $s\,u\,v$ cosimplizial liegen, ist insbesondere $u \neq v$ (Satz 62.1) und s trifft u und v. Nach Satz 53 trifft s damit bereits alle Strahlen von U. Angenommen nun, es gibt distinkte Strahlen $x, y \in U$, sodass $s\,x\,y$ nicht cosimplizial liegen. Dann liegen $s\,x\,y$ cozyklisch, denn sie liegen coplektisch. Mit Satz 54 folgt, dass $\{s, x, y\} \cup U$ zyklisch ist. Damit ist aber insbesondere die Teilmenge $\{s, u, v\}$ zyklisch, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

90 Lemma

Seien $a\,b\,c$ cosimplizial und sei $s \in \mathcal{L}(a\,b\,c)$ von a, b, c verschieden. Dann gibt es cosimpliziale Strahlen a', b', c', welche nicht in $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ liegen und sodass

$$s\,a\,a' \qquad s\,b\,b' \qquad s\,c\,c' \qquad \textit{cosimplizial liegen.}$$

Beweis: Sei $P := \mathcal{L}(a\,b\,c)$ und sei P' ein Plexus mit $P' \cap P = \{s\}$ (siehe Satz 81). Die Strahlen a, b, c liegen nicht in P' (weil von s verschieden), sodass also $P' \cap \mathcal{L}(a)$, $P' \cap \mathcal{L}(b)$ und $P' \cap \mathcal{L}(c)$ Zyklen sind. Es liegen nicht zugleich $s\,a\,b$ und $s\,a\,c$ cozyklisch, da sonst wegen $s \neq a$ auch $a\,b\,c$ cozyklisch lägen. Wir können also o.E. annehmen, dass $s\,a\,c$ cosimplizial liegen, mithin $P = \mathcal{L}(s\,a\,c)$ gemäß Korollar 65. Sei $a' \in P' \cap \mathcal{L}(a)$ mit $a' \neq s$ und $b' \in P' \cap \mathcal{L}(b)$ mit $s \neq b' \neq a'$ (existieren nach Satz 61). Als Strahlen von P' liegen $s\,a'\,b'$ coplektisch. Nach Wahl von P' liegen a' und b' nicht in P (da von s verschieden). Insbesondere liegen $a'\,c$ windschief (sonst wäre $a' \in \mathcal{L}(s\,a\,c) = P$), sodass der Zyklus $\mathcal{L}^2(a'\,b')$ vom Zyklus $P' \cap \mathcal{L}(c)$ verschieden ist und damit höchstens einen Strahl mit ihm gemein hat (Korollar 58). Es gibt also einen Strahl $c' \in P' \cap \mathcal{L}(c)$ welcher nicht in $\mathcal{L}^2(a'\,b')$ liegt und von s verschieden ist. Ersteres bedeutet, dass $a'\,b'\,c'$ cosimplizial liegen (als Strahlen von P' liegen sie coplektisch), letzteres garantiert $c' \notin P$ (wiederum nach Wahl von P'). Nach Konstruktion liegen $s\,a\,a'$, $s\,b\,b'$ und $s\,c\,c'$ jeweils coplektisch ($s\,c'$ treffen sich als Strahlen von P'), aber nicht cozyklisch, da a', b', c' im Gegensatz zu a, b, c, s nicht in P liegen (Satz 66; beachte $s \neq a, b, c$). ■

91 Theorem (Desargues im Plexus)

Seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ coplektische Strahlen, sodass $a_1\,a_2\,a_3$ und $b_1\,b_2\,b_3$ cosimplizial liegen. Dann sind äquivalent:

1. *Es gibt einen Strahl s, sodass*

$$s\,a_1\,b_1 \qquad s\,a_2\,b_2 \qquad s\,a_3\,b_3 \qquad \textit{cozyklisch liegen.}$$

2. *Es gibt cozyklische Strahlen s_1, s_2, s_3 sodass*

$$\begin{matrix} s_1\,a_2\,a_3 & s_2\,a_1\,a_3 & s_3\,a_1\,a_2 \\ s_1\,b_2\,b_3 & s_2\,b_1\,b_3 & s_3\,b_1\,b_2 \end{matrix} \qquad \textit{cozyklisch liegen.}$$

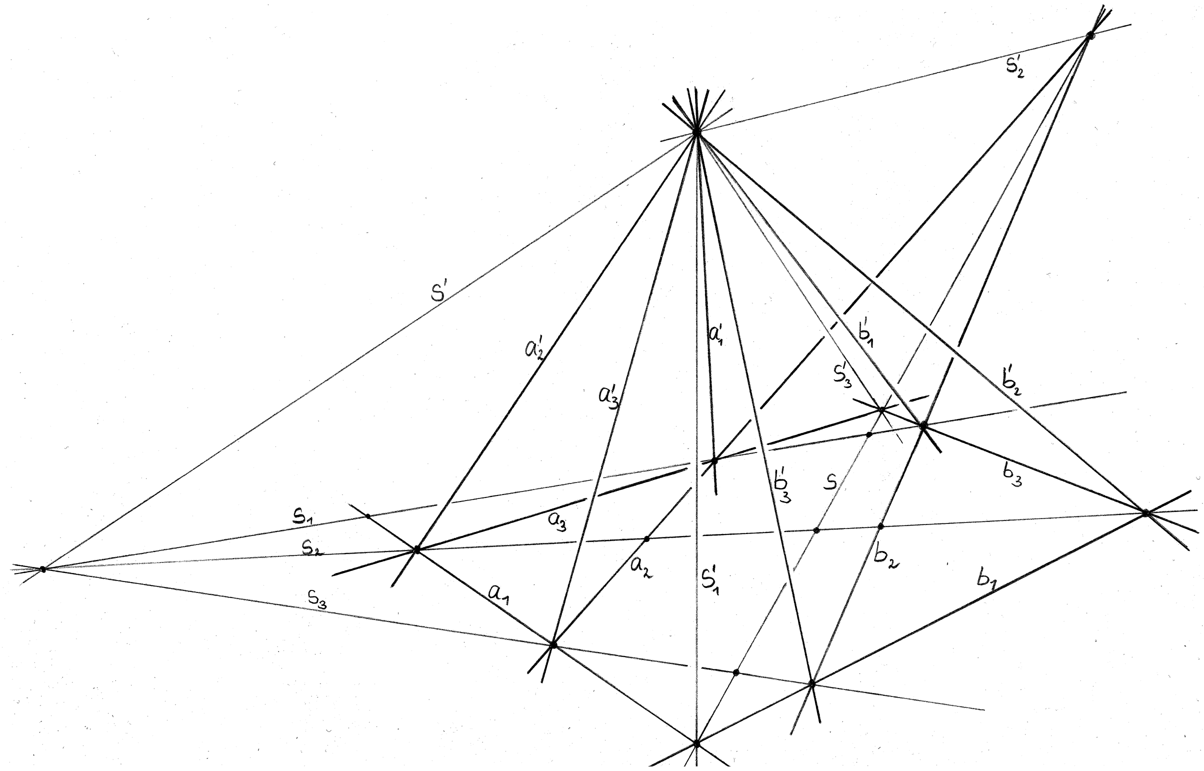


Abbildung II.9. Eine doppelte Illustration von Theorem 91.

Beweis: Beachte im Folgenden, dass nach Voraussetzung (und Satz 63) alle gegebenen Strahlen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ in einem gemeinsamen Plexus P liegen; für diesen gilt $P = \mathcal{L}(a_1\, a_2\, a_3) = \mathcal{L}(b_1\, b_2\, b_3)$ nach Korollar 65.

Zu 1 $\Rightarrow$ 2: Sei s gemäß 1. gegebenen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $s = a_i$ oder $s = b_i$ für ein $i \in \{1,2,3\}$. Aus Symmetriegründen können wir o.E. ersteres annehmen. Seien j, k sodass $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Nach Voraussetzung liegen $b_j\, s\, a_j$ und $b_k\, s\, a_k$ cozyklisch. Setzen wir $s_k := b_j$ und $s_j := b_k$ und beachten $s = a_i$, so liegen also $s_k\, a_i\, a_j$ und $s_j\, a_i\, a_k$ cozyklisch. Ferner liegen trivialerweise auch $s_k\, b_i\, b_j$ und $s_j\, b_i\, b_j$ cozyklisch (Satz 51). Gemäß Satz 70 gibt es einen Strahl s_i sodass $s_i\, a_j\, a_k$ und $s_i\, b_j\, b_k$ (und damit $s_i\, s_k\, s_j$) cozyklisch liegen. Dann erfüllen s_i, s_j, s_k die Behauptung.

Wir können also im Folgenden o.E. annehmen, dass

$$s \notin \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}. \tag{II.6}$$

Wir betrachten nun den Fall, dass $a_i\, a_j\, b_j$ oder $b_i\, b_j\, a_j$ cozyklisch liegen für gewisse distinkte $i, j \in \{1,2,3\}$. Aus Symmetriegründen können wir o.E. annehmen, dass ersteres der Fall ist. Sei k mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ gewählt und sei s_j derart, dass $s_j\, a_i\, a_k$ und $s_j\, b_i\, b_k$ cozyklisch liegen (Satz 70). Nach Satz 66 liegt mit a_i und a_k auch s_j in P, trifft also insbesondere die Strahlen a_j und b_j. Ist nun $a_j = b_j$ so setze $s_i := s_k := a_j = b_j$; dann erfüllen s_i, s_j, s_k offensichtlich die Behauptung. Ist $a_j \neq b_j$ so wähle s_i, sodass $s_i\, a_j\, a_k$ und $s_i\, b_j\, b_k$ cozyklisch liegen (Satz 70). Nach Satz 66 liegt mit a_j und a_k auch s_i in P, sodass also insbesondere $a_i\, a_j\, s_i\, s_j$ coplektisch liegen. Wiederum gemäß Satz 70 gibt es somit einen Strahl s_k, sodass $s_k\, a_i\, a_j$ und $s_k\, s_i\, s_j$ cozyklisch liegen. Mit $a_i\, a_j\, b_j$ und $a_j\, b_j\, s$ liegen auch $a_i\, a_j\, b_j\, s$ cozyklisch (da $a_j \neq b_j$), also mit $a_i\, b_i\, s$ auch $a_i\, b_i\, a_j\, b_j\, s$ (beachte $a_i \neq s$ gemäß (II.6)), und daher mit $s_k\, a_i\, a_j$ auch $s_k\, a_i\, b_i\, a_j\, b_j\, s$. Insbesondere liegen $s_k\, b_i\, b_j$ cozyklisch und s_1, s_2, s_3 erfüllen die Behauptung.

Wir können also annehmen, dass $a_i\,a_j\,b_j$ und $b_i\,b_j\,a_j$ für je zwei distinkte $i, j \in \{1, 2, 3\}$ cosimplizial liegen. Gemäß Korollar 65 folgt

$$P = \mathcal{L}(a_i\,a_j\,b_j) = \mathcal{L}(b_i\,b_j\,a_j), \qquad \text{für distinkte } i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{II.7}$$

Wähle nun jeweils mit Satz 70 Strahlen s_1, s_2, s_3 sodass

$$\begin{matrix} s_1\,a_2\,a_3 & s_2\,a_1\,a_3 & s_3\,a_1\,a_2 \\ s_1\,b_2\,b_3 & s_2\,b_1\,b_3 & s_3\,b_1\,b_2 \end{matrix} \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Nach Satz 66 liegen s_1, s_2, s_3 in P. Um zu zeigen, dass sie cozyklisch liegen (und damit die Behauptung erfüllen) werden wir einen nicht in P liegenden Strahl s' konstruieren, welcher s_1, s_2, s_3 trifft (siehe Abbildung II.10); dann liegen s_1, s_2, s_3 im Zyklus $\mathcal{L}(s') \cap P$ und damit cozyklisch (siehe Satz 67 und Satz 56).

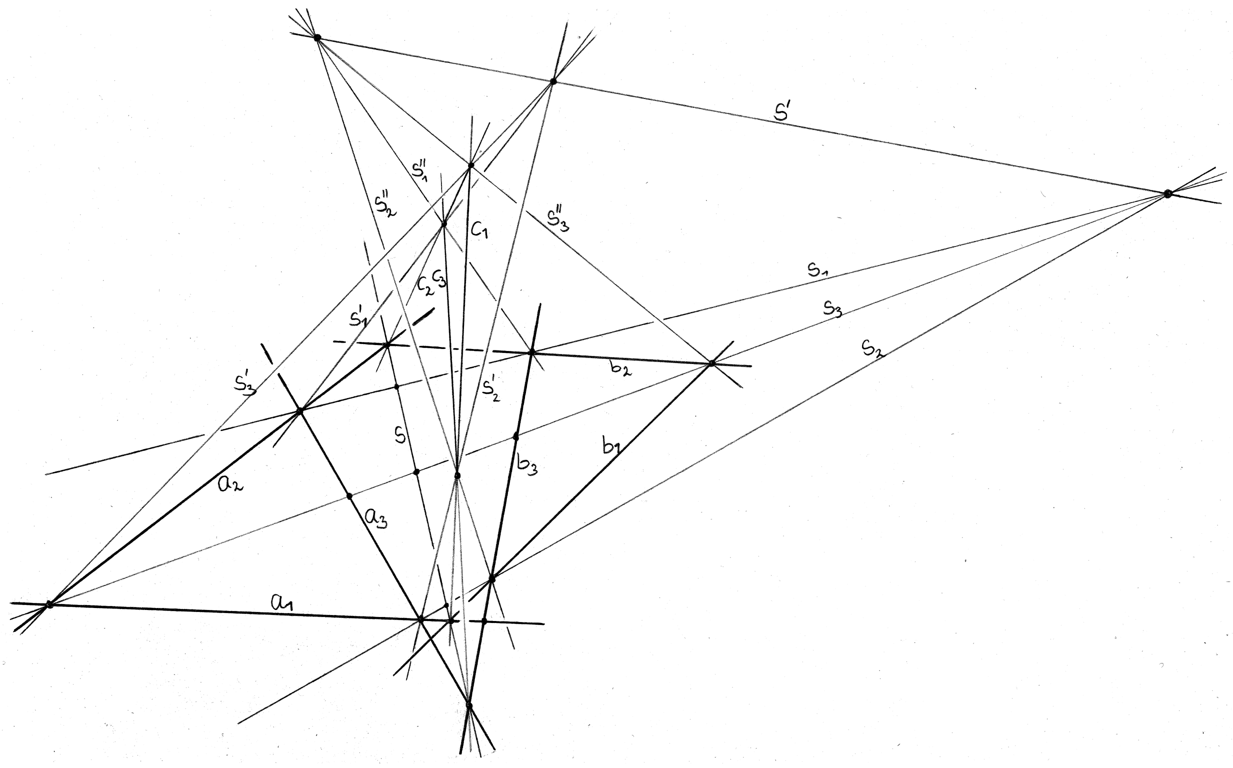


Abbildung II.10.

Wähle mit Lemma 90 cosimpliziale Strahlen c_1, c_2, c_3, sodass $s\,a_1\,c_1$, $s\,a_2\,c_2$ und $s\,a_3\,c_3$ cosimplizial liegen und $\{c_1, c_2, c_3\} \cap P = \emptyset$. Mit Theorem 88 angewendet auf $c_1\,c_2\,c_3$ und $a_1\,a_2\,a_3$ erhalten wir Strahlen s_1', s_2', s_3' sodass

$$c_1\,c_2\,c_3\,s_1'\,s_2'\,s_3' \quad \text{und} \quad a_1\,a_2\,a_3\,s_1'\,s_2'\,s_3' \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Da für $i = 1, 2, 3$ mit $s\,a_i\,c_i$ auch $s\,c_i\,b_i$ cosimplizial liegen (Satz 89 angewendet auf $\{s, a_i, b_i\}$; beachte $s \neq b_i$ gemäß (II.6)), erhalten wir mit Theorem 88 angewendet auf $c_1\,c_2\,c_3$ und $b_1\,b_2\,b_3$ Strahlen s_1'', s_2'', s_3'' sodass

$$c_1\,c_2\,c_3\,s_1''\,s_2''\,s_3'' \quad \text{und} \quad b_1\,b_2\,b_3\,s_1''\,s_2''\,s_3'' \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Für $k = 1, 2, 3$ ist $s_k' \neq s_k''$ denn sonst träfe s_k' neben a_i und a_j (mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) auch b_j, läge also wegen (II.7) in P, was unmöglich ist, da $s_k'\,a_k$ windschief liegen; allerdings treffen sich $s_k'\,s_k''$, denn sie treffen jeweils c_i und c_j aber nicht c_k (Axiom S3). Ferner treffen sich $s_k'\,s_k$ und $s_k''\,s_k$, da $s_k\,a_i\,a_j$ bzw. $s_k\,b_i\,b_j$ cozyklisch liegen. Wir halten fest:

$$s_k\,s_k'\,s_k'' \text{ liegen coplektisch} \quad \text{und} \quad s_k' \neq s_k'', \qquad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Nach Korollar 87 angewendet auf die Tetraeder $c_1\, c_2\, c_3\, s'_1\, s'_2\, s'_3$ und $c_1\, c_2\, c_3\, s''_1\, s''_2\, s''_3$ sind die beiden Plexi $\mathcal{L}(s'_1\, s'_2\, s'_3)$ und $\mathcal{L}(s''_1\, s''_2\, s''_3)$ jeweils ungleichartig zum Plexus $\mathcal{L}(c_1\, c_2\, c_3)$ und damit nach Korollar 79 zueinander gleichartig. Es gibt also einen Strahl $s' \in \mathcal{L}(s'_1\, s'_2\, s'_3) \cap \mathcal{L}(s''_1\, s''_2\, s''_3)$. Es ist $s' \notin P = \mathcal{L}(a_1\, a_2\, a_3)$, da $\mathcal{L}(a_1\, a_2\, a_3) \cap \mathcal{L}(s'_1\, s'_2\, s'_3) = \emptyset$ gemäß Korollar 87 angewendet auf das Tetraeder $a_1\, a_2\, a_3\, s'_1\, s'_2\, s'_3$.

Wir zeigen abschließend, dass s' die Strahlen s_1, s_2, s_3 trifft; daraus folgt dann wie oben erläutert die Behauptung. Beachte zunächst, dass s' höchstens einen der Strahlen c_1, c_2, c_3 trifft, denn träfe er c_i und c_j für distinkte $i, j \in \{1, 2, 3\}$ so wäre $s' = s'_k$ und $s' = s''_k$ mit k sodass $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (nach Lemma 86 angewendet auf die Tetraeder $c_1\, c_2\, c_3\, s'_1\, s'_2\, s'_3$ bzw. $c_1\, c_2\, c_3\, s''_1\, s''_2\, s''_3$), im Widerspruch zu $s'_k \neq s''_k$. Angenommen nun, $s'\, s_k$ liegen windschief für ein $k \in \{1, 2, 3\}$. Sei $j \in \{1, 2, 3\} \backslash k$ sodass $s'\, c_j$ windschief liegen. Dann treffen sich $c_j\, s_k$, denn sie liegen wie s' in $\mathcal{L}(s'_k\, s''_k)$ (siehe Axiom S3). Sei i sodass $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Da $s_k\, a_i\, a_j$ und $s_k\, b_i\, b_j$ cozyklisch liegen, trifft c_j mit s_k und a_j bzw. b_j auch a_i oder b_i (je nachdem $s_k \neq a_j$ oder $s_k \neq b_j$; wegen $a_j \neq b_j$ muss einer der beiden Fälle zutreffen). In beiden Fällen folgt $c_j \in P$ mit (II.7), im Widerspruch zur Wahl von c_1, c_2, c_3.

Zu 2 $\Rightarrow$ 1: Seien s_1, s_2, s_3 gemäß 2. gegebenen. Beachte dass $s_1, s_2, s_3 \in P$ gemäß Satz 66. Sei Q ein zu P disjunkter Plexus (Satz 82). Für i, j, k mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ seien $a'_i, b'_i \in Q$ Strahlen derart, dass a'_i die Strahlen a_j, a_k und b'_i die Strahlen b_j, b_k trifft (siehe Lemma 68); da $s_i\, a_j\, a_k$ bzw. $s_i\, b_j\, b_k$ cozyklisch liegen, treffen sich dann $a'_i\, s_i$ und $b'_i\, s_i$. Als Elemente des Plexus Q liegen $a'_1\, a'_2\, a'_3\, b'_1\, b'_2\, b'_3$ coplektisch. Wegen $Q \cap \mathcal{L}(a_1\, a_2\, a_3) = \emptyset$ liegen $a'_i\, a_i$ windschief für $i = 1, 2, 3$, d.h. insbesondere ist $a'_1 \neq a'_2$ und $a'_1\, a'_2\, a'_3$ liegen cosimplizial (lägen sie cozyklisch, so träfe a_3 mit a'_1 und a'_2 auch a'_3). Analog folgt, dass auch $b'_1\, b'_2\, b'_3$ cosimplizial liegen. Sei nun $s' \in Q$ ein die Strahlen s_1, s_2, s_3 treffender Strahl (existiert nach Lemma 68 und Satz 50, da $s_1\, s_2\, s_3$ cozyklisch liegen). Für $i = 1, 2, 3$ liegen dann $s'\, a'_i\, b'_i$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $Q \cap \mathcal{L}(s_i)$ (beachte $s_i \notin Q$, da $s_i \in P$). Also erfüllt s' Bedingung 1. in Bezug auf $a'_1\, a'_2\, a'_3$ und $b'_1\, b'_2\, b'_3$ (siehe Abbildung II.10), und mit der soeben gezeigten Implikation „1 $\Rightarrow$ 2" folgt die Existenz von cozyklischen Strahlen s'_1, s'_2, s'_3 sodass

$$\begin{array}{ccc} s'_1\, a'_2\, a'_3 & s'_2\, a'_1\, a'_3 & s'_3\, a'_1\, a'_2 \\ s'_1\, b'_2\, b'_3 & s'_2\, b'_1\, b'_3 & s'_3\, b'_1\, b'_2 \end{array} \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Für $i = 1, 2, 3$ treffen sich $a_i\, s'_i$ und $b_i\, s'_i$ (da $a_i \in \mathcal{L}(a'_j\, a'_k) = \mathcal{L}(s'_i\, a'_j\, a'_k)$ bzw. $b_i \in \mathcal{L}(b'_j\, b'_k) = \mathcal{L}(s'_i\, b'_j\, b'_k)$ für j, k mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$; siehe Satz 50). Sei $s \in P$ ein s'_1, s'_2, s'_3 treffender Strahl (wieder mit Lemma 68 und Satz 50). Dann liegen $s\, a_i\, b_i$ im Zyklus $P \cap \mathcal{L}(s'_i)$ (beachte $s'_i \notin P$, da $s'_i \in Q$ nach Satz 66) und damit cozyklisch. Also erfüllt s Behauptung 1. ■

II.3. Projektivitäten

Ein Strahlengebilde A liegt **perspektiv** zu einem Strahlengebilde B, kurz:

$$A \;\overline{\wedge}\; B,$$

falls jeder Strahl von A genau einen Strahl von B trifft; die dadurch gegebene Abbildung $\pi : A \to B$ ist eine **Perspektivität** von A nach B.

92 Satz

Für Zyklen Y und Z sind äquivalent:

1. $Y \barwedge Z$
2. $Z \barwedge Y$
3. $Z \cap \mathcal{L}(Y) = \emptyset$

Ferner gilt: Ist $\pi : Y \to Z$ eine Perspektivität, so ist π bijektiv und auch $\pi^{-1} : Z \to Y$ eine Perspektivität.

Beweis: Zu „1 $\Rightarrow$ 3“: Sei $z \in Z$ beliebig und sei $z' \in Z$ von z verschieden. Nach Voraussetzung enthält Y einen z' treffenden und damit zu z windschiefen Strahl. Also ist z kein Leitstrahl von Y. Damit ist $Z \cap \mathcal{L}(Y) = \emptyset$ gezeigt. Zu „3 $\Rightarrow$ 2“: Nach Satz 60 trifft jeder Strahl einen Strahl von Y, also insbesondere jeder Strahl von Z; träfe ein Strahl von Z zwei distinkte Strahlen von Y, so wäre er nach Satz 53 Leitstrahl von Y, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $Z \barwedge Y$. Die Implikation „2 $\Rightarrow$ 1“ ist äquivalent zur bereits gezeigten „1 $\Rightarrow$ 2“.
Die zweite Aussage ergibt sich aus der Äquivalenz „1 $\Leftrightarrow$ 2“. ■

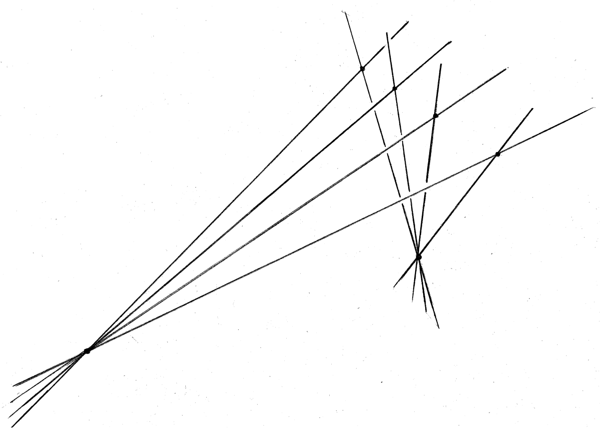


Abbildung II.11. Zwei zueinander perspektiv liegende zyklische Strahlengebilde.

Eine Abbildung $\pi : Y \to Z$ zwischen Zyklen Y und Z heißt **Projektivität**, falls es endlich viele Zyklen $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ gibt, $n \in \mathbb{N}$, und Perspektivitäten $\pi_k : Z_k \to Z_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_n$, sodass $\pi = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1$.

Man beachte, dass in dieser Definition $Z_1 = Y$ und $Z_{n+1} = Z$, letzteres wegen $Z_{n+1} = \pi_n\lceil Z_n \rfloor \subseteq \pi\lceil Y \rfloor \subseteq Z$ (siehe Satz 92) und weil ein Zyklus gemäß Korollar 58 nicht echt in einem anderen Zyklus enthalten sein kann. Mit Satz 92 ergibt sich:

93 Korollar

Sei $\pi : Y \to Z$ eine Projektivität zwischen Zyklen Y und Z. Dann ist π bijektiv und auch $\pi^{-1} : Z \to Y$ eine Projektivität.

Da das Kompositum zweier Projektivitäten offensichtlich selbst eine Projektivität ist, bilden die Zyklen zusammen mit den Projektivitäten zwischen ihnen ein Gruppoid.[5] Dazu bleibt lediglich zu zeigen, dass die identische Abbildung auf einem Zyklus eine Projektivität ist. Wir zeigen etwas stärker:

[5] also eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

94 Satz

Seien P ein Plexus, $Y, Z \subseteq P$ Zyklen und $s \in P \backslash (Y \cup Z)$. Dann ist die Abbildung $\pi : Y \to Z$ mit Graph

$$\{\langle y, z\rangle \in Y \times Z\,;\ y\,s\,z \text{ liegen cozyklisch}\}$$

eine Projektivität.

Beweis: Seien u, v distinkte Strahlen mit $Z = \mathcal{L}^2(u\,v)$. Nach Voraussetzung an s liegen dann $u\,v\,s$ cosimplizial und mit Satz 70 folgt, dass es zu jedem Strahl $y \in Y$ genau einen Strahl z gibt, sodass $u\,v\,z$ und $y\,s\,z$ cozyklisch liegen, also genau einen Strahl z mit $\langle y, z\rangle \in \pi$. Damit ist $\pi : Y \to Z$ wohldefiniert.

Sei nun Q ein zu P disjunkter Plexus gemäß Satz 82, sodass also insbesondere $s \notin Q$. Dann ist $X := Q \cap \mathcal{L}(s)$ ein Zyklus gemäß Satz 67. Träfe ein Strahl $x \in X$ zwei distinkte Strahlen y_1, y_2 von Y, so läge er in $\mathcal{L}(s\,y_1\,y_2) = P$ (Korollar 65; beachte die Voraussetzung an s), im Widerspruch zu $x \in Q$ und $P \cap Q = \emptyset$. Es gilt also $X \cap \mathcal{L}(Y) = \emptyset$ und mithin $X \;\overline{\wedge}\; Y$ gemäß Satz 92. Symmetrisch analog folgt $X \;\overline{\wedge}\; Z$. Wir haben also Perspektivitäten

$$\pi_1 : X \to Y \quad \text{und} \quad \pi_2 : X \to Z.$$

Für $x \in X$ liegen $\pi_1(x)\,s\,\pi_2(x)$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $P \cap \mathcal{L}(x)$ (beachte $x \notin P$, da P, Q disjunkt). Also gilt $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(y) = \pi(y)$ für alle $y \in Y$, d.h. $\pi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ ist Kompositum zweier Perspektivitäten (beachte Satz 92). ■

95 Korollar

Die Klasse der Zyklen bildet zusammen mit den Projektivitäten ein Gruppoid.

Beweis: Sei Z ein beliebiger Zyklus und sei s ein zu Z cosimplizialer Strahl (existiert nach Satz 89 und Satz 62.3). Dann ist

$$\{\langle z_1, z_2\rangle \in Z \times Z\,;\ z_1\,s\,z_2 \text{ liegen cozyklisch}\}$$

der Graph der Identität id_Z auf Z und mit Satz 94 folgt, dass id_Z eine Projektivität ist. ■

Wir schreiben

$y_1 \dots y_n \overset{\pi}{\wedge} z_1 \dots z_n$ für: Es gibt Zyklen $Y \supseteq \{y_1, \dots, y_n\}$ und $Z \supseteq \{z_1, \dots, z_n\}$ sodass $\pi : Y \to Z$ Projektivität ist und $\pi(y_i) = z_i$ für $i \in \mathbb{N}_n$,

und

$y_1 \dots y_n \wedge z_1 \dots z_n$ für: Es gibt eine Projektivität π mit $y_1 \dots y_n \overset{\pi}{\wedge} z_1 \dots z_n$.

Damit können wir den *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* formulieren, dessen Beweis uns bis Abschnitt II.8 beschäftigen wird. Er besagt:

Sind $u\,v\,w$ und $u'\,v'\,w'$ jeweils distinkt und cozyklisch, so gibt es genau eine Projektivität π mit

$$u\,v\,w \overset{\pi}{\wedge} u'\,v'\,w'.$$

Der Rest dieses Abschnitts ist der verhältnismäßig einfacheren Existenzaussage des Fundamentalsatzes gewidmet. Dazu benötigen wir:

96 Lemma

Für je zwei Strahlen y und z gilt $y \barwedge z$.

Beweis: Im Fall $y = z$ wähle einen beliebigen z enthaltenden Zyklus Z (Satz 55) und beachte $y \overset{\mathrm{id}_Z}{\barwedge} z$ gemäß Korollar 95. Seien also y, z distinkt, aber zunächst coplektisch angenommen. Sei x sodass $x\,y\,z$ cosimplizial liegen (Satz 62.3) und sei $s \in \mathcal{L}^2(y\,z)$ von y und z verschieden gewählt. Dann ist $s \notin \mathcal{L}^2(x\,y)$ (denn als distinkte Zyklen haben $\mathcal{L}^2(x\,y)$ und $\mathcal{L}^2(y\,z)$ nur den Strahl y gemein) und analog $s \notin \mathcal{L}^2(x\,z)$ und mit Satz 94 (angewendet auf den Plexus $\mathcal{L}(x\,y\,z)$, die Zyklen $\mathcal{L}^2(x\,y), \mathcal{L}^2(x\,z)$ und den Strahl s) folgt die Existenz einer Projektivität $\pi : \mathcal{L}^2(x\,y) \to \mathcal{L}^2(x\,z)$ mit $y \overset{\pi}{\barwedge} z$ (denn nach Wahl von s liegen $y\,s\,z$ cozyklisch).

Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht zurückführen: Wähle einen Strahl $x \in \mathcal{L}(y\,z)$ (etwa mit Lemma 68), sodann gemäß dem eben Bewiesenen Projektivitäten π_1, π_2 mit $y \overset{\pi_1}{\barwedge} x$ und $x \overset{\pi_2}{\barwedge} z$ und schließe auf $y \overset{\pi_2 \circ \pi_1}{\barwedge} z$ (mit Korollar 95). ■

97 Satz

$$x_1 \dots x_n \barwedge y_1 \dots y_n \wedge y_1 \dots y_n \barwedge z_1 \dots z_n \quad \Rightarrow \quad x_1 \dots x_n \barwedge z_1 \dots z_n.$$

Beweis: Falls $y_i = y_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_n$, so gilt auch $x_i = x_j$ und $z_i = z_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_n$ und die Behauptung folgt mit Lemma 96. Sei also angenommen, dass $y_i \neq y_j$ für gewisse $i, j \in \mathbb{N}_n$. Nach Voraussetzung haben wir Zyklen $X \supseteq \{x_1, \dots, x_n\}, Z \supseteq \{z_1, \dots, z_n\}$ und $Y_k \supseteq \{y_1, \dots, y_n\}$ für $k = 1, 2$, sowie Projektivitäten $\pi_1 : X \to Y_1$ und $\pi_2 : Y_2 \to Z$ mit $x_1 \dots x_n \overset{\pi_1}{\barwedge} y_1 \dots y_n$ und $y_1 \dots y_n \overset{\pi_2}{\barwedge} z_1 \dots z_n$. Da Y_1 und Y_2 die zwei distinkten Strahlen y_i, y_j gemein haben, ist $Y_1 = Y_2$ gemäß Korollar 58. Also ist $\pi_2 \circ \pi_1 : X \to Z$ und es folgt

$$x_1 \dots x_n \overset{\pi_2 \circ \pi_1}{\barwedge} z_1 \dots z_n$$

mit Korollar 95. ■

Wir schreiben

$$a_1 \dots a_n \doublebarwedge b_1 \dots b_n \quad \text{für:} \quad \{a_1, \dots, a_n\} \barwedge \{b_1, \dots, b_n\} \text{ und } a_i\,b_i \text{ treffen sich für } i \in \mathbb{N}_n.$$

Aus $a_1 \dots a_n \doublebarwedge b_1 \dots b_n$ folgt offensichtlich $a_{i_1} \dots a_{i_k} \doublebarwedge b_{i_1} \dots b_{i_k}$ für $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_n$.

98 Lemma

Seien $a_1, \dots, a_n$ beliebige und $z_1, \dots, z_n$ cozyklische Strahlen, sodass $a_i\,z_i$ sich treffen für $i \in \mathbb{N}_n$. Gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}_n$ ein $j \in \mathbb{N}_n$ sodass $a_i\,z_j$ windschief liegen, so gilt

$$a_1 \dots a_n \doublebarwedge z_1 \dots z_n.$$

Beweis: Träfe einer der Strahlen a_i neben z_i noch einen weiteren Strahl des zyklischen Strahlengebildes $\{z_1, \dots, z_n\}$, so träfe er nach Satz 53 alle Strahlen desselben, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

99 Satz

Seien $y_1, \dots, y_n$ und $z_1, \dots, z_n$ jeweils cozyklische Strahlen, sodass mindestens zwei der Strahlen $z_1, \dots, z_n$ distinkt sind. Dann gilt:

$$y_1 \dots y_n \doublebarwedge z_1 \dots z_n \quad \Rightarrow \quad y_1 \dots y_n \barwedge z_1 \dots z_n.$$

Beweis: Seien gemäß Voraussetzung $i, j \in \mathbb{N}_n$ sodass $z_i \neq z_j$ und mithin $y_i \neq y_j$. Dann liegen $y_1, \ldots, y_n$ im Zyklus $Y := \mathcal{L}^2(y_i\, y_j)$ und $z_1, \ldots, z_n$ im Zyklus $Z := \mathcal{L}^2(z_i\, z_j)$. Angenommen, es gibt ein $y \in Y \cap \mathcal{L}(Z)$. Für $k \in \{i, j\}$ mit $y \neq y_k$ gilt dann $z_k \in \mathcal{L}(y\, y_k) = \mathcal{L}(Y)$ (Satz 53), d.h. insbesondere trifft z_k die Strahlen y_i und y_j, im Widerspruch zu $y_i\, y_j \;\overline{\wedge}\; z_i\, z_j$. Also gilt $Y \cap \mathcal{L}(Z) = \emptyset$ und mit Satz 92 folgt die Existenz einer Perspektivität $\pi : Y \to Z$. Wegen $y_1 \ldots y_n \;\overline{\wedge}\; z_1 \ldots z_n$ gilt $\pi(y_i) = z_i$ für $i \in \mathbb{N}_n$. Damit ist $y_1 \ldots y_n \;\wedge\; z_1 \ldots z_n$ gezeigt, da π auch Projektivität ist. ■

Wir schreiben

$$a_1 \ldots a_n \overset{s}{\overline{\wedge}} b_1 \ldots b_n \quad \text{für:} \quad a_i\, s\, b_i \text{ liegen cozyklisch für } i \in \mathbb{N}_n.$$

100 Satz

Seien $y_1, \ldots, y_n$ Strahlen eines Zyklus Y und $z_1, \ldots, z_n$ Strahlen eines Zyklus Z. Dann gilt für jeden Strahl s, welcher weder in Y noch in Z liegt:

$$y_1 \ldots y_n \overset{s}{\overline{\wedge}} z_1 \ldots z_n \quad \Rightarrow \quad y_1 \ldots y_n \;\wedge\; z_1 \ldots z_n.$$

Beweis: Gilt $y_i \neq y_j$ für gewisse $i, j \in \mathbb{N}_n$ so liegen $y_i\, y_j\, s$ nicht cozyklisch (da $s \notin Y = \mathcal{L}^2(y_i\, y_j)$), d.h. die Zyklen $\mathcal{L}^2(y_i\, s)$ und $\mathcal{L}^2(y_j\, s)$ sind distinkt und haben somit außer s keinen Strahl gemein (Korollar 58); wegen $s \notin Z$ folgt $z_i \neq z_j$. Es gilt also

$$y_i \neq y_j \Leftrightarrow z_i \neq z_j \qquad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_n.$$

(die Implikation „$\Leftarrow$" folgt symmetrisch analog). Nach Lemma 96 können wir daher o.E. annehmen, dass $y_i \neq y_j$ und mithin $z_i \neq z_j$ für gewisse $i, j \in \mathbb{N}_n$. Dann folgt aber die Behauptung mit Satz 94 angewendet auf den Plexus $\mathcal{L}(y_i\, y_j\, s)$, die Zyklen Y, Z und den Strahl s (beachte, dass nach Satz 66 mit s und y_i bzw. y_j auch z_i und z_j im Plexus $\mathcal{L}(y_i\, y_j\, s)$ liegen, mithin auch der Zyklus $Z = \mathcal{L}^2(z_i\, z_j)$). ■

101 Satz

Seien u, v, w, x distinkte cozyklische Strahlen. Dann gilt

$$u\, v\, w\, x \;\wedge\; v\, u\, x\, w.$$

Beweis: Sei s mit Satz 62.3 sodass $u\, v\, s$ cosimplizial liegen. Nach Satz 89 liegt dann s zu dem zyklischen Strahlengebilde $\{u, v, w, x\}$ cosimplizial, sodass also insbesondere

$$s\, u\, w \quad s\, v\, w \quad s\, u\, x \quad s\, v\, x \quad \text{cosimplizial liegen} \tag{II.8}$$

und $u\, v\, w\, x\, s$ distinkt sind. Sei $u' \in \mathcal{L}^2(s\, u)$ ein von s und u verschiedener Strahl (Satz 61), sodass also

$$s\, u\, u' \quad \text{distinkt sind und cozyklisch liegen.}$$

Nach Satz 89 angewendet auf $\{s, u, u'\}$ liegen mit $s\, u\, x$ auch

$$s\, u'\, x \quad \text{und} \quad u\, u'\, x \quad \text{cosimplizial.} \tag{II.9}$$

Die Strahlen v und x treffen mit s und u auch u', sodass also $s\, v\, x\, u'$ coplektisch liegen. Mit Satz 70 folgt die Existenz eines Strahls v' sodass

$$s\, v\, v' \quad \text{und} \quad x\, u'\, v' \quad \text{cozyklisch liegen.}$$

Es ist v' von x und s verschieden, da sonst $s\,v\,x$ bzw. $x\,u'\,s$ cozyklisch lägen, im Widerspruch zu (II.8) bzw. (II.9). Gemäß Satz 89 angewendet auf $\{s, v, v'\}$ bzw. $\{x, u', v'\}$ liegen daher mit $s\,v\,w$ bzw. $u\,u'\,x$ auch

$$s\,v'\,w \quad \text{und} \quad u\,x\,v' \quad \text{cosimplizial.} \tag{II.10}$$

Insbesondere trifft v' die Strahlen s, w, u und x, sodass also $s\,w\,u\,x\,v'$ coplektisch liegen. Mit Satz 70 folgt die Existenz von Strahlen w', w'' sodass

$$s\,w\,w' \;\text{ und }\; x\,v'\,w' \quad \text{bzw.} \quad s\,w\,w'' \;\text{ und }\; u\,v'\,w'' \quad \text{cozyklisch liegen.}$$

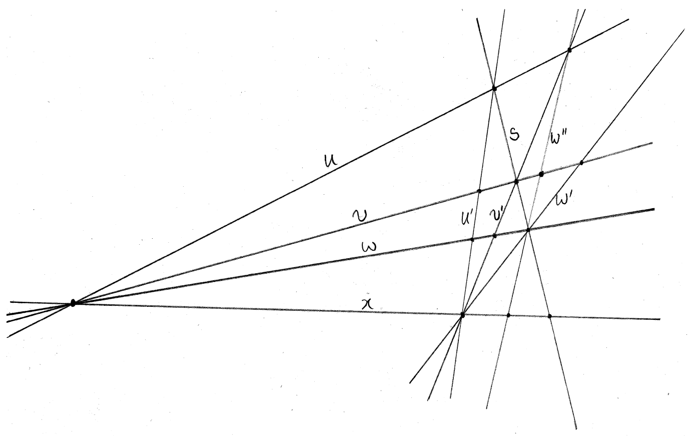


Abbildung II.12.

Dann gilt:

$$u\,v\,w\,x \;\overset{s}{\barwedge}\; u'\,v'\,w'\,x \;\overset{u}{\barwedge}\; s\,w''\,w'\,w \;\overset{v'}{\barwedge}\; v\,u\,x\,w,$$

und nach Satz 54 liegen $u'\,v'\,w'\,x$ sowie $s\,w''\,w'\,w$ cozyklisch (beachte $x \neq v'$ und $s \neq w$). Wegen (II.8), (II.9) und (II.10) folgt mit Satz 100:

$$u\,v\,w\,x \;\barwedge\; u'\,v'\,w'\,x \;\barwedge\; s\,w''\,w'\,w \;\barwedge\; v\,u\,x\,w$$

und hieraus ergibt sich die Behauptung mit Satz 97. ∎

102 Theorem

Seien $y_1\,y_2\,y_3$ und $z_1\,z_2\,z_3$ jeweils distinkt und cozyklisch. Dann gilt

$$y_1\,y_2\,y_3 \;\barwedge\; z_1\,z_2\,z_3.$$

Beweis: Sei im Folgenden Y der y_1, y_2, y_3 enthaltende Zyklus (also $Y = \mathcal{L}^2(y_1\,y_2)$) und Z der z_1, z_2, z_3 enthaltende Zyklus (siehe Satz 57).

1. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $Y \cup Z$ plektisch ist und $Y \neq Z$. Letzteres bedeutet nach Korollar 58, dass Y und Z höchstens einen Strahl gemein haben. Es gibt daher distinkte $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sodass $y_i \notin Z$ und $z_j \notin Y$, insbesondere $y_i \neq z_j$. Sei x ein von y_i und z_j verschiedener Strahl im Zyklus $X := \mathcal{L}^2(y_i\,z_j)$ (beachte, dass sich $y_i\,z_j$ treffen, da $Y \cup Z$ plektisch ist; der Strahl x existiert nach Satz 61), sodass also

$$x\,y_i\,z_j \quad \text{distinkt sind und cozyklisch liegen.}$$

Sei k mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Wir zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen

$$x\, y_i\, z_j \;\barwedge\; y_k\, y_i\, y_j. \tag{II.11}$$

Dann folgt symmetrisch analog $x\, z_j\, y_i \barwedge z_k\, z_j\, z_i$ (vertausche $y_k, y_i\, y_j$ respektive mit z_k, z_j, z_i), damit

$$y_k\, y_i\, y_j \;\barwedge\; x\, y_i\, z_j \;\barwedge\; z_k\, z_i\, z_j$$

und die Behauptung ergibt sich mit Satz 97.

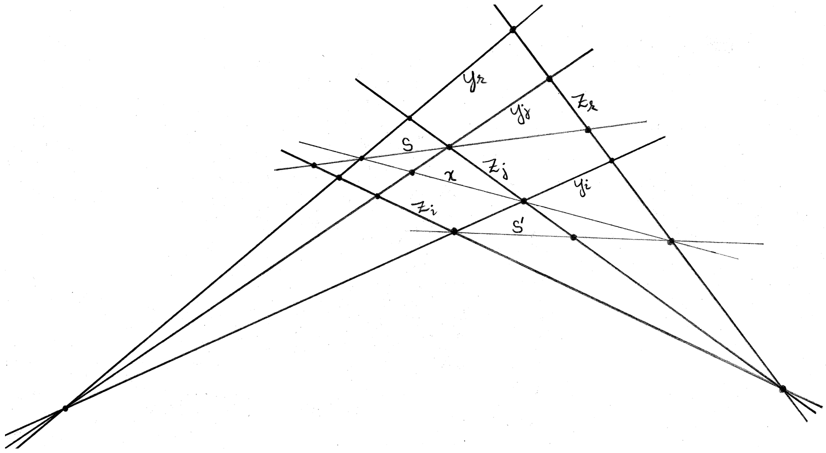


Abbildung II.13.

Da $Y \cup Z$ plektisch ist, gibt es einen Plexus $P \supseteq Y \cup Z$. Mit y_i und z_j liegt auch x in P (Satz 66) sodass also insbesondere $x\, y_k\, z_j\, y_j$ coplektisch liegen. Mit Satz 70 erhalten wir einen Strahl s sodass

$$x\, y_k\, s \quad \text{und} \quad z_j\, y_j\, s \quad \text{cozyklisch liegen.}$$

Mit z_j und y_j liegt auch s in P (wiederum Satz 66; beachte dass $z_j \neq y_j$, da $z_j \notin Y$) sodass sich insbesondere $s\, y_i$ treffen und somit $y_i\, y_i\, s$ cozyklisch liegen. Es gilt also

$$x\, y_i\, z_j \overset{s}{\barwedge} y_k\, y_i\, y_j.$$

Wir zeigen noch $s \notin X$ und $s \notin Y$, denn dann folgt (II.11) mit Satz 100. Es ist $s \neq z_j$, denn sonst lägen neben $x\, y_i\, z_j$ auch $x\, y_k\, z_j$ und mithin $x\, y_i\, y_k\, z_j$ cozyklisch (Satz 54), im Widerspruch zu $z_j \notin Y$. Wäre nun $s \in X$, so lägen neben $z_j\, y_j\, s$ auch $y_i\, z_j\, s$ und damit $y_i\, z_j\, y_j\, s$ cozyklisch, im Widerspruch zu $z_j \notin Y = \mathcal{L}(y_i\, y_j)$. Es ist $y_k \neq s$, denn sonst lägen $z_j\, y_j\, y_k$ cozyklisch, im Widerspruch zu $z_j \notin Y$. Damit ist $s \notin Y$, denn sonst wäre $Y = \mathcal{L}^2(y_k\, s)$, mithin $x \in Y$ und damit $Y = \mathcal{L}^2(x\, y_i) = \mathcal{L}^2(x\, z_j)$, im Widerspruch zu $z_j \notin Y$.

2. Wir betrachten nun den Fall, dass $Y = Z$. Seien dazu P und Q Plexi mit $P \cap Q = Y = Z$ gemäß Satz 72. Es gilt $P \not\sim Q$ gemäß Korollar 76. Sei P' ein Plexus mit $P \cap P' = \{y_1\}$ gemäß Satz 81. Dann inzidieren P' und Q, denn sie sind weder disjunkt ($y_1 \in P' \cap Q$) noch gleichartig (da $P' \sim P \not\sim Q$). Es ist also $Z' := P' \cap Q$ ein Zyklus. Es ist $Y \cup Z'$ plektisch (weil $Y \cup Z' \subseteq Q$) und $Y \neq Z'$ (weil $Y \cap Z' \subseteq P \cap P' = \{y_1\}$). Seien $z'_1, z'_2, z'_3 \in Z'$ distinkte Strahlen (Satz 61). Jeweils mit 1. (und wegen $Y = Z$) folgt dann

$$y_1\, y_2\, y_3 \;\barwedge\; z'_1\, z'_2\, z'_3 \quad \text{und} \quad z'_1\, z'_2\, z'_3 \;\barwedge\; z_1\, z_2\, z_3$$

und mithin die Behauptung gemäß Satz 97.

3. Wir zeigen nun den Satz in seiner vollen Allgemeinheit. Seien dazu P_Y und P_Z zwei gleichartige Plexi mit $Y \subseteq P_Y$ und $Z \subseteq P_Z$ (siehe Satz 78 und Satz 66). Sei s ein gemeinsamer

Strahl von P_Y und P_Z und sei Q ein zu P_Y, P_Z ungleichartiger Plexus mit $s \in Q$ (Satz 81). Dann inzidiert Q mit P_Y und mit P_Z (weil weder disjunkt noch gleichartig), d.h. wir haben Zyklen $Y' := P_Y \cap Q$ und $Z' := P_Z \cap Q$. Das Strahlengebilde $Y' \cup Z'$ ist plektisch, denn es ist in Q enthalten. Ähnlich sind auch $Y \cup Y'$ und $Z \cup Z'$ plektisch, da sie in P_Y bzw. in P_Z enthalten sind. Sind also $y_1', y_2', y_3' \in Y'$ und $z_1', z_2', z_3' \in Z'$ jeweils drei distinkte Strahlen, so können wir mit den bereits gezeigten Fällen (1. bzw. 2.) schließen:

$$y_1\, y_2\, y_3 \;\barwedge\; y_1'\, y_2'\, y_3' \quad \text{und} \quad y_1'\, y_2'\, y_3' \;\barwedge\; z_1'\, z_2'\, z_3' \quad \text{und} \quad z_1'\, z_2'\, z_3' \;\barwedge\; z_1\, z_2\, z_3$$

und die Behauptung folgt wieder mit Satz 97.

■

II.4. Die Relation $\mathcal{Q}$

Strahlen $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ bilden ein **Quadriplex**, falls $a_i\, a_j\, a_k$ cosimplizial liegen für je drei distinkte $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Strahlen $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2$ bilden mit Strahlen $t\, u\, v\, w$ eine **$\mathcal{Q}$-Konfiguration**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

Q1 $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2$ liegen cozyklisch und $u_i\, v_j\, w_k$ sind distinkt für $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Q2 $t\, u\, v\, w$ bilden ein Quadriplex und t liegt zu $\{u_1, v_1, w_1\}$ cosimplizial.

Q3 Es liegen $\begin{matrix} t\, u\, u_1 \\ v\, w\, u_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} t\, v\, v_1 \\ u\, w\, v_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} t\, w\, w_1 \\ u\, v\, w_2 \end{matrix}$ cozyklisch.

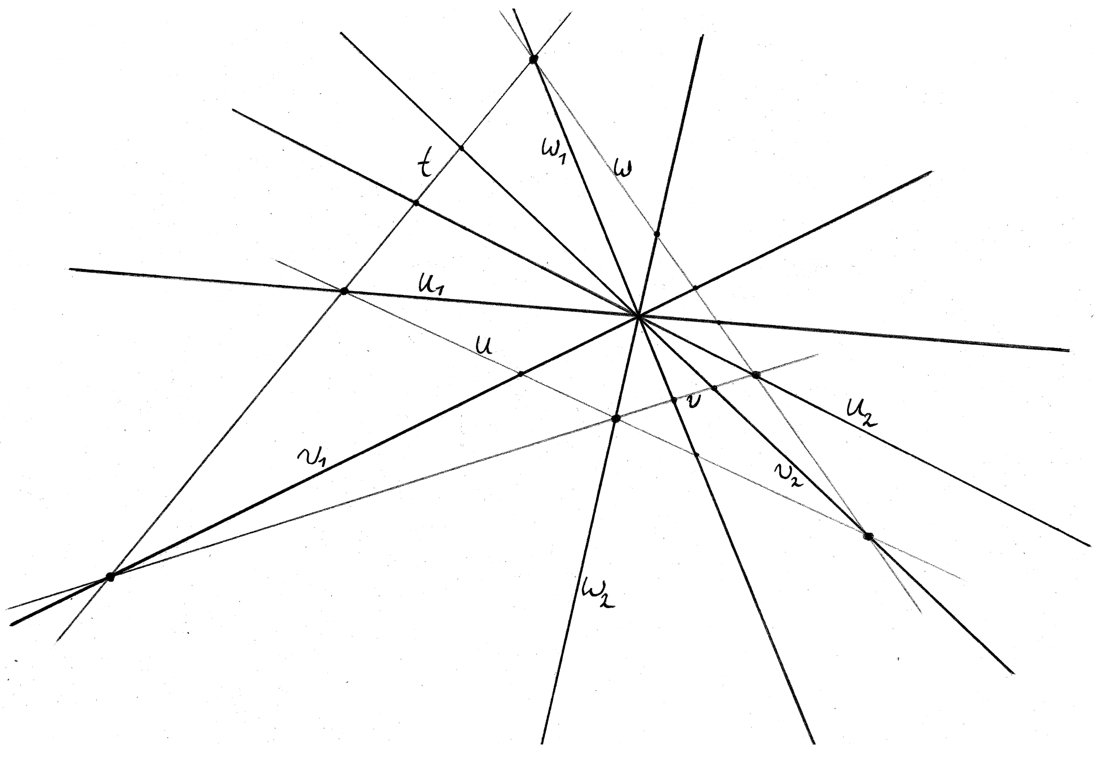


Abbildung II.14. Eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration.

103 Satz

Bilden $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration, so auch $u_1\,w_1\,v_1\,u_2\,w_2\,v_2$ mit $t\,u\,w\,v$ und $w_1\,v_1\,u_1\,w_2\,v_2\,u_2$ mit $t\,w\,v\,v$.

Beweis: Jede der Bedingungen Q1, Q2 und Q3 bleibt bei Permutation der Spalten von

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{array}$$

erhalten. ■

104 Satz

Bilden $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration, so liegen die Strahlen t, u, v, w jeweils zum Strahlengebilde $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}$ cosimplizial und für $i \in \{1, 2\}$ liegen

$$\begin{array}{ccc} u\,v\,u_i & v\,w\,v_i & w\,u\,w_i \\ u\,w\,u_i & v\,u\,v_i & w\,v\,w_i \\ t\,v\,u_i & t\,w\,v_i & t\,u\,w_i \\ t\,w\,u_i & t\,u\,v_i & t\,v\,w_i \end{array} \qquad \textit{cosimplizial.}$$

Insbesondere liegen alle Strahlen der $\mathcal{Q}$-Konfiguration coplektisch.

Beweis: Nach Q1 ist das Strahlengebilde $S := \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}$ zyklisch. Da $t\,u_1\,v_1$ nach Q2 cosimplizial liegen, folgt mit Satz 89, dass t zu S cosimplizial liegt. Es ist $u \neq u_1$, denn andernfalls lägen $u_1\,w\,v_2$ und $u_1\,v\,w_2$ cozyklisch, d.h. neben $u = u_1$ lägen auch w und v im Zyklus $\mathcal{L}^2(u_1\,v_1) = \mathcal{L}^2(u_1\,v_2) = \mathcal{L}^2(u_1\,w_2)$, im Widerspruch dazu, dass $u\,v\,w$ nach Q2 cosimplizial liegen. Mit Satz 89 angewendet auf $\{t, u, u_1\}$ folgt, dass mit $t\,u_1\,v_1$ auch $u\,u_1\,v_1$ cosimplizial liegen. Wiederum mit dem selben Satz folgt, dass u zum Strahlengebilde S cosimplizial liegt.

Aus Symmetriegründen (Satz 103) bleibt zu zeigen, dass für $i \in \{1, 2\}$

$$u\,v\,u_i \qquad \text{und} \qquad t\,v\,u_i \qquad \text{cosimplizial liegen.}$$

Beachte zunächst, dass $t, u \neq u_1$ und $v \neq u_2$, da t, u und v zu S cosimplizial liegen (und $|S| \geq 2$). Mit Satz 89 angewendet auf $\{t, u, u_1\}$ folgt, dass mit $t\,u\,v$ auch $u\,v\,u_1$ und $t\,v\,u_1$ cosimplizial liegen. Der selbe Satz angewendet auf $\{v, w, u_2\}$ ergibt, dass mit $u\,v\,w$ bzw. $t\,v\,w$ auch $u\,v\,u_2$ und $t\,v\,u_2$ cosimplizial liegen. ■

105 Lemma

Bereits dann bilden $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Q1′ $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ *liegen cozyklisch und* $u_i\,v_1\,w_k$ *sind distinkt sind für* $i, k \in \{1, 2\}$.

Q2′ $t\,u_1\,w_1$ *liegen cosimplizial und* $t \neq v \neq v_1$.

Q3′ *Es liegen* $\begin{array}{ccc} t\,u\,u_1 & t\,v\,v_1 & t\,w\,w_1 \\ v\,w\,u_2 & u\,w\,v_2 & u\,v\,w_2 \end{array}$ *cozyklisch.*

Beweis: Beachte im Folgenden, dass der Strahl t nach Q2′ zum Zyklus $\mathcal{L}^2(u_1\, w_1)$ cosimplizial liegt (Satz 89), sodass also nach Q1′ insbesondere

$$t\, u_i\, v_1 \quad t\, v_1\, w_k \quad t\, u_i\, w_k \quad \text{cosimplizial liegen für } i, k \in \{1, 2\}. \tag{II.12}$$

Ferner ist

$$v \notin \mathcal{L}^2(u_1\, w_1), \tag{II.13}$$

da sonst $\mathcal{L}^2(u_1\, w_1) = \mathcal{L}^2(v\, v_1)$ (beachte $v \neq v_1$), im Widerspruch zu $t \in \mathcal{L}^2(v\, v_1)$ und (II.12).

1. Wir zeigen zunächst, dass $t\, u\, v\, w$ ein Quadriplex bilden. Es ist $t \neq u$, da sonst neben $t\, v\, v_1$ auch $t\, v\, w_2$ und mithin $t\, v_1\, w_2$ cozyklisch lägen (beachte $t \neq v$), im Widerspruch zu (II.12). Symmetrisch analog folgt $t \neq w$, d.h. t ist von u, v, w verschieden. Damit liegen $t\, u\, w$ sowie $t\, u\, v$ und $t\, v\, w$ cosimplizial, denn lägen etwa $t\, u\, w$ cozyklisch, so mit $t\, u\, u_1$ und $t\, w\, w_1$ auch $t\, u\, w\, u_1\, w_1$, wiederum im Widerspruch zu (II.12). Insbesondere sind $u\, v\, w$ distinkt. Lägen $u\, v\, w$ cozyklisch, so mit $u\, v\, w_2$ und $v\, w\, u_2$ auch $u\, v\, w\, u_2\, w_2$, im Widerspruch zu (II.13) und $\mathcal{L}^2(u_1\, w_1) = \mathcal{L}^2(u_2\, w_2)$. Damit bilden $t\, u\, v\, w$ ein Quadriplex.

2. Es bleibt zu zeigen, dass v_2 von u_1, w_1, u_2, w_2 verschieden ist. Es ist $u \notin \mathcal{L}^2(u_1\, w_1)$, denn im Fall $u \neq u_1$ wäre sonst $t \in \mathcal{L}^2(u\, u_1) = \mathcal{L}^2(u_1\, w_1)$, im Widerspruch zu (II.12) und im Fall $u = u_1$ wäre $v \in \mathcal{L}^2(u\, w_2) = \mathcal{L}^2(u_1\, w_2) = \mathcal{L}^2(u_1\, w_1)$, im Widerspruch zu (II.13). Insbesondere ist $u \neq v_2$ und somit $v_2 \neq u_1$, denn wäre $v_2 = u_1$, so lägen neben $u\, w\, v_2$ auch $t\, u\, v_2$ und mithin $t\, u\, w$ cozyklisch, was in 1. bereits ausgeschlossen wurde. Symmetrisch analog folgt $w \neq v_2$ und damit $v_2 \neq w_1$. Wäre $v_2 = u_2$, so lägen neben $u\, w\, v_2$ auch $v\, w\, v_2$ und mithin $u\, v\, w$ cozyklisch, was wir ebenfalls bereits ausgeschlossen haben. Also ist auch $v_2 \neq u_2$ und symmetrisch analog folgt $v_2 \neq w_2$. ■

106 Lemma

Seien $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, w_2$ cozyklisch, sodass $u_i\, v_1\, w_k$ distinkt sind für $i, k \in \{1, 2\}$. Sei t sodass $t\, u_1\, w_1$ cosimplizial liegen und sei v sodass $t\, v\, v_1$ cozyklisch liegen und $t \neq v \neq v_1$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Strahlen u, w und v_2 sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2$ mit $t\, u\, v\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden.

Beweis: Es liegen $t\, u_1\, w_1\, v\, u_2\, w_2$ coplektisch, denn nach Satz 66 liegen sie im Plexus $\mathcal{L}(t\, u_1\, v_1)$ (beachte, dass nach Satz 89 mit $t\, u_1\, w_1$ auch $t\, u_1\, v_1$ cosimplizial liegen). Jeweils mit Satz 70 folgt die Existenz von Strahlen u und w sodass

$$t\, u_1\, u \;\text{ und }\; v\, w_2\, u \quad \text{bzw.} \quad t\, w_1\, w \;\text{ und }\; v\, u_2\, w \quad \text{cozyklisch liegen.} \tag{II.14}$$

Als Strahlen des Plexus $\mathcal{L}(t\, u_1\, w_1)$ liegen $u_2\, w_2\, u\, w$ coplektisch. Wiederum mit Satz 70 folgt die Existenz eines Strahls v_2, sodass

$$u_2\, w_2\, v_2 \quad \text{und} \quad u\, w\, v_2 \quad \text{cozyklisch liegen.} \tag{II.15}$$

Nach Lemma 105 bilden $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2$ mit $t\, u\, v\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration.

Zur Eindeutigkeit von u, w und v_2: Nach Satz 104 liegen weder $t\, u_1\, v\, w_2$ noch $t\, w_1\, v\, u_2$ noch $u_2\, w_2\, u\, w$ cozyklisch. Nach Satz 70 sind daher die Strahlen u und w in (II.14) und der Strahl v_2 in (II.15) eindeutig bestimmt. Damit sind u, w und v_2 die einzigen Strahlen, welche Bedingung Q3 erfüllen. ■

107 Lemma

Seien $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ cozyklisch und sodass $u_i\,v_1\,w_k$ distinkt sind für $i,k \in \{1,2\}$. Seien ferner $u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2'\,v_2'\,w_2'$ ein Tetraeder bildende Strahlen sodass (siehe Abbildung II.15):

$$u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2{}'v_2'\,w_2' \;\;\overline{\wedge}\;\; u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2.$$

Dann gibt es Strahlen t,u,v,w sodass $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden und $\mathcal{L}(u\,v\,w) \sim \mathcal{L}(u_1'\,v_1'\,w_1')$.

Beweis: Sei P mit Satz 78 ein u_1, w_1 enthaltender Plexus sodass $P \sim \mathcal{L}(u_1'\,v_1'\,w_1')$ und mithin auch $P \sim \mathcal{L}(u_1'\,v_2'\,w_2') \sim \mathcal{L}(u_2'\,v_1'\,w_2') \sim \mathcal{L}(u_2'\,v_2'\,w_1')$ gemäß Satz 87. Es gibt also Strahlen

$$\begin{aligned} t &\in P \cap \mathcal{L}(u_1'\,v_1'\,w_1') \\ u &\in P \cap \mathcal{L}(u_1'\,v_2'\,w_2') \\ v &\in P \cap \mathcal{L}(u_2'\,v_1'\,w_2') \\ w &\in P \cap \mathcal{L}(u_2'\,v_2'\,w_1') \end{aligned}$$

Keiner der Strahlen $u_1', v_1', w_1', u_2', v_2', w_2'$ liegt in P, denn sonst träfe er die Strahlen u_1 und w_1, was wegen $u_1 \neq w_1$ und $u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2{}'v_2'\,w_2' \;\overline{\wedge}\; u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ nicht möglich ist. Es liegen also

$$\left.\begin{array}{l} t\,u\,u_1 \\ t\,v\,v_1 \\ t\,w\,w_1 \\ v\,w\,u_2 \\ u\,w\,v_2 \\ u\,v\,w_2 \end{array}\right. \quad \text{cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus} \quad \begin{array}{l} P \cap \mathcal{L}(u_1') \\ P \cap \mathcal{L}(v_1') \\ P \cap \mathcal{L}(w_1') \\ P \cap \mathcal{L}(u_2') \\ P \cap \mathcal{L}(v_2') \\ P \cap \mathcal{L}(w_2') \end{array}$$

(nach Satz 66 liegen mit u_1 und w_1 auch u_2, v_2, w_2 und v_1 in P). Es liegen $t\,u_1\,w_1$ cosimplizial, denn lägen sie cozyklisch, so träfe im Fall $t \neq u_1$ der Strahl u_1' mit t und u_1 auch w_1 und im Fall $t \neq w_1$ träfe w_1' mit t und w_1 auch u_1, was beides wegen $u_1 \neq w_1$ und $u_1'\,w_1' \;\overline{\wedge}\; u_1\,w_1$ nicht möglich ist. Es ist $t \neq v$, denn andernfalls träfe t den Strahl v_1' und läge in $\mathcal{L}(u_1'\,w_1'\,u_2'\,w_2')$, womit $t = v_1'$ gemäß Lemma 86, im Widerspruch zu $v_1' \notin P$. Es ist auch $v \neq v_1$, da sich $u_2'\,v$ im Gegensatz zu $u_2'\,v_1$ treffen (beachte $u_2'\,v_1' \;\overline{\wedge}\; u_2\,v_1$ und $u_2 \neq v_1$). Damit erfüllen $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ die Bedingungen von Lemma 105, bilden also eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration. Schließlich gilt $\mathcal{L}(u\,v\,w) = P \sim \mathcal{L}(u_1'\,v_1'\,w_1')$ nach Korollar 65. ■

Strahlen $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ liegen **quadrilateral**, kurz:

$$\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_2\,v_2\,w_2},$$

falls sie cozyklisch liegen, $u_i\,v_j\,w_k$ distinkt sind für $i,j,k \in \{1,2\}$ und es ein Tetraeder $u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2'\,v_2'\,w_2'$ gibt sodass:

$$u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2'\,v_2'\,w_2' \;\;\overline{\wedge}\;\; u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2.$$

108 Satz

Die Relation $\mathcal{Q}$ ist G_T-symmetrisch.

Beweis: Dies folgt aus den entsprechenden Symmetrien des Tetraeders, siehe Satz 83. ■

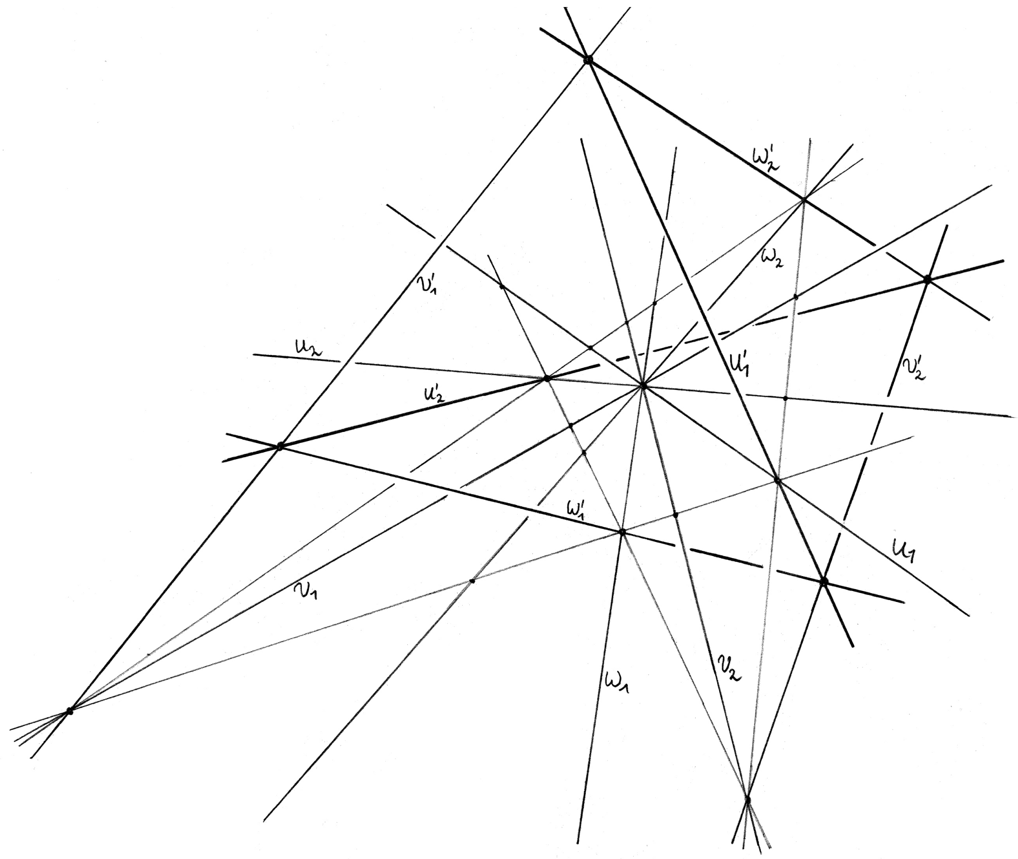


Abbildung II.15.

109 Satz

Genau dann gilt $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_2\,v_2\,w_2}$, *wenn es Strahlen* t, u, v, w *gibt sodass* $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ *mit* $t\,u\,v\,w$ *eine* $\mathcal{Q}$*-Konfiguration bilden.*

Beweis: Die Implikation „⇒“ folgt unmittelbar aus Lemma 107. Zu „⇐“: Nach Voraussetzung bilden $t\,u\,v\,w$ ein Quadriplex und

$$\begin{matrix} t\,u\,u_1 & t\,v\,v_1 & t\,w\,w_1 \\ v\,w\,u_2 & u\,w\,v_2 & u\,v\,w_2 \end{matrix} \quad \text{liegen cozyklisch.} \tag{II.16}$$

Nach Satz 104 und Korollar 65 gilt ferner

$$\mathcal{L}(u\,v\,w) = \mathcal{L}(t\,u_1\,v_1) = \mathcal{L}(t\,v_1\,w_1) = \mathcal{L}(v\,u_2\,w_2) = \mathcal{L}(u\,v_2\,w_2). \tag{II.17}$$

Wähle mit Lemma 90 cosimpliziale Strahlen u'_1, v'_1, w'_1 mit $\{u'_1, v'_1, w'_1\} \cap \mathcal{L}(u\,v\,w) = \emptyset$ und sodass

$$t\,u\,u'_1 \qquad t\,v\,v'_1 \qquad t\,w\,w'_1 \qquad \text{cosimplizial liegen.}$$

Mit Theorem 88 angewendet auf $u'_1\,v'_1\,w'_1$ und $u\,v\,w$ folgt die Existenz von Strahlen u'_2, v'_2, w'_2 sodass

$$u'_1\,v'_1\,w'_1\,u'_2\,v'_2\,w'_2 \qquad \text{und} \qquad u\,v\,w\,u'_2\,v'_2\,w'_2 \qquad \text{Tetraeder bilden.}$$

Letzteres bedeutet nach Satz 87, dass auch $\{u'_2, v'_2, w'_2\} \cap \mathcal{L}(u\,v\,w) = \emptyset$. Jeweils mit Satz 50 ergibt sich aus (II.16), dass die Strahlenpaare

$$u'_1\,u_1 \quad v'_1\,v_1 \quad w'_1\,w_1 \quad u'_2\,u_2 \quad v'_2\,v_2 \quad w'_2\,w_2 \quad \text{sich treffen.}$$

Mit (II.17) folgt, dass jeder der Strahlen $u_1', v_1', w_1', u_2', v_2', w_2'$ zu einem der Strahlen $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ windschief liegt (denn sonst läge er in $\mathcal{L}(u\,v\,w)$). Mit Lemma 98 folgt

$$u_1'\,v_1'\,w_1'\,u_2'\,v_2'\,w_2' \;\;\overline{\wedge}\;\; u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2,$$

womit $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_2\,v_2\,w_2}$ gezeigt ist. ■

110 Lemma

Bilden $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$, sowie $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2'\,w_2$ mit $t'\,u'\,v'\,w'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration und treffen sich $t\,t'$, so folgt $v_2 = v_2'$.

Beweis: Nach Satz 104 liegen alle gegebenen Strahlen im Plexus $\mathcal{L}(u\,v\,w) = \mathcal{L}(t\,u_1\,w_1) = \mathcal{L}(t'\,u_1\,w_1) = \mathcal{L}(u'\,v'\,w')$ und damit coplektisch.

1. Wir betrachten zunächst den Fall $t = t'$ (siehe Abbildung II.16): Dann liegen neben $t\,v\,v_1$ auch $t\,v'\,v_1$ und mithin $t\,v\,v'$ cozyklisch. Analog folgt, dass auch $t\,u\,u'$ und $t\,w\,w'$ cozyklisch liegen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage von Lemma 106 können wir o.E. annehmen, dass $v \neq v'$ (die Voraussetzung $t \neq v \neq v_1$ des Lemmas ist nach Satz 104 erfüllt). Dann liegen $w\,w'\,u_2$ cosimplizial, denn lägen sie cozyklisch, so auch $v\,v'\,w\,w'\,u_2$ und mithin $t\,v\,v'\,w\,w'\,u_2$ (dreimaliges Anwenden von Satz 54; beachte $w, w' \neq u_2$ gemäß Satz 104), was unmöglich ist, da $t\,v\,w$ cosimplizial liegen. Symmetrisch analog folgt, dass auch $u\,u'\,w_2$ cosimplizial liegen. Damit erfüllen v', v, t in Bezug auf $u\,u'\,w_2$ und $w\,w'\,u_2$ die Bedingung 2. von Theorem 91:

$$v'\,v\,t \quad \text{sowie} \quad \begin{matrix} v'\,u'\,w_2 & v\,u\,w_2 & t\,u\,u' \\ v'\,w'\,u_2 & v\,w\,u_2 & t\,w\,w' \end{matrix} \quad \text{liegen cozyklisch.}$$

   Es gibt also einen Strahl s, sodass

$$s\,u\,w \qquad s\,u'\,w' \qquad s\,w_2\,u_2 \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

   Da $u\,w\,w_2\,u_2$ bzw. $u'\,w'\,w_2\,u_2$ nicht cozyklisch liegen (Satz 104), folgt $v_2 = s$ und $v_2' = s$ mit Satz 70, mithin $v_2 = v_2'$.

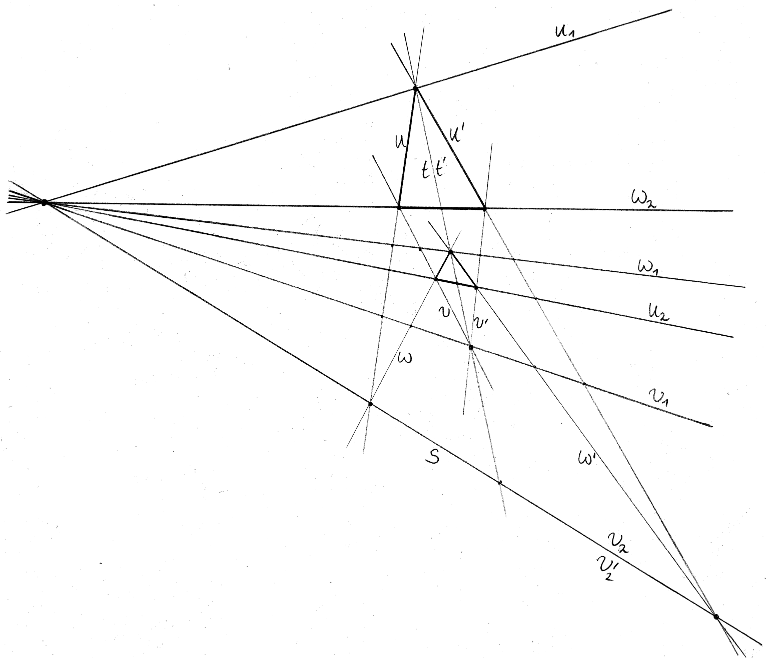


Abbildung II.16. Der Fall $t = t'$.

2. Wir betrachten nun den Fall $v = v'$: Es bilden $u_2\, v_1\, w_2\, u_1\, v_2\, w_1$ mit $v\, w\, t\, u$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration: Bedingungen Q1 und Q2 sind offensichtlich erfüllt (nach Satz 104 liegt v zu $\{u_2, v_1, w_2\}$ co-simplizial) und auch Bedingung Q3 bleibt unter dieser Permutation erhalten:

$$\begin{array}{ccc} v\,w\,u_2 & v\,t\,v_1 & v\,u\,w_2 \\ t\,u\,u_1 & w\,u\,v_2 & w\,t\,w_1 \end{array} \quad \text{liegen cozyklisch.}$$

Analog bilden auch $u_2\, v_1\, w_2\, u_1\, v_2'\, w_1$ mit $v'\, w'\, t'\, u'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration. Damit ist der Fall $v = v'$ auf den Fall $t = t'$ in 1. zurückgeführt.

3. Fall $t \in \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$: Sei $\hat{v} \in \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$ von t, t' und v_1 verschieden (Satz 61). Es liegen $t\, \hat{v}\, v_1$ und $t'\, \hat{v}\, v_1$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $\mathcal{L}^2(t'\, v_1)$. Wähle jeweils mit Lemma 106 Strahlen u'', w'', v_2'' bzw. u''', w''', v_2''' sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2''\, w_2$ mit $t\, u''\, \hat{v}\, w''$ bzw. sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2'''\, w_2$ mit $t'\, u'''\, \hat{v}\, w'''$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Jeweils gemäß Fall 1. folgt $v_2 = v_2''$ und $v_2' = v_2'''$, mit Fall 2. folgt aber auch $v_2'' = v_2'''$. Damit ist $v_2 = v_2'$ gezeigt.

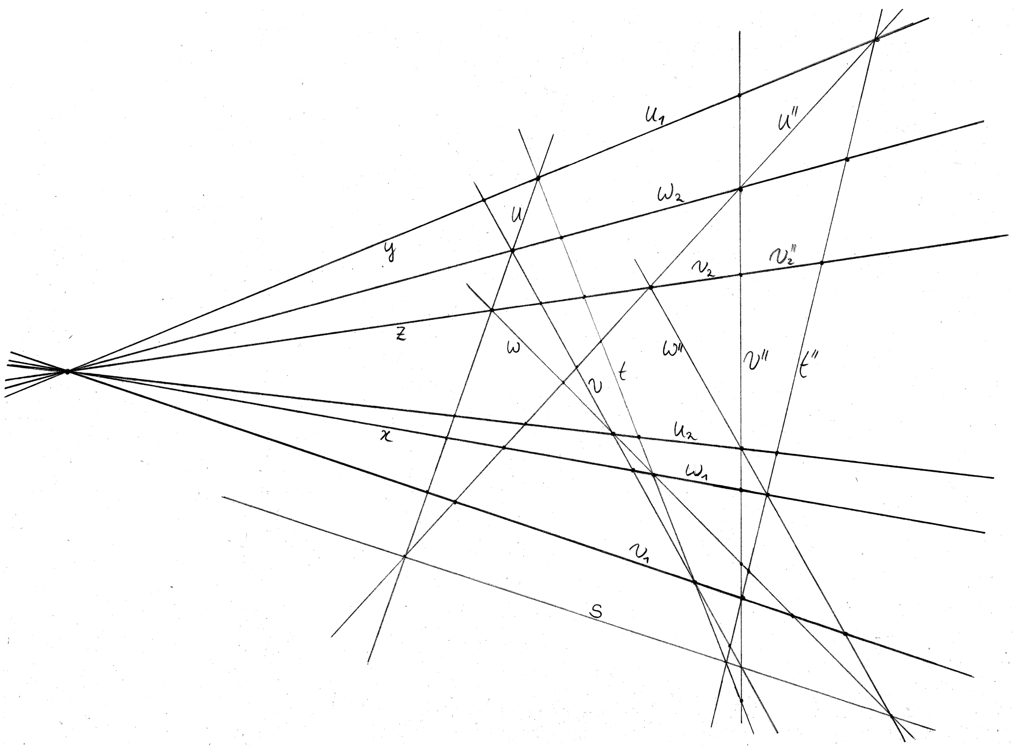


Abbildung II.17. Der Fall $t \notin \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$.

4. Es bleibt der Fall, dass $t \notin \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$: Dann ist der Zyklus $\mathcal{L}^2(t'\, v_1)$ von den Zyklen $\mathcal{L}^2(t\, u)$ und $\mathcal{L}^2(t\, w)$ verschieden, hat also jeweils höchstens einen Strahl mit ihnen gemein (Korollar 58). Es gibt somit einen Strahl $t'' \in \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$, welcher von v_1 verschieden ist und weder in $\mathcal{L}^2(t\, u)$ noch in $\mathcal{L}^2(t\, w)$ liegt (Satz 61). Sei v'' ein von t'', v und v_1 verschiedener Strahl in $\mathcal{L}^2(t''\, v_1)$ (wiederum Satz 61), sodass also $t''\, v''\, v_1$ cozyklisch liegen. Mit Lemma 106 folgt die Existenz von Strahlen u'', w'', v_2'' derart, dass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2''\, w_2$ mit $t''\, u''\, v''\, w''$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Wegen $t'' \in \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$ folgt $v_2'' = v_2'$ gemäß Fall 3. Wir zeigen, dass auch $v_2'' = v_2$.

   Beachte zunächst, dass mit t' und v_1 auch t'' im Plexus $\mathcal{L}(t'\, u_1\, w_1)$ liegt, womit $\mathcal{L}(t'\, u_1\, v_1) = \mathcal{L}(t''\, u_1\, v_1) = \mathcal{L}(u''\, v''\, w'')$, d.h. auch die neu hinzugekommenen Strahlen $t'', u'', v'', w'', v_2''$ liegen mit den bereits gegebenen coplektisch. Es liegen $t\, t''\, v''$ nicht cozyklisch, denn sonst wäre $t \in \mathcal{L}^2(t''\, v'') = \mathcal{L}^2(t''\, v_1) = \mathcal{L}^2(t'\, v_1)$. Mit Satz 70 folgt, dass es genau einen Strahl s gibt, sodass $t\, t''\, s$ und $v\, v''\, s$ cozyklisch liegen, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}^2(t\, t'') \cap \mathcal{L}^2(v\, v'') = \{s\}. \tag{II.18}$$

Nach Korollar 58 und Wahl von t'' gilt ferner

$$\mathcal{L}^2(t\,u) \cap \mathcal{L}^2(t''\,u'') = \{u_1\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^2(t\,w) \cap \mathcal{L}^2(t''\,w'') = \{w_1\}. \tag{II.19}$$

Die Strahlen $v_1, u_1\,w_2$ erfüllen in Bezug auf $u\,v\,t$ und $u''\,v''\,t''$ Bedingung 2. von Theorem 91:

$$v_1\,u_1\,w_2 \quad \text{sowie} \quad \begin{matrix} v_1\,v\,t & u_1\,u\,t & w_2\,u\,v \\ v_1\,v''\,t'' & u_1\,u''\,t'' & w_2\,u''\,v'' \end{matrix} \qquad \text{liegen cozyklisch.}$$

Es folgt die Existenz eines Strahls s_1, sodass

$$s_1\,u\,u'' \quad s_1\,v\,v'' \quad s_1\,t\,t'' \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Analog folgt, da

$$v_1\,w_1\,u_2 \quad \text{sowie} \quad \begin{matrix} v_1\,v\,t & w_1\,w\,t & u_2\,w\,v \\ v_1\,v''\,t'' & w_1\,w''\,t'' & u_2\,w''\,v'' \end{matrix} \qquad \text{cozyklisch liegen,}$$

die Existenz eines Strahls s_2, sodass

$$s_2\,w\,w'' \quad s_2\,v\,v'' \quad s_2\,t\,t'' \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Mit (II.18) folgt $s = s_1$ und $s = s_2$, sodass also insbesondere

$$s\,u\,u'' \quad s\,w\,w'' \quad s\,t\,t'' \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Damit erfüllt s Bedingung 1. von Theorem 91 in Bezug auf $u\,w\,t$ und $u''\,w''\,t''$ und wir erhalten Strahlen x, y, z sodass

$$x\,y\,z \quad \text{sowie} \quad \begin{matrix} x\,w\,t & y\,u\,t & z\,u\,w \\ x\,w''\,t'' & y\,u''\,t'' & z\,u''\,w'' \end{matrix} \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Mit (II.19) folgt $x = w_1$ und $y = u_1$, sodass also

$$w_1\,u_1\,z \quad z\,u\,w \quad z\,u''\,w'' \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

Nach Satz 104 liegen u und u'' nicht im Zyklus $\mathcal{L}(u_1\,w_1)$, sodass also

$$\mathcal{L}^2(u_1\,w_1) \cap \mathcal{L}^2(u\,w) = \{v_2\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^2(u_1\,w_1) \cap \mathcal{L}^2(u''\,w'') = \{v_2''\}$$

gemäß Korollar 58. Also gilt $v_2 = z = v_2''$. ∎

111 Satz

Seien u_1, v_1, w_1, w_2 cozyklische Strahlen sodass $u_1\,v_1\,w_k$ distinkt sind für $k \in \{1, 2\}$. Dann gibt es genau einen Strahl v_2 sodass $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_1\,v_2\,w_2}$.

Beweis: Nach Lemma 106 gibt es Strahlen t, u, v, w und v_2 sodass $u_1\,v_1\,w_1\,u_1\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden (die im Lemma vorausgesetzte Existenz von t und v ist trivial). Mit Satz 109 folgt $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_1\,v_2\,w_2}$, d.h. v_2 erfüllt die Behauptung. Sei v_2' ein beliebiger weiterer Strahl mit dieser Eigenschaft, d.h. es gibt ein Tetraeder $u_1''\,v_1''\,w_1''\,u_2''\,v_2''\,w_2''$ sodass

$$u_1''\,v_1''\,w_1''\,u_2''\,v_2''\,w_2'' \;\overline{\wedge}\; u_1\,v_1\,w_1\,u_1\,v_2'\,w_2 \tag{II.20}$$

Nach Satz 83 bilden auch $u_2''\,v_1''\,w_1''\,u_1''\,v_2''\,w_2''$ ein Tetraeder, sodass wir wegen $\mathcal{L}(u_1''\,v_1''\,w_1'') \not\sim \mathcal{L}(u_2''\,v_1''\,w_1'')$ (siehe Satz 87) o.E. annehmen können, dass $\mathcal{L}(u_1''\,v_1''\,w_1'') \sim \mathcal{L}(u\,v\,w)$ (andernfalls vertausche u_1'' mit u_2'' und beachte, dass (II.20) weiterhin erfüllt ist). Seien t', u', v', w' Strahlen gemäß Lemma 107, sodass $u_1\,v_1\,w_1\,u_1\,v_2'\,w_2$ mit $t'\,u'\,v'\,w'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden und $\mathcal{L}(u'\,v'\,w') \sim \mathcal{L}(u_1''\,v_1''\,w_1'')$. Die beiden Plexi $\mathcal{L}(u\,v\,w)$ und $\mathcal{L}(u'\,v'\,w')$ sind identisch, denn sie haben mehr als einen Strahl gemein (z.B. u_1 und w_1) und sind zu $\mathcal{L}(u_1''\,v_1''\,w_1'')$ und damit einander gleichartig. Also treffen sich $t\,t'$ und mit Lemma 110 folgt $v_2 = v_2'$. ∎

112 Theorem

Projektivitäten sind $\mathcal{Q}$-$\mathcal{Q}$-Isomorphismen.

Beweis: Seien Z, Z' Zyklen sodass $Z \barwedge Z'$. Seien $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \in Z$ mit $\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_1}_{u_2\, v_2\, w_2}$ und seien $u_1', v_1', w_1', u_2', w_2' \in Z'$ sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, w_2 \;\barwedge\; u_1'\, v_1'\, w_1'\, u_2'\, w_2'$ (siehe Abbildung II.18). Wir zeigen die Existenz eines v_2 treffenden Strahls $v_2' \in Z'$ sodass

$$\mathcal{Q}^{u_1'\, v_1'\, w_1'}_{u_2'\, v_2'\, w_2'}. \tag{II.21}$$

Dies beweist, dass Perspektivitäten zwischen Zyklen $\mathcal{Q}$-$\mathcal{Q}$-Homomorphismen sind, woraus sich die Behauptung ergibt (mit Satz 92). Beachte im Folgenden, dass mit $u_i\, v_1\, w_k$ auch $u_i'\, v_1'\, w_k'$ distinkt sind für $i, k \in \{1, 2\}$.

1. Wähle mit Satz 109 Strahlen t'', u'', v'', w'' sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2$ mit $t''\, u''\, v''\, w''$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Sei $P := \mathcal{L}(t''\, u_1\, w_1)$ und sei P' ein u_1', w_1' enthaltender Plexus mit $P' \sim P$ (Satz 78). Nach Satz 66 ist $Z' \subseteq P'$ und wegen $Z \barwedge Z'$ folgt $Z \cap P' = Z \cap \mathcal{L}(P') \subseteq Z \cap \mathcal{L}(Z') = \emptyset$ gemäß Satz 92, also $Z \cap P' = \emptyset$. Da auch $Z \subseteq P$ und $Z' \barwedge Z$ (gemäß Satz 92), folgt analog $Z' \cap P = \emptyset$. Insbesondere sind P, P' distinkt, sodass also $P \cap P' = \{s\}$ für einen Strahl $s \notin Z \cup Z'$. Es liegen

   $$s\, u_1\, u_1' \quad s\, v_1\, v_1' \quad s\, w_1\, w_1' \quad s\, u_2\, u_2' \quad s\, w_2\, w_2' \qquad \text{cosimplizial,} \tag{II.22}$$

   denn sie liegen jeweils coplektisch und lägen etwa $s\, u_1\, u_1'$ cozyklisch, so träfe v_1 mit s und u_1 auch u_1' (beachte $s \neq u_1$, da $s \notin Z$), im Widerspruch zu $u_1\, v_1 \;\barwedge\; u_1'\, v_1'$ und $u_1' \neq v_1'$.

   Sei $t_1 \in Z$ von u_1, v_1, w_1 verschieden (Satz 61) und sei $t \in \mathcal{L}^2(s\, t_1)$ von s, t_1 verschieden, sodass also $s\, t\, t_1$ distinkt sind und cozyklisch liegen (beachte $s \notin Z$). Dann ist $t \in P$ (Satz 66), aber $t \notin Z$, da $t_1 \in Z$ und $s \notin Z$. Insbesondere liegen $t\, u_1\, w_1$ cosimplizial. Keiner der Strahlen u_1', v_1', w_1' trifft t, denn sonst träfe er auch t_1 (da $s\, t\, t_1$ cozyklisch), was wegen $Z' \;\barwedge\; Z$ und $t_1 \in Z \backslash u_1, v_1, w_1$ unmöglich ist. Es liegen also

   $$t\, u_1' \quad t\, v_1' \quad t\, w_1' \qquad \text{windschief.} \tag{II.23}$$

   Sei nun $v \in \mathcal{L}^2(t\, v_1)$ von t, v_1 und s verschieden (Satz 61) und seien u, w, v_2'' gemäß Lemma 106, sodass $u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2''\, w_2$ mit $t\, u\, v\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Als Strahlen von P treffen sich $t\, t''$, sodass $v_2 = v_2''$ gemäß Lemma 110. Es bilden also

   $$u_1\, v_1\, w_1\, u_2\, v_2\, w_2 \;\text{ mit }\; t\, u\, v\, w \;\text{ eine } \mathcal{Q}\text{-Konfiguration.}$$

   Wegen $P \cap P' = \{s\}$ ist $t \notin P'$, sodass also $P' \cap \mathcal{L}(t)$ ein Zyklus ist (Satz 67). Dieser ist vom Zyklus Z' verschieden (denn im Gegensatz zu Z' enthält er den Strahl s) und hat somit nach Korollar 58 höchstens einen Strahl mit ihm gemein. Es gibt also einen von s verschiedenen Strahl $t' \in P' \cap \mathcal{L}(t)$, welcher nicht in Z' liegt. Letzteres bedeutet, dass $t'\, u_1'\, w_1'$ cosimplizial liegen (als Strahlen von P' liegen sie coplektisch) und wegen $t' \neq s$ ist $t' \notin P$. Somit liegen

   $$t'\, u_1 \quad t'\, v_1 \quad t'\, w_1 \qquad \text{windschief,} \tag{II.24}$$

   denn $P = \mathcal{L}(s\, t\, u_1) = \mathcal{L}(s\, t\, v_1) = \mathcal{L}(s\, t\, w_1)$ (es liegen $s\, t\, u_1$, $s\, t\, v_1$, $s\, t\, w_1$ cosimplizial, denn lägen etwa $s\, t\, u_1$ cozyklisch, so mit $s\, t\, t_1$ auch $s\, u_1\, t_1$, im Widerspruch zu $s \notin Z = \mathcal{L}^2(u_1\, t_1)$). Aus (II.24) folgt, dass auch

   $$t'\, u \quad t'\, v \quad t'\, w \qquad \text{windschief liegen,} \tag{II.25}$$

da $t' \, t$ sich treffen und $t \, u \, u_1$ bzw. $t \, v \, v_1$ bzw. $t \, w \, w_1$ cozyklisch liegen. Sei nun $v' \in \mathcal{L}^2(t' \, v_1')$ ein v treffender Strahl gemäß Satz 60 (beachte $t' \neq v_1'$, da $t' \notin Z'$). Dann ist $v' \in P'$ und $t' \, v' \, v_1'$ liegen cozyklisch. Es liegen:

$$s \, t \, t' \quad \text{und} \quad s \, v \, v' \qquad \text{cosimplizial,} \tag{II.26}$$

denn nach (II.24) bzw. (II.23) liegen $t', v_1 \in \mathcal{L}(s \, t)$ bzw. $t, v_1' \in \mathcal{L}(s \, v)$ jeweils windschief (siehe Satz 62.2). Es ist $t' \neq v'$, da sich $v' \, v$ im Gegensatz zu $t' \, v$ treffen (siehe (II.25)); ferner ist $v' \neq v_1'$, denn sonst träfe v_1' neben v_1 auch v und mithin t, im Widerspruch zu (II.23). Mit Lemma 106 folgt die Existenz von Strahlen u', w', v_2' sodass

$$u_1' \, v_1' \, w_1' \, u_2' \, v_2' \, w_2' \text{ mit } t' \, u' \, v' \, w' \text{ eine } \mathcal{Q}\text{-Konfiguration bilden.}$$

Der Strahl v_2' liegt offensichtlich in Z' und erfüllt (II.21) nach Satz 109. Es bleibt also zu zeigen, dass $v_2 \, v_2'$ sich treffen. Beachte dazu im Folgenden, dass wegen $Z \cap P' = \emptyset$ sowie (II.23) und (II.25):

$$\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, t, u, v, w\} \cap P' = \emptyset. \tag{II.27}$$

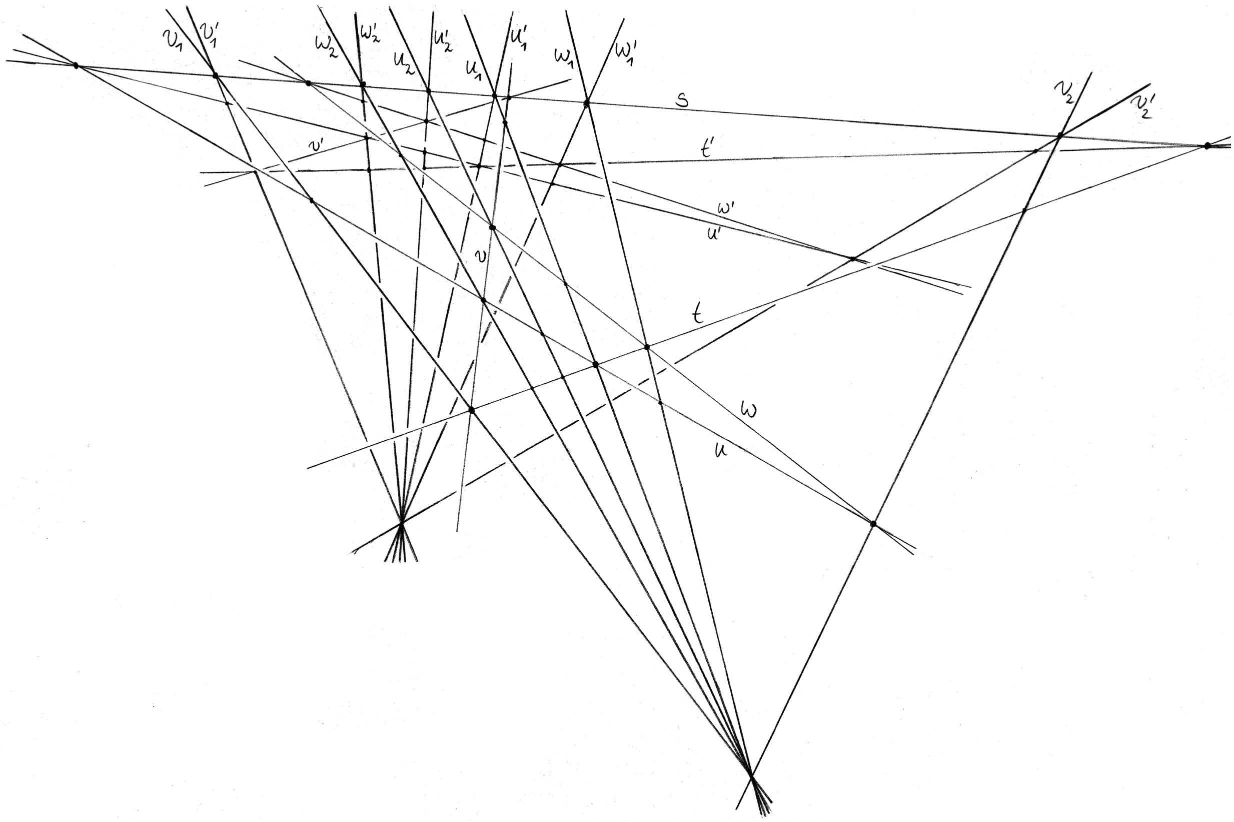


Abbildung II.18.

2. Wir zeigen nun, dass auch

$$s \, u \, u' \quad \text{und} \quad s \, w \, w' \qquad \text{cosimplizial liegen.} \tag{II.28}$$

Nach (II.27) ist $\{t, v_1, u_1\} \cap \mathcal{L}(t' \, v_1' \, u_1') = \emptyset$ sodass nach (II.26) und (II.22) der Strahl s in Bezug auf $t \, v_1 \, u_1$ und $t' \, v_1' \, u_1'$ Bedingung 1. von Theorem 88 erfüllt (beachte, dass $t \, v_1 \, u_1$ und $t' \, v_1' \, u_1'$ nach Satz 104 cosimplizial liegen). Es folgt die Existenz von Strahlen x_1, y_1, z_1 sodass

$$t \, v_1 \, u_1 \, x_1 \, y_1 \, z_1 \quad \text{und} \quad t' \, v_1' \, u_1' \, x_1 \, y_1 \, z_1 \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Analog erfüllt s auch in Bezug auf $v\,v_1\,w_2$ und $v'\,v_1'\,w_2'$ Bedingung 1. von Theorem 88 und es folgt die Existenz von Strahlen x_2, y_2, z_2 sodass

$$v\,v_1\,w_2\,x_2\,y_2\,z_2 \quad \text{und} \quad v'\,v_1'\,w_2'\,x_2\,y_2\,z_2 \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Es ist $x_2 \in \mathcal{L}(v_1\,w_2) \cap \mathcal{L}(v_1'\,w_2') = \mathcal{L}(v_1\,u_1) \cap \mathcal{L}(v_1'\,u_1') = \mathcal{L}(v_1\,u_1\,v_1'\,u_1')$ (die erste Gleichung gilt nach Satz 53, da $v_1\,u_1\,w_2$ bzw. $v_1'\,u_1'\,w_2'$ cozyklisch liegen) und da auch $s, x_1 \in \mathcal{L}(v_1\,u_1\,v_1'\,u_1')$ und $s \neq x_1, x_2$ (denn $t\,x_1$ bzw. $v\,x_2$ liegen windschief), folgt $x_1 = x_2$ gemäß Lemma 86 angewendet auf $u_1\,v_1\,v_1'\,u_1'$ (beachte $u_1\,v_1 \;\overline{\wedge}\; u_1'\,v_1'$).
Ähnlich ist $z_2 \in \mathcal{L}(v\,v_1) \cap \mathcal{L}(v'\,v_1') = \mathcal{L}(t\,v_1) \cap \mathcal{L}(t'\,v_1') = \mathcal{L}(t\,v_1\,t'\,v_1')$ und da auch $s, z_1 \in \mathcal{L}(t\,v_1\,t'\,v_1')$ und $s \neq z_1, z_2$ (denn $v_1\,z_1$ bzw. $w_2\,z_2$ liegen windschief) folgt $z_1 = z_2$ (gemäß Lemma 86 angewendet auf $t\,v_1\,v_1'\,t'$; beachte (II.23) und (II.24)).

Die Strahlen y_1, y_2 liegen somit beide in $\mathcal{L}(x_1\,z_1)$, müssen sich also treffen, denn sie liegen jeweils windschief zu $v_1 \in \mathcal{L}(x_1\,z_1)$ (siehe Satz 49). Ferner ist $y_1 \neq y_2$, denn andernfalls träfe y_1 neben u_1 auch w_2 und mithin v_1, ein Widerspruch. Es ist $y_1 \in \mathcal{L}(t\,u_1) = \mathcal{L}(t\,u\,u_1)$ und $y_2 \in \mathcal{L}(v\,w_2) = \mathcal{L}(u\,v\,w_2)$, mithin $u \in \mathcal{L}(y_1\,y_2)$; analog folgt $u' \in \mathcal{L}(y_1\,y_2)$. Mit $x_1\,t$ bzw. $x_1\,t'$ liegen auch $x_1\,u$ und $x_1\,u'$ windschief, da $x_1\,u_1$ bzw. $x_1\,u_1'$ sich treffen und $t\,u\,u_1$ bzw $t'\,u'\,u_1'$ cozyklisch liegen. Wegen $x_1 \in \mathcal{L}(y_1\,y_2)$ folgt somit (wiederum mit Satz 49), dass $u\,u'$ sich treffen. Es ist $s \neq u'$, denn sonst träfe t neben t' auch u' und damit u_1', im Widerspruch zu (II.23). Damit liegen $s\,u\,u'$ cosimplizial, denn lägen sie cozyklisch, so träfe t' mit s und u' auch u, im Widerspruch zu (II.25). Symmetrisch analog folgt, dass $s\,w\,w'$ cosimplizial liegen.

3. Nach (II.27) ist $\{t, u, w\} \cap \mathcal{L}(t'\,u'\,w') = \emptyset$, sodass nach (II.26) und (II.28) der Strahl s in Bezug auf $t\,u\,w$ und $t'\,u'\,w'$ Bedingung 1. von Theorem 88 erfüllt. Es folgt die Existenz von Strahlen x_3, y_3, z_3 sodass

$$t\,u\,w\,x_3\,y_3\,z_3 \quad \text{und} \quad t'\,u'\,w'\,x_3\,y_3\,z_3 \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Analog erfüllt s nach (II.26) und (II.22) auch in Bezug auf $t\,u_1\,w_1$ und $t'\,u_1'\,w_1'$ Bedingung 1. von Theorem 88 und es folgt die Existenz von Strahlen x_4, y_4, z_4 sodass

$$t\,u_1\,w_1\,x_4\,y_4\,z_4 \quad \text{und} \quad t'\,u_1'\,w_1'\,x_4\,y_4\,z_4 \quad \text{Tetraeder bilden.}$$

Da $t\,w\,w_1$ und $t'\,w'\,w_1'$ cozyklisch liegen, ist $y_3 \in \mathcal{L}(t\,w) \cap \mathcal{L}(t'\,w') = \mathcal{L}(t\,w_1) \cap \mathcal{L}(t'\,w_1') = \mathcal{L}(t\,w_1\,t'\,w_1')$ und da auch $s, y_4 \in \mathcal{L}(t\,w_1\,t'\,w_1')$ und $s \neq y_3, y_4$ (denn $u\,y_3$ bzw. $u_1\,y_4$ liegen windschief) folgt $y_3 = y_4$ mit Lemma 86 (beachte (II.23) und (II.24)).
Ähnlich ist $z_3 \in \mathcal{L}(t\,u) \cap \mathcal{L}(t'\,u') = \mathcal{L}(t\,u_1) \cap \mathcal{L}(t'\,u_1') = \mathcal{L}(t\,u_1\,t'\,u_1')$ und da auch $s, z_4 \in \mathcal{L}(t\,u_1\,t'\,u_1')$ und $s \neq z_3, z_4$ (denn $w\,z_3$ bzw. $w_1\,z_4$ liegen windschief) folgt $z_3 = z_4$.

Die Strahlen x_3, x_4 liegen somit beide in $\mathcal{L}(y_3\,z_3)$, müssen sich also treffen, denn sie liegen jeweils windschief zu $t \in \mathcal{L}(y_3\,z_3)$ (Satz 49). Ferner ist $x_3 \neq x_4$, denn andernfalls träfe x_3 neben u auch u_1 und mithin t, ein Widerspruch. Es ist $x_3 \in \mathcal{L}(u\,w) = \mathcal{L}(u\,w\,v_2)$ und $x_4 \in \mathcal{L}(u_1\,w_1) = \mathcal{L}(u_1\,w_1\,v_2)$, mithin $v_2 \in \mathcal{L}(x_3\,x_4)$; analog folgt $v_2' \in \mathcal{L}(x_3\,x_4)$. Mit $y_4\,u_1$ bzw. $y_4\,u_1'$ liegen auch $y_4\,v_2$ und $y_4\,v_2'$ windschief, da $y_4\,w_1$ bzw. $y_4\,w_1'$ sich treffen und $u_1\,v_2\,w_1$ bzw. $u_1'\,v_2'\,w_1'$ cozyklisch liegen. Wegen $y_4 \in \mathcal{L}(x_3\,x_4)$ folgt somit (wiederum mit Satz 49), dass $v_2\,v_2'$ sich treffen. ■

II.5. Die Trennungsbeziehung

Wir legen unseren Untersuchungen von nun an auch die übrigen Axiome von S zugrunde:

V1 *Sind u, v, w, x paarweise sich treffende distinkte Strahlen und gibt es einander nicht treffende Strahlen p, q, welche u, v, w, x treffen, so gilt $\mathcal{T}\,u\,x\,v\,w$ oder $\mathcal{T}\,u\,v\,x\,w$ oder $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$.*

V2 *Gilt $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$, so treffen sich u, v, w, x paarweise und es gibt einander nicht treffende Strahlen p, q, welche u, v, w, x treffen.*

V3 *Seien $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ Strahlen derart, dass $y_i\,z_j$ sich treffen gdw. $i = j$, ferner z_1, z_2, z_3, z_4 sich paarweise treffen und es einander nicht treffende Strahlen p, q gibt, welche z_1, z_2, z_3, z_4 treffen. Gilt dann $\mathcal{T}\,y_1\,y_2\,y_3\,y_4$, so auch $\mathcal{T}\,z_1\,z_2\,z_3\,z_4$.*

O1 *Gilt $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$, so sind u, v, w, x distinkt.*

O2 *Gilt $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$, so auch $\mathcal{T}\,v\,w\,x\,u$ und $\mathcal{T}\,x\,w\,v\,u$.*

O3 *Gilt $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$ und $\mathcal{T}\,u\,v\,x\,y$, so auch $\mathcal{T}\,u\,w\,x\,y$.*

O4 *Seien A, B Strahlengebilde und u, v Strahlen derart, dass $\mathcal{T}\,u\,a\,b\,v$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es einen Strahl s, sodass $\mathcal{T}\,u\,a\,s\,b$ für alle $a \in A\backslash s$ und $b \in B\backslash s$.*

Axiom V1 besagt, dass, zu gegebenen distinkten cozyklischen Strahlen u, v, w, x, der Strahl x von einem der drei Strahlen u, v, w durch die beiden anderen getrennt ist. Mit Rücksicht auf die Axiome O1, O2 und O3 ergibt sich, dass dieser von x getrennte Strahl eindeutig bestimmt ist:

113 Satz

Für distinkte cozyklische Strahlen u, v, w, x gilt genau einer der drei Fälle:

$$\mathcal{T}\,u\,x\,v\,w \quad \textit{oder} \quad \mathcal{T}\,u\,v\,x\,w \quad \textit{oder} \quad \mathcal{T}\,u\,v\,w\,x.$$

Beweis: Dass einer der drei Fälle gilt, ist gerade die Aussage von Axiom V1. Das gleichzeitige Eintreten der letzten beiden Fälle ergibt mit Axiom O3 einen Widerspruch zu Axiom O1:

$$\mathcal{T}\,u\,v\,x\,w \wedge \mathcal{T}\,u\,v\,w\,x \;\Rightarrow\; \mathcal{T}\,u\,x\,w\,x.$$

Ähnlich führt unter Berücksichtigung der Symmetrie „$\mathcal{T}\,a\,b\,c\,d \Rightarrow \mathcal{T}\,b\,c\,d\,a$“ von Axiom O2 (gegebenfalls mehrmaliges Anwenden) auch die Kombination des ersten Falls mit den anderen beiden jeweils zu einem Widerspruch:

$$\mathcal{T}\,u\,x\,v\,w \wedge \mathcal{T}\,u\,v\,w\,x \;\Rightarrow\; \mathcal{T}\,v\,w\,u\,x \wedge \mathcal{T}\,v\,w\,x\,u \;\Rightarrow\; \mathcal{T}\,v\,u\,x\,u.$$

$$\mathcal{T}\,u\,x\,v\,w \wedge \mathcal{T}\,u\,v\,x\,w \;\Rightarrow\; \mathcal{T}\,w\,u\,x\,v \wedge \mathcal{T}\,w\,u\,v\,x \;\Rightarrow\; \mathcal{T}\,w\,x\,v\,x.$$

■

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$\mathcal{T}_n\,z_1 \ldots z_n \quad \text{:gdw.} \quad \begin{array}{l} z_1 \ldots z_n \text{ liegen cozyklisch und sind distinkt und es gilt} \\ \mathcal{T}\,z_{i_1}\,z_{i_2}\,z_{i_3}\,z_{i_4} \text{ für alle } i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}_n \text{ mit } i_1 < i_2 < i_3 < i_4. \end{array}$$

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{T}_n\,z_1 \ldots z_n \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_m\,z_{i_1} \ldots z_{i_m} \quad \text{für alle } m, i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_n \text{ mit } i_1 < \cdots < i_m \qquad \text{(II.29)}$$

und gemäß den Axiomen V2 und O1 ist $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}$.

Axiom O3 lässt sich verallgemeinern:

114 Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_n$ gilt

$$\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n \;\wedge\; \mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, z \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, z.$$

Beweis: Die Voraussetzung $\mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, z$ ist nach Axiom O1 für $k = 1$ oder $k = n$ nie erfüllt, sodass wir im Folgenden $1 < k < n$ annehmen können, insbesondere $n > 2$. Der Fall $n = 3$ ist wegen $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}$ eine Tautologie. Wir betrachten nun zunächst den Fall $n = 4$. Für $k = 2$ ist dann wegen $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}$ zu zeigen:

$$\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z_4 \wedge \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_4\, z \Rightarrow \mathcal{T} z_1\, z_3\, z_4\, z \wedge \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z \wedge \mathcal{T} z_2\, z_3\, z_4\, z. \tag{II.30}$$

Betrachte dazu:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_4\, z & \wedge & \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z_4 & \Rightarrow & \mathcal{T} z_1\, z_3\, z_4\, z & & & & \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{T} z_3\, z_4\, z_1\, z_2 & \wedge & \mathcal{T} z_3\, z_4\, z\, z_1 & \Rightarrow & \mathcal{T} z_3\, z\, z_1\, z_2 & & \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{T} z\, z_1\, z_3\, z_4 & \wedge & \mathcal{T} z\, z_1\, z_2\, z_3 & \Rightarrow & \mathcal{T} z\, z_2\, z_3\, z_4 \\
 & & & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & & & \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z & & \mathcal{T} z_2\, z_3\, z_4\, z.
\end{array}$$

Die Implikationen „$\Rightarrow$“ sind jeweils logisch äquivalent zu Instanzen von Axiom O3 (vertausche jeweils die Konjunktionsglieder im Vordersatz), die Implikationen „$\Downarrow$“ ergeben sich jeweils durch ein- oder zweimaliges Anwenden der Symmetrie „$\mathcal{T} u\, v\, w\, x \Rightarrow \mathcal{T} v\, w\, x\, u$“ gemäß Axiom O2. Die drei gewünschten Beziehungen stehen in der ersten und letzten Zeile.

Der Fall $k = 3$ lässt sich auf den Fall $k = 2$ zurückführen, wiederum durch wiederholtes Anwenden der genannten Symmetrie:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{T} z_1\, z_3\, z_4\, z & \wedge & \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z_4 & & & & & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & & & & & \\
\mathcal{T} z_3\, z_4\, z\, z_1 & \wedge & \mathcal{T} z_3\, z_4\, z_1\, z_2 & \xRightarrow{\text{(II.30)}} & \mathcal{T} z_3\, z\, z_1\, z_2 & \wedge & \mathcal{T} z_3\, z_4\, z\, z_2 & \wedge & \mathcal{T} z_4\, z\, z_1\, z_2 \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z & & \mathcal{T} z_2\, z_3\, z_4\, z & & \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_4\, z.
\end{array}$$

Wir zeigen nun induktiv, dass die Behauptung auch für alle $n > 4$ gilt. Seien also $n > 4$ und k mit $1 < k < n$ beliebig und gelte $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$ sowie $\mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, z$. Dann folgt

$$\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_n\, z, \tag{II.31}$$

denn im Fall $k = 2$ ist dies Voraussetzung und im Fall $k \neq 2$ gilt $\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_k\, z_n$, was zusammen mit $\mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, z$ gemäß dem bereits gezeigten Fall $n = 4$ $\mathcal{T}_5\, z_1\, z_2\, z_k\, z_n\, z$ impliziert, also insbesondere (II.31).

Aus $\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_{n-1}\, z_n$ und (II.31) ergibt sich, ebenfalls gemäß dem bereits gezeigten Fall $n = 4$:

$$\mathcal{T}_5\, z_1\, z_2\, z_{n-1}\, z_n\, z,$$

insbesondere:

$$\mathcal{T} z_2\, z_{n-1}\, z_n\, z \quad \text{und} \quad \mathcal{T} z_1\, z_{n-1}\, z_n\, z \quad \text{und} \quad \mathcal{T} z_1\, z_2\, z_{n-1}\, z.$$

Andererseits folgt aus $\mathcal{T}_n\, z_1 \dots z_n$ gemäß (II.29)

$$\mathcal{T}_{n-1} z_2 \dots z_n \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_{n-1} z_1\, z_3 \dots z_n \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_{n-1} z_1 \dots z_{n-1}$$

und induktiv ergibt sich jeweils

$$\mathcal{T}_n\, z_2 \dots z_n\, z \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_n\, z_1\, z_3 \dots z_n\, z \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_n\, z_1 \dots z_{n-1}\, z. \tag{II.32}$$

Seien nun $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}_{n+1}$ mit $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ beliebig gegeben und sei $z_{n+1} := z$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{T} z_{i_1}\, z_{i_2}\, z_{i_3}\, z_{i_4}.$$

Im Fall $i_4 \le n$ folgt dies aus der Voraussetzung $\mathcal{T}_n\, z_1 \dots z_n$, sodass wir o.E. $i_4 = n + 1$ annehmen kännen, d.h. $z_{i_4} = z$. Ist $2 \le i_1$ oder $i_3 \le n - 1$, so folgt $\mathcal{T} z_{i_1}\, z_{i_2}\, z_{i_3}\, z$ aus der Beziehung links bzw. rechts in (II.32). Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\mathcal{T} z_1\, z_{i_2}\, z_n\, z.$$

Dies folgt aber im Fall $i_2 \ne 2$ aus der mittleren Beziehung in (II.32) und ist im Fall $i_2 = 2$ nichts anderes als (II.31). ■

Auch Axiom O2 lässt sich verallgemeinern:

115 Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{T}_n\, z_1 \dots z_n \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_n\, z_2 \dots z_n\, z_1 \wedge \mathcal{T}_n\, z_n \dots z_1,$$

d.h. die Relation $\mathcal{T}_n$ ist D_n-symmetrisch.[6]

Beweis: Die Fälle $n = 1, 2, 3$ sind trivial. Sei im Induktionsschritt $n > 3$ und gelte $\mathcal{T}_n\, z_1 \dots z_n$. Dann gilt insbesondere $\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_3\, z_n$ und $\mathcal{T} z_1\, z_2\, z_{n-1} z_n$. Jeweils mit Axiom O2 ergibt sich

$$\mathcal{T} z_2\, z_3\, z_n\, z_1 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} z_n\, z_{n-1}\, z_2\, z_1.$$

Andererseits gilt nach (II.29)

$$\mathcal{T}_{n-1}\, z_2 \dots z_n \quad \text{und mithin} \quad \mathcal{T}_{n-1}\, z_n \dots z_2$$

per Induktionsvoraussetzung. Jeweils mit Satz 114 ergibt sich

$$\mathcal{T}_n\, z_2 \dots z_n\, z_1 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}_n\, z_n \dots z_1.$$

■

[6] D_n bezeichne die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

116 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_n$ und $i \in \mathbb{N}_{n-1}$:

1. $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n \;\wedge\; \mathcal{T} z_k\, z_i\, z\, z_{i+1} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_i\, z\, z_{i+1} \ldots z_n.$
2. $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n \;\wedge\; \mathcal{T} z_i\, z\, z_{i+1}\, z_k \quad\Rightarrow\quad \mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_i\, z\, z_{i+1} \ldots z_n.$

Beweis: Aus den Voraussetzungen

$$\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} z_k\, z_i\, z\, z_{i+1} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T} z_i\, z\, z_{i+1}\, z_k$$

folgt jeweils mit Satz 115

$$\mathcal{T}_n\, z_{i+1} \ldots z_n\, z_1 \ldots z_i \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} z_{i+1}\, z_k\, z_i\, z.$$

Mit Satz 114 folgt

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_{i+1} \ldots z_n\, z_1 \ldots z_i\, z$$

und wiederum mit Satz 115 ergibt sich hieraus die Behauptung. ■

117 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_n$:

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, x \;\wedge\; \mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, y \;\wedge\; x \neq y \quad\Rightarrow\quad \mathcal{T}_{n+2}\, z_1 \ldots z_n\, x\, y \;\vee\; \mathcal{T}_{n+2}\, z_1 \ldots z_n\, y\, x$$

Beweis: Es gelte die Voraussetzung, also insbesondere

$$\mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, y \tag{II.33}$$

und (da nach Axiom O1 somit $1 < k < n$)

$$\mathcal{T} z_1\, z_k\, z_n\, x. \tag{II.34}$$

Dann sind $z_1\, z_k\, x\, y$ distinkt und liegen cozyklisch (weil im Zyklus $\mathcal{L}^2(z_1\, z_k)$), sodass nach Satz 113 einer der folgenden Fälle gelten muss:

$$\mathcal{T} z_1\, y\, z_k\, x \quad \text{oder} \quad \mathcal{T} z_1\, z_k\, y\, x \quad \text{oder} \quad \mathcal{T} z_1\, z_k\, x\, y.$$

Der erste Fall ist aber ausgeschlossen, denn zusammen mit (II.34) impliziert er $\mathcal{T}_5\, z_1\, y\, z_k\, z_n\, x$ gemäß Satz 116, also insbesondere $\mathcal{T}\, z_1\, y\, z_k\, z_n$, was nach Satz 113 im Widerspruch zu (II.33) steht. Es gilt also der zweite oder der dritte Fall und mit Axiom O3 folgt wegen (II.33) bzw. (II.34)

$$\mathcal{T} z_1\, z_n\, y\, x \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T} z_1\, z_n\, x\, y.$$

Wegen $\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, x$ ergibt sich mit Satz 116 bzw. Satz 114

$$\mathcal{T}_{n+2}\, z_1 \ldots z_n\, y\, x \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_{n+2}\, z_1 \ldots z_n\, x\, y.$$

■

Wir können nun Satz 113 verallgemeinern:

118 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Sind $z_1, \ldots, z_n, z$ distinkte cozyklische Strahlen und gilt $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$, so gibt es genau ein $i \in \mathbb{N}_n$ sodass[7]

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_i\, z\, z_{i+1} \ldots z_n. \tag{II.35}$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage per Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 3$ ist gerade die Aussage von Satz 113. Sei also $n > 3$ gegeben und seien $z_1, \ldots, z_n, z$ distinkte cozyklische Strahlen mit $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$. Dann gilt nach (II.29) auch $\mathcal{T}_{n-1}\, z_1 \ldots z_{n-1}$ und per Induktionsvoraussetzung folgt, dass es genau ein $j \in \mathbb{N}_{n-1}$ gibt, sodass

$$\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_j\, z\, z_{j+1} \ldots z_{n-1}. \tag{II.36}$$

In den Fällen $j = n-2$ bzw. $j < n-2$ ergibt sich insbesondere $\mathcal{T}\, z_1\, z_j\, z\, z_{j+1}$ bzw. $\mathcal{T}\, z_j\, z\, z_{j+1}\, z_{n-1}$. Wegen $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$ folgt in beiden Fällen mit Satz 116

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_j\, z\, z_{j+1} \ldots z_n.$$

Im Fall $j \leq n-2$ erfüllt also $i = j$ den Existenzteil der Behauptung (II.35). Wir betrachten nun den Fall $j = n-1$. Dann folgt aus (II.36) insbesondere $\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, z_{n-1}\, z$. Zusammen mit $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$ impliziert dies

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, z \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_{n-1}\, z\, z_n$$

gemäß Satz 117. Damit erfüllt $i = n$ oder $i = n-1$ den Existenzteil der Behauptung (II.35).

Es bleibt die Eindeutigkeit von i in (II.35) zu zeigen. Angenommen es gibt $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_n$ mit $i_1 < i_2$, welche beide (II.35) erfüllen. Wegen der Eindeutigkeit von j in (II.36) muss dann $i_2 = n$ gelten, d.h. wir haben

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_{i_1}\, z\, z_{i_1+1} \ldots z_n \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, z.$$

Aus der Beziehung links ergibt sich insbesondere

$$\mathcal{T}\, z_1\, z\, z_2\, z_n \;\text{ falls } i_1 = 1, \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T}\, z_1\, z_2\, z\, z_n \;\text{ falls } i_1 \geq 2,$$

was gemäß Satz 113 beides im Widerspruch steht zur aus der Beziehung rechts sich ergebenden Beziehung:

$$\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, z_n\, z.$$

■

119 Korollar

Es gelte $\mathcal{T}\, u\, x\, v\, z$ und sei $y \in \mathcal{L}^2(u\, v)\backslash u, v$. Dann gilt entweder $\mathcal{T}\, u\, y\, v\, z$ oder $\mathcal{T}\, u\, x\, v\, y$.

Beweis: Wir können offensichtlich o.E. $y \notin \{x, z\}$ annehmen (beachte Axiom O1). Dann sind $u\, x\, v\, z\, y$ distinkt und liegen cozyklisch. Gemäß Satz 118 muss daher einer der folgenden Fälle gelten:

$$\mathcal{T}_5\, u\, y\, x\, v\, z \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_5\, u\, x\, y\, v\, z \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_5\, u\, x\, v\, y\, z \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_5\, u\, x\, v\, z\, y.$$

In den beiden Fällen links gilt $\mathcal{T}\, u\, y\, v\, z$, aber nicht $\mathcal{T}\, u\, x\, v\, y$, in den beiden Fällen rechts $\mathcal{T}\, u\, x\, v\, y$, aber nicht $\mathcal{T}\, u\, y\, v\, z$ (siehe Satz 113). ■

[7] im Fall $i = n$ ist dies natürlich als $\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, z$ zu lesen.

Axiom V3 besagt: Gilt $u\,v\,w\,x \barwedge u'\,v'\,w'\,x'$ und liegen $u'\,v'\,w'\,x'$ cozyklisch, so gilt:

$$\mathcal{T}u\,v\,w\,x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}u'\,v'\,w'\,x'$$

(vgl. Abbildung II.11 auf Seite 50). Damit sind Perspektivitäten zwischen Zyklen $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-Homomorphismen. Mit Rücksicht auf Satz 92 folgt:

120 Korollar

Projektivitäten sind $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-Isomorphismen.

Der folgende Satz macht hiervon entscheidenden Gebrauch:[8]

121 Satz (Pasch)

Seien u, v, w cosimpliziale und u_i, v_i, w_i cozyklische Strahlen für $i = 1, 2$, sodass

$$u\,v\,w_1\,w_2 \quad \textit{und} \quad v\,w\,u_1\,u_2 \quad \textit{jeweils distinkt sind und cozyklisch liegen.}$$

Gilt dann $\mathcal{T}v_1\,u\,v_2\,w$, so auch $\mathcal{T}u_1\,v\,u_2\,w$ oder $\mathcal{T}w_1\,u\,w_2\,v$.

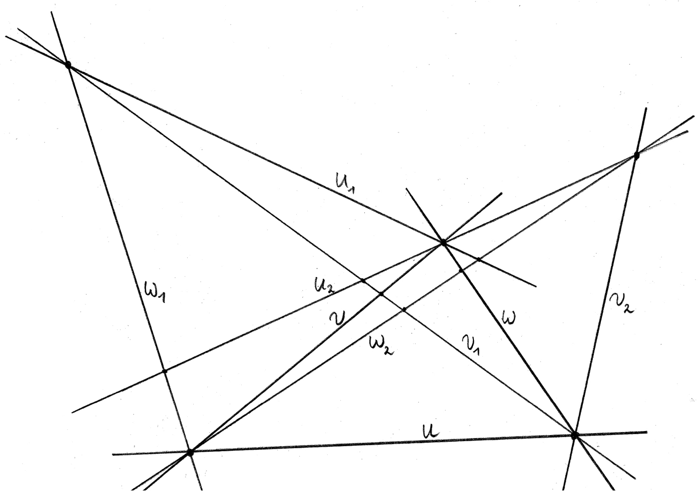


Abbildung II.19.

Beweis: Es seien die Voraussetzungen erfüllt, samt der Annahme $\mathcal{T}v_1\,u\,v_2\,w$, sodass also insbesondere $u\,w\,v_1\,v_2$ distinkt sind und cozyklisch liegen. Nach Satz 66 liegen alle gegebenen Strahlen im Plexus $\mathcal{L}(u\,v\,w)$ und damit coplektisch. Da $u\,v\,w$ cosimplizial liegen, sind die drei Zyklen $\mathcal{L}^2(u\,v), \mathcal{L}^2(v\,w)$ und $\mathcal{L}^2(u\,w)$ paarweise verschieden, haben also nach Korollar 58 paarweise jeweils genau einen Strahl gemein:

$$\mathcal{L}^2(u\,v) \cap \mathcal{L}^2(u\,w) = \{u\}, \quad \mathcal{L}^2(u\,v) \cap \mathcal{L}^2(v\,w) = \{v\}, \quad \mathcal{L}^2(u\,w) \cap \mathcal{L}^2(v\,w) = \{w\}.$$

Für $i = 1, 2$ sind somit $u_i\,w_i$ distinkt (da von v verschieden) und der Zyklus $Z_i := \mathcal{L}^2(u_i\,w_i)$ muss von den Zyklen $\mathcal{L}^2(u\,v)$ und $\mathcal{L}^2(v\,w)$ verschieden sein, denn er hat mit dem Zyklus $\mathcal{L}^2(u\,w)$ den von u, w verschiedenen Strahl v_i gemein. Gemäß Korollar 58 folgt

$$Z_i \cap \mathcal{L}^2(u\,v) = \{w_i\} \quad \text{und} \quad Z_i \cap \mathcal{L}^2(v\,w) = \{u_i\}.$$

Ähnlich folgt

$$Z_i \cap \mathcal{L}^2(u\,w) = \{v_i\}$$

aus der Tatsache, dass Z_i etwa mit $\mathcal{L}^2(u\,v)$ den von u verschiedenen Strahl w_i gemein hat.

[8] Die in der Ebene duale Aussage zu diesem Satz ist die projektive Variante von Axiom AV3, welches gemeinhin auch als Axiom von Pasch bekannt ist.

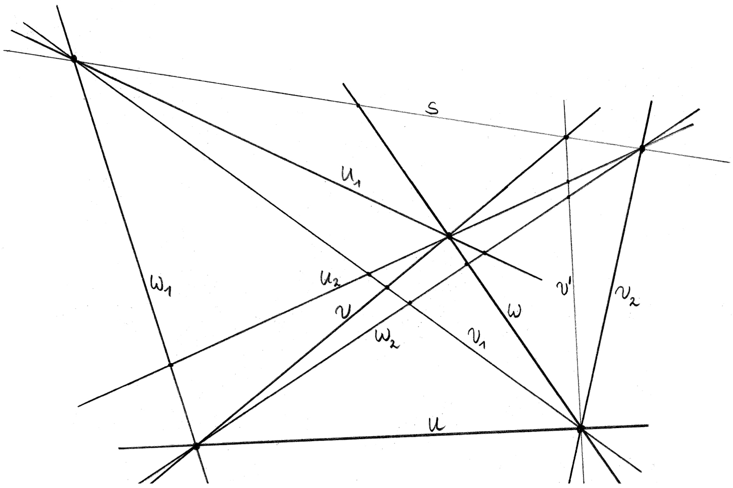


Abbildung II.20.

Sei nun s mit Satz 70 derart, dass $u_1\,w_1\,s$ und $u_2\,w_2\,s$ cozyklisch liegen, sodass also $s \in Z_1 \cap Z_2$. Nach Satz 66 liegt s in $\mathcal{L}(u\,v\,w)$ und trifft damit alle gegebenen Strahlen. Es liegt s in keinem der drei Zyklen $\mathcal{L}^2(u\,v), \mathcal{L}^2(v\,w), \mathcal{L}^2(u\,w)$, denn nach dem eben Gezeigten wäre sonst $s = w_i$ bzw. $s = u_i$ bzw. $s = v_i$ für $i = 1, 2$, was wegen $w_1 \neq w_2$ bzw. $u_1 \neq u_2$ bzw. $v_1 \neq v_2$ jeweils unmöglich ist. Sei wiederum mit Satz 70 v' derart, dass $u\,w\,v'$ und $v\,s\,v'$ cozyklisch liegen, sodass also $v' \in \mathcal{L}^2(u\,w)$ und

$$v_1\,v'\,v_2\,w \overset{s}{\barwedge} u_1\,v\,u_2\,w \quad \text{und} \quad v_1\,u\,v_2\,v' \overset{s}{\barwedge} w_1\,u\,w_2\,v,$$

denn für $i = 1, 2$ liegen mit $u_i\,w_i\,s$ und $u_i\,v_i\,w_i$ auch $u_i\,v_i\,s$ und $v_i\,w_i\,s$ cozyklisch. Gemäß Satz 100 (angewendet auf die Zyklen $\mathcal{L}^2(u\,w)$ und $\mathcal{L}^2(v\,w)$ bzw. $\mathcal{L}^2(u\,w)$ und $\mathcal{L}^2(u\,v)$) folgt

$$v_1\,v'\,v_2\,w \barwedge u_1\,v\,u_2\,w \quad \text{und} \quad v_1\,u\,v_2\,v' \barwedge w_1\,u\,w_2\,v. \tag{II.37}$$

Insbesondere sind mit $w_1\,w_2\,v$ auch $v_1\,v_2\,v'$ distinkt, sodass wegen $\mathcal{T}v_1\,u\,v_2\,w$ nach Korollar 119 einer der Fälle $\mathcal{T}v_1\,v'\,v_2\,w$ oder $\mathcal{T}v_1\,u\,v_2\,v'$ gelten muss. Hieraus und aus (II.37) ergibt sich nun die Behauptung mit Korollar 120. ■

Ein Strahl s heißt **Diagonale** eines Quadriplex $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$, falls es i, j, k, l gibt mit $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ sodass

$$a_i\,a_j\,s \quad \text{und} \quad a_k\,a_l\,s \quad \text{cosimplizial liegen.}$$

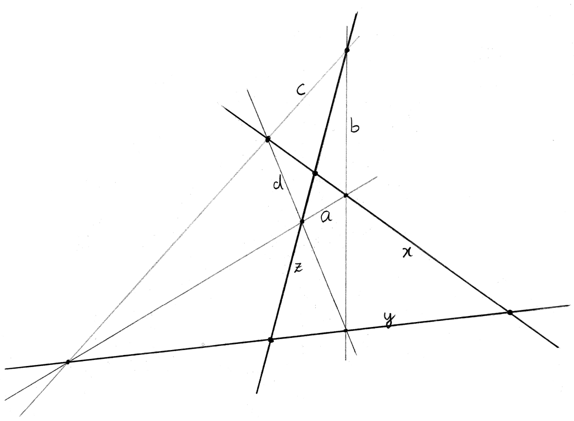


Abbildung II.21. Ein Quadriplex $a\,b\,c\,d$ mit Diagonalen x, y, z.

Ein Quadriplex $a\,b\,c\,d$ hat höchstens drei Diagonalen, nämlich die nach Satz 70 eindeutig bestimmten Strahlen x, y, z für die

$$\begin{matrix} a\,b\,x & a\,c\,y & a\,d\,z \\ c\,d\,x & b\,d\,y & b\,c\,z \end{matrix} \quad \text{cozyklisch liegen.} \tag{II.38}$$

Diese sind distinkt, denn wäre etwa $x = y$, so lägen neben $a\,b\,x$ auch $a\,c\,x$ und mithin $a\,b\,c\,x$ cozyklisch (beachte $a \neq x$, da $c\,d\,a$ cosimplizial liegen). Es gilt sogar:

122 Satz (Fano)

Die drei Diagonalen eines Quadriplex liegen cosimplizial.

Beweis: Sei $a\,b\,c\,d$ ein Quadriplex und seien x, y, z die Diagonalen gemäß (II.38). Als Strahlen des Plexus $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ liegen $a\,b\,c\,d\,x\,y\,z$ coplektisch (Satz 66). Es genügt daher zu zeigen, dass $x\,y\,z$ nicht cozyklisch liegen. Sei dazu $x' \in \mathcal{L}^2(a\,b)$ ein von a, b und x verschiedener Strahl (Satz 61). Auch x' liegt in $\mathcal{L}(a\,b\,c)$ und trifft somit alle bisher gegebenen Strahlen. Wähle jeweils mit Satz 70 Strahlen c' bzw. d', sodass

$$a\,c\,c' \;\text{ und }\; x'\,z\,c' \quad \text{bzw.} \quad b\,d\,d' \;\text{ und }\; x'\,z\,d' \qquad \text{cozyklisch liegen.}$$

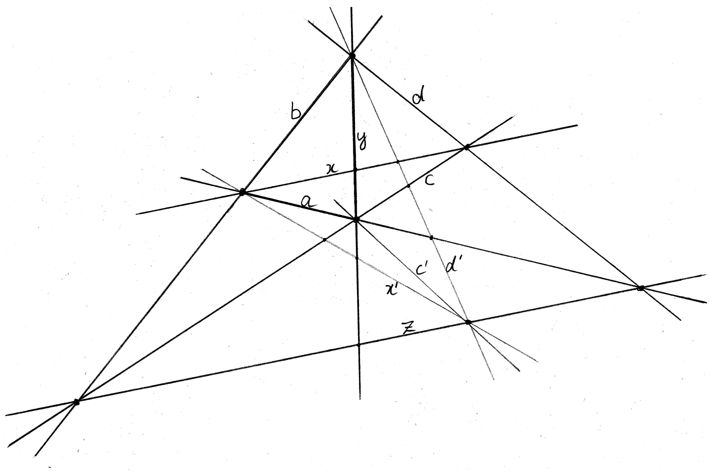


Abbildung II.22.

Nehmen wir an, dass $x\,y\,z$ cozyklisch liegen, so folgt

$$x'\,x\,a\,b \overset{z}{\barwedge} c'\,y\,a\,c \qquad \text{und} \qquad x'\,x\,a\,b \overset{z}{\barwedge} d'\,y\,d\,b$$

und mit Satz 100 ergibt sich

$$x'\,x\,a\,b \barwedge c'\,y\,a\,c \qquad \text{und} \qquad x'\,x\,a\,b \barwedge d'\,y\,d\,b \tag{II.39}$$

(beachte dass z als Strahl des Zyklus $\mathcal{L}^2(a\,d)$ in keinem der Zyklen $\mathcal{L}^2(a\,b), \mathcal{L}^2(a\,c), \mathcal{L}^2(b\,d)$ liegt, denn sonst wäre $z = a$ bzw. $z = d$ nach Korollar 58, im Widerspruch zu $z \in \mathcal{L}^2(b\,c)$).

Gemäß Satz 113 gilt nun einer der drei Fälle $\mathcal{T}x'\,x\,a\,b$ oder $\mathcal{T}x'\,a\,x\,b$ oder $\mathcal{T}x'\,a\,b\,x$, und dementsprechend gemäß (II.39) und Korollar 120 einer der Fälle:

$$\mathcal{T}x'\,x\,a\,b \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}c'\,y\,a\,c \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}d'\,y\,d\,b$$

oder

$$\mathcal{T}x'\,a\,x\,b \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}c'\,a\,y\,c \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}d'\,d\,y\,b$$

oder

$$\mathcal{T} x' \, a \, b \, x \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} c' \, a \, c \, y \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T} d' \, d \, b \, y.$$

Mit Rücksicht auf Satz 113 gilt im ersten Fall

$$\mathcal{T} d' \, y \, d \, b \quad \text{aber weder} \quad \mathcal{T} x' \, a \, x \, b \quad \text{noch} \quad \mathcal{T} c' \, y \, c \, a,$$

im mittleren Fall

$$\mathcal{T} x' \, a \, x \, b \quad \text{aber weder} \quad \mathcal{T} d' \, y \, d \, b \quad \text{noch} \quad \mathcal{T} c' \, a \, c \, y$$

und im letzten Fall

$$\mathcal{T} c' \, a \, c \, y \quad \text{aber weder} \quad \mathcal{T} d' \, b \, d \, y \quad \text{noch} \quad \mathcal{T} x' \, a \, x \, b.$$

In jedem Fall ergibt sich also ein Widerspruch zu Satz 121 (im ersten Fall angewendet auf $y \, a \, b$ und $x' \, d' \, c'$ und $x \, d \, c$, im zweiten Fall auf $a \, y \, b$ und $d' \, x' \, c'$ und $d \, x \, c$, im letzten auf $a \, b \, y$ und $d' \, c' \, x'$ und $d \, c \, x$). ■

II.6. Die harmonisch Konjugierten

Wir schreiben kurz

$$\mathcal{H} \, u \, v \, w \, x \quad \text{für} \quad \mathcal{Q}^{u \, v \, w}_{u \, x \, w}$$

und sagen dazu: v, x sind **harmonisch konjugiert** in Bezug auf u, w.

123 Satz

Gilt $\mathcal{H} \, u_1 \, v_1 \, w_1 \, v_2$, so liegen $u_1 \, v_1 \, w_1 \, v_2$ cozyklisch und sind distinkt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $v_1 \neq v_2$; das Übrige gilt per Definition. Nach Satz 109 gibt es Strahlen t, u, v, w sodass $u_1 \, v_1 \, w_1 \, u_1 \, v_2 \, w_1$ mit $t \, u \, v \, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden, insbesondere also $t \, u \, v \, w$ ein Quadriplex bilden und

$$\begin{array}{ccc} t \, u \, u_1 & t \, v \, v_1 & t \, w \, w_1 \\ v \, w \, u_1 & u \, w \, v_2 & u \, v \, w_1 \end{array} \quad \text{cozyklisch liegen.}$$

Es sind also u_1 und w_1 zwei Diagonalen des Quadriplex. Wäre $v_1 = v_2$, so wäre dies die dritte Diagonale, was nach Satz 122 nicht möglich ist, da $u_1 \, v_1 \, w_1$ cozyklisch liegen. ■

124 Satz

Seien u, v, w distinkte cozyklische Strahlen. Dann gibt es genau einen Strahl x sodass

$$\mathcal{H} \, u \, v \, w \, x.$$

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz 111. ■

125 Satz

Es gelte $\mathcal{H} \, u \, v \, w \, x$. Dann gilt für beliebige Strahlen u', v', w', x':

$$u \, v \, w \, x \barwedge u' \, v' \, w' \, x' \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H} \, u' \, v' \, w' \, x'.$$

Beweis: Die Implikation „$\Rightarrow$" ist unmittelbare Konsequenz von Theorem 112. Zu „$\Leftarrow$": Gelte $\mathcal{H}\, u'\, v'\, w'\, x'$. Insbesondere sind dann $u'\, v'\, w'$ distinkt und liegen cozyklisch (Satz 123); dasselbe gilt für $u\, v\, w$. Nach Satz 102 gibt es somit eine Projektivität π mit $u\, v\, w \overset{\pi}{\barwedge} u'\, v'\, w'$. Sei $x'' := \pi(x)$, sodass also

$$u\, v\, w\, x \overset{\pi}{\barwedge} u'\, v'\, w'\, x''.$$

Gemäß „$\Rightarrow$" folgt $\mathcal{H}\, u'\, v'\, w'\, x''$ und damit $x' = x''$ wegen der Eindeutigkeit des harmonisch Konjugierten (Satz 124). ■

126 Korollar

Es gilt

$$\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x \;\Rightarrow\; \mathcal{H}\, v\, w\, x\, u \wedge \mathcal{H}\, x\, w\, v\, u,$$

d.h. die Relation $\mathcal{H}$ ist D_8-symmetrisch.

Beweis: Gelte $\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x$. Dann sind $u\, v\, w\, x$ distinkt und liegen cozyklisch (Satz 123). Nach Satz 101 gilt somit $u\, v\, w\, x \barwedge x\, w\, v\, u$ und mit Satz 125 folgt $\mathcal{H}\, x\, w\, v\, u$. Letzteres bedeutet nichts anderes als $\mathcal{Q}_{x\ u\ v}^{x\ w\ v}$ und mit Satz 108 folgt $\mathcal{Q}_{v\ u\ x}^{v\ w\ x}$, also $\mathcal{H}\, v\, w\, x\, u$. ■

127 Korollar

$$\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}\, u\, v\, w\, x.$$

Beweis: Es gelte $\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x$ und mithin auch $\mathcal{H}\, u\, x\, w\, v$ gemäß Korollar 126. Mit Satz 125 folgt

$$u\, v\, w\, x \barwedge u\, x\, w\, v$$

und somit gemäß Korollar 120

$$\mathcal{T}\, u\, v\, x\, w \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}\, u\, x\, v\, w.$$

Nach Satz 113 gilt aber genau einer der Fälle

$$\mathcal{T}\, u\, x\, v\, w \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}\, u\, v\, x\, w \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}\, u\, v\, w\, x.$$

Es kann also nur der letzte Fall gelten. ■

Für distinkte sich treffende Strahlen u, v sei

$$\sigma_{u,v} : \mathcal{L}^2(u\, v) \to \mathcal{L}^2(u\, v), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x = u \text{ oder } x = v \\ \iota y\, \mathcal{H}\, u\, x\, v\, y & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Spiegelungsfunktion** zu u, v und

$$\delta_{u,v} : \mathcal{L}^2(u\, v) \to \mathcal{L}^2(u\, v), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x = u \text{ oder } x = v \\ \iota y\, \mathcal{H}\, u\, v\, x\, y & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Dopplungsfunktion** zu u, v.[9]

Nach Satz 124 sind beide Funktionen wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass es sich sogar um Projektivitäten handelt:

[9]Sind u, v zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden, so *spiegelt* $\sigma_{u,v}$ die Geraden an u (und damit an v) und $\delta_{u,v}$ *verdoppelt* den Tangens des zu v gebildeten Winkels.

128 Satz

Seien u, v distinkte sich treffende Strahlen. Dann sind $\sigma_{u,v}$ und $\delta_{u,v}$ Projektivitäten.

Beweis:

1. Wir betrachten zunächst die Spiegelungsfunktion $\sigma_{u,v}$. Sei t' sodass $t'\,u\,v$ cosimplizial liegen und sei $v' \in \mathcal{L}^2(t'\,v)$ von t', v verschieden. Dann sind $t'\,v'\,v$ distinkt und liegen cozyklisch und gemäß Satz 89 folgt, dass mit $t'\,u\,v$ auch

$$v'\,u\,v \qquad \text{cosimplizial liegen.}$$

Sei nun $x \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$ beliebig gegeben. Dann sind $u\,v\,x$ distinkt und liegen cozyklisch, sodass nach Satz 89 mit $t'\,u\,v$ bzw. $v'\,u\,v$ auch

$$t'\,u\,x \quad \text{und} \quad t'\,v\,x \quad \text{und} \quad v'\,u\,x \qquad \text{cosimplizial liegen.} \tag{II.40}$$

Nach Satz 66 liegen mit u, v und t' auch x und v' im Plexus $\mathcal{L}(t'\,u\,v)$, sodass also insbesondere $t'\,x\,v'\,u$ coplektisch liegen. Mit Satz 70 folgt die Existenz eines Strahls x' derart, dass $t'\,x\,x'$ und $v'\,u\,x'$ cozyklisch liegen. Aus Letzterem folgt $x \neq x'$ wegen (II.40), sodass wegen Ersterem mit $t'\,u\,x$ auch $u\,x\,x'$ und damit

$$u\,v\,x' \qquad \text{cosimplizial liegen.} \tag{II.41}$$

(zweimaliges Anwenden von Satz 89). Insbesondere ist $t' \neq x'$, sodass mit $t'\,v\,x$ auch

$$t'\,v\,x' \qquad \text{cosimplizial liegen.} \tag{II.42}$$

(Satz 89 angewendet auf $\{t', x, x'\}$). Wähle nun mit Satz 70 einen Strahl u' derart, dass $t'\,u\,u'$ und $v\,x'\,u'$ cozyklisch liegen. Aus Letzterem folgt $u' \neq u$ und $u' \neq t'$ wegen (II.41) bzw. (II.42). Gemäß Satz 89 angewendet auf $\{t', v', v\}$ bzw. $\{t', u', u\}$ liegen mit $t'\,u\,v$ auch $t'\,u\,v'$ bzw. $t'\,u'\,v$ und damit

$$u'\,v'\,u \quad \text{und} \quad u'\,v'\,v \qquad \text{cosimplizial.} \tag{II.43}$$

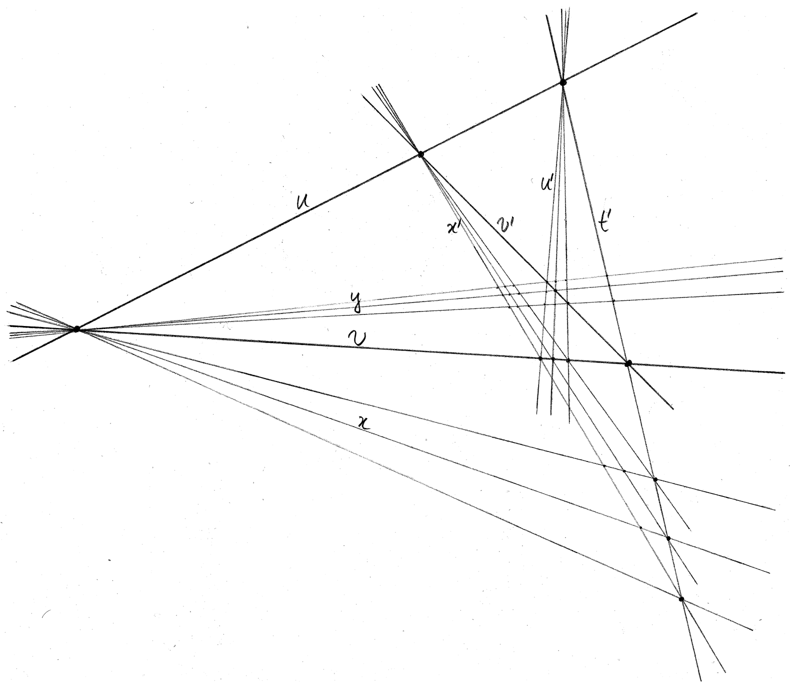


Abbildung II.23. Die Spiegelungsfunktion: $\sigma_{u,v}(x) = y$.

Sei nun y mit Satz 70 ein Strahl derart, dass $u\,v\,y$ und $u'\,v'\,y$ cozyklisch liegen. Dann liegen $u\,v\,x\,y$ sowie

$$\begin{matrix} t'\,u'\,u & t'\,v'\,v & t'\,x'\,x \\ x'\,v'\,u & u'\,x'\,v & u'\,v'\,y \end{matrix} \qquad \text{cozyklisch,}$$

d.h. $u\,v\,x\,u\,v\,y$ erfüllen mit $t'\,u'\,v'\,x'$ Bedingung Q3$'$ von Lemma 105. Nach Wahl von v' ist $t' \neq v' \neq v$ und nach (II.40) liegen $t'\,u\,x$ cosimplizial, sodass also auch Bedingung Q2$'$ erfüllt ist. Wegen (II.43) ist y von u und v verschieden und nach Wahl von x sind auch $u\,v\,x$ distinkt. Also ist auch Bedingung Q1$'$ erfüllt und mit Lemma 105 folgt, dass $u\,v\,x\,u\,v\,y$ mit $t'\,u'\,v'\,x'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Gemäß Satz 109 bedeutet dies

$$\mathcal{Q}^{u\,v\,x}_{u\,v\,y}$$

und damit nach Satz 108 auch

$$\mathcal{Q}^{u\,x\,v}_{u\,y\,v},$$

d.h.

$$\sigma_{u,v}(x) = y. \tag{II.44}$$

Andererseits gilt

$$u\,v\,x \overset{t'}{\barwedge} u\,v'\,x' \overset{v}{\barwedge} u\,t'\,u' \overset{v'}{\barwedge} u\,v\,y$$

und gemäß Satz 94 haben wir Projektivitäten

$$\mathcal{L}^2(u\,v) \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{L}^2(u\,v') \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{L}^2(u\,t') \xrightarrow{\pi_3} \mathcal{L}^2(u\,v)$$

mit

$$u\,v\,x \overset{\pi_1}{\barwedge} u\,v'\,x' \overset{\pi_2}{\barwedge} u\,t'\,u' \overset{\pi_3}{\barwedge} u\,v\,y$$

(beachte, dass neben $t'\,u\,v$ und $v'\,u\,v$ auch $t'\,v'\,x'$ und $t'\,u'\,v'$ cosimplizial liegen, da $t\,u'\,v'\,x'$ ein Quadriplex bilden, sodass die Strahlen t', v, v' jeweils die Voraussetzung von Satz 94 erfüllen). Für die Projektivität $\pi := \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ gilt wegen (II.44):

$$\pi(x) = \sigma_{u,v}(x). \tag{II.45}$$

Die Projektivitäten π_1, π_2, π_3 und damit π hängen lediglich von den Strahlen u, v, t', v' ab (siehe Satz 94) und da diese unabhängig von x gewählt wurden, gilt (II.45) für alle $x \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$. Wegen $\pi(u) = u = \sigma_{u,v}(u)$ und $\pi(v) = v = \sigma_{u,v}(v)$ ist damit $\sigma_{u,v} = \pi$ eine Projektivität.

2. Kommen wir zur Dopplungsfunktion $\delta_{u,v}$. Wie in 1. sei t' sodass $t'\,u\,v$ cosimplizial liegen und v' sodass $t'\,v'\,v$ ditstinkt sind und cozyklisch liegen. Sei ferner $x \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$ beliebig gegeben. Dann sind $u\,v\,x$ distinkt und liegen cozyklisch und nach Satz 89 liegen mit $t'\,u\,v$ auch $t'\,u\,x$ cosimplizial. Wähle mit Lemma 106 Strahlen u', x', y sodass $u\,v\,x\,u\,y\,x$ mit $t'\,u'\,v'\,x'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Gemäß Satz 109 gilt dann

$$\mathcal{Q}^{u\,v\,x}_{u\,y\,x},$$

also

$$\delta_{u,v}(x) = y. \tag{II.46}$$

Ferner liegen

$$\begin{matrix} t'\,u'\,u & t'\,v'\,v & t'\,x'\,x \\ v'\,x'\,u & u'\,x'\,y & u'\,v'\,x \end{matrix} \qquad \text{cozyklisch}$$

und nach Satz 104 liegen

$$t'\,v'\,x \qquad \text{cosimplizial.} \tag{II.47}$$

Sei s sodass $v\,v'\,s$ und $x'\,u'\,s$ cozyklisch liegen (Satz 70). Dann erfüllen $t'\,v\,v'\,t'\,s\,v'$ mit $x\,x'\,u\,u'$ Bedingung Q3$'$ von Lemma 105:

$$\begin{matrix} x\,x'\,t' & x\,u\,v & x\,u'\,v' \\ u\,u'\,t' & x'\,u'\,s & x'\,u\,v' \end{matrix} \qquad \text{liegen cozyklisch.}$$

Auch Bedingung Q2$'$ ist erfüllt: Es gilt $x \neq u \neq v$ und nach (II.47) liegen $x\,t'\,v'$ cosimplizial. Da offensichtlich auch Q1$'$ erfüllt ist, folgt mit Lemma 105, dass $t'\,v\,v'\,t'\,s\,v'$ mit $x\,x'\,u\,u'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Mit Satz 109 folgt

$$\mathcal{Q}^{t'\,v\,v'}_{t'\,s\,v'},$$

also

$$\sigma_{t',v'}(v) = s. \tag{II.48}$$

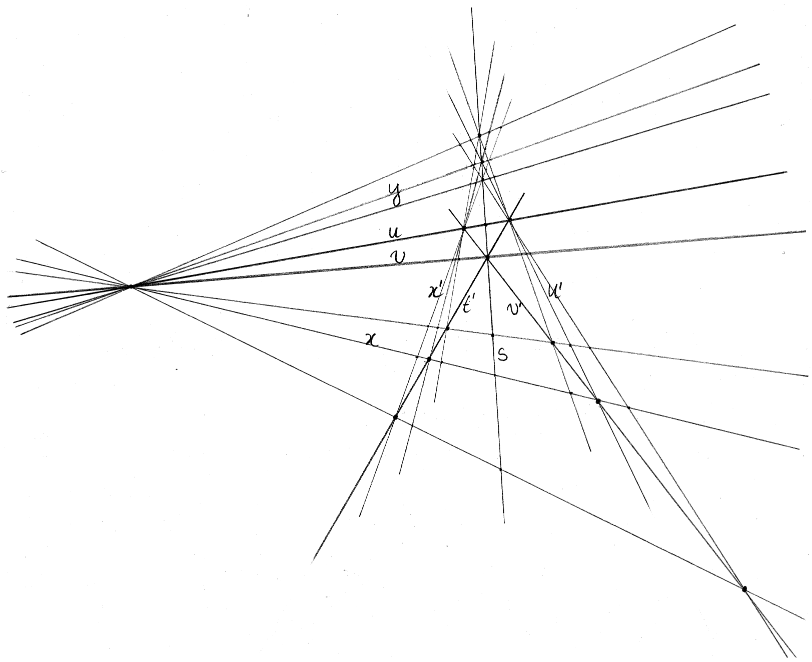


Abbildung II.24. Die Dopplungsfunktion: $\delta_{u,v}(x) = y$.

Nach Satz 104 (angewendet auf die $\mathcal{Q}$-Konfiguration $t'\,v\,v'\,t'\,s\,v'$ mit $x\,x'\,u\,u'$) liegt u zum Strahlengebilde $\{t', v, v', s\}$ cosimplizial, sodass also insbesondere

$$u\,v'\,s \quad \text{und} \quad u\,v\,s \qquad \text{cosimplizial liegen.}$$

(beachte $v \neq s$ gemäß Satz 123). Mit $x'\,u'\,s$ und $u'\,x'\,y$ liegen auch $x'\,s\,y$ cozyklisch. Damit gilt

$$u\,v\,x \overset{t'}{\barwedge} u\,v'\,x' \overset{s}{\barwedge} u\,v\,y$$

und gemäß Satz 94 haben wir Projektivitäten

$$\mathcal{L}^2(u\,v) \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{L}^2(u\,v') \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{L}^2(u\,v)$$

mit

$$u\,v\,x \overset{\pi_1}{\barwedge} u\,v'\,x' \overset{\pi_2}{\barwedge} u\,v\,y$$

(beachte für die Voraussetzung von Satz 94, dass $t'\,u\,v$ und $t'\,v'\,x'$ sowie $u\,v'\,s$ und $u\,v\,s$ cosimplizial liegen). Für die Projektivität $\pi := \pi_2 \circ \pi_1$ gilt wegen (II.46):

$$\pi(x) = \delta_{u,v}(x). \tag{II.49}$$

Wegen (II.48) hängen die Projektivitäten π_1, π_2 und mithin π nur von den Strahlen u, v, t', v' ab. Da Letztere unabhängig von x gewählt wurden, gilt somit (II.49) für alle $x \in \mathcal{L}^2(u,v)\backslash u, v$ und da auch $\pi(u) = u = \delta_{u,v}(u)$ und $\pi(v) = v = \delta_{u,v}(v)$ ist somit $\delta_{u,v} = \pi$ eine Projektivität. ■

II.7. Topologie und Stetigkeit

Gemäß Satz 124 und Korollar 127 gibt es zu je drei distinkten cozyklischen Strahlen u, v, w einen Strahl x sodass $\mathcal{T}\,u\,v\,w\,x$. Dies lässt sich verallgemeinern:

129 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$. Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}_n$ einen Strahl z sodass[10]

$$\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_i\, z\, z_{i+1} \ldots z_n.$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $i = n$, der Fall $i < n$ ergibt sich daraus per Symmetrie (Satz 115). Der Fall $n = 1$ ist trivial (siehe Satz 55) und der Fall $n = 2$ ergibt sich aus Satz 61. Sei also $n \geq 3$ und gelte $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$. Dann liegen $z_1\, z_2\, z_n$ cozyklisch und sind distinkt und mit Korollar 124 folgt die Existenz eines Strahls z sodass $\mathcal{H}\, z_1\, z_2\, z_n\, z$ und damit $\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, z_n\, z$ gemäß Korollar 127. Zusammen mit $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n$ impliziert dies $\mathcal{T}_{n+1}\, z_1 \ldots z_n\, z$ gemäß Satz 114. ■

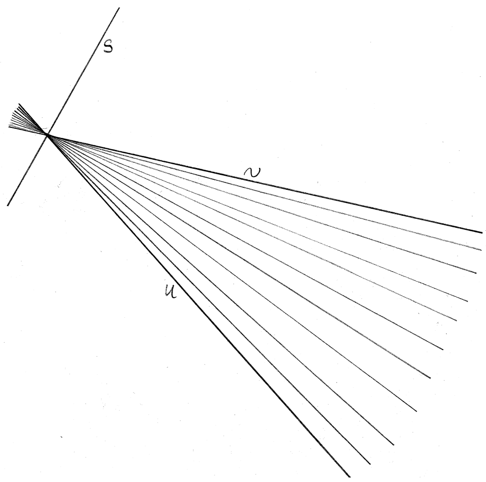


Abbildung II.25. Ein offenes Intervall $(u\,^s\,v)$.

Seien u, v distinkte sich treffende Strahlen. Das Strahlengebilde bestehend aus allen durch u und v von einem festen Strahl $s \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$ getrennten Strahlen nennen wir **offenes Intervall mit Endpunkten** u, v und bezeichnen es mit $(u\,^s\,v)$, also

$$(u\,^s\,v) := \{z\,;\ \mathcal{T}\,u\,s\,v\,z\}\,.$$

Nach Satz 61 gibt es stets einen solchen Strahl $s \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash\{u, v\}$ und gemäß Satz 129 ist $(u\,^s\,v)$ nicht leer. Für $s' \in (u\,^s\,v)$ bilden $(u\,^s\,v)$ und $(u\,^{s'}\,v)$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$, denn aus $\mathcal{T}\,u\,s\,v\,s'$ folgt nach Korollar 119 für $x \in \mathcal{L}^2(u\,v)\backslash u, v$ entweder $\mathcal{T}\,u\,s\,v\,x$ oder $\mathcal{T}\,u\,x\,v\,s'$, und

[10]im Fall $i = n$ ist damit wieder $\mathcal{T}_n\, z_1 \ldots z_n\, z$ gemeint.

letzteres ist äquivalent zu $\mathcal{T}\,u\,s'\,v\,x$. Es gibt also zu zwei distinkten sich treffenden Strahlen u, v stets genau zwei offene Intervalle mit Endpunkten u und v – wir nennen sie zueinander **komplementäre Intervalle**. Das zu $(u\,^s\,v)$ komplementäre Intervall bezeichnen wir mit $(u\,_s\,v)$. Es gilt

$$s \in (u\,_s\,v) \tag{II.50}$$

und

$$z \in (u\,_s\,v) \quad \Leftrightarrow \quad (u\,_z\,v) = (u\,_s\,v). \tag{II.51}$$

Ferner:

$$(u\,_s\,v) = (v\,_s\,u). \tag{II.52}$$

130 Satz

Sei $n \geq 2$ und gelte $\mathcal{T}_{n+1}\,s\,z_1 \ldots z_n$. Dann gilt

$$(z_n\,_s\,z_1) \subseteq (z_i\,_s\,z_j) \qquad \textit{für alle } i, j \in \mathbb{N}_n \textit{ mit } i \neq j.$$

Beweis: Es seien $i, j \in \mathbb{N}_n$ mit $i \neq j$ beliebig gewählt, o.E. $j < i$ gemäß (II.52). Dann ist $i > 1$ und aus der Voraussetzung $\mathcal{T}_{n+1}\,s\,z_1 \ldots z_n$ folgt per Symmetrie (Satz 115):

$$\mathcal{T}_{n+1}\,z_i \ldots z_n\,s\,z_1 \ldots z_{i-1}. \tag{II.53}$$

Sei $z \in (z_n\,_s\,z_1)$ beliebig, und angenommen $z \notin (z_i\,_s\,z_j)$. Wegen $z \in \mathcal{L}^2(z_1\,z_n) = \mathcal{L}^2(z_i\,z_j)$ muss dann gelten:

$$\mathcal{T}\,z_i\,s\,z_j\,z \quad \text{oder} \quad z \in \{z_i, z_j\}. \tag{II.54}$$

Andererseits gilt wegen $z \in (z_n\,_s\,z_1)$:

$$\neg\mathcal{T}\,z_n\,s\,z_1\,z \quad \text{und} \quad z \notin \{z_1, z_n\}. \tag{II.55}$$

Wir zeigen, dass sich (II.54) und (II.55) widersprechen.

Betrachten wir zunächst den Fall $1 < j < i < n$: Dann folgt aus (II.53)

$$\mathcal{T}_5\,z_i\,z_n\,s\,z_1\,z_j.$$

Zusammen mit (II.54) impliziert dies $\mathcal{T}_6\,z_i\,z_n\,s\,z_1\,z_j\,z$ (gemäß Satz 114) oder $\mathcal{T}_5\,z\,z_n\,s\,z_1\,z_j$ oder $\mathcal{T}_5\,z_i\,z_n\,s\,z_1\,z$, also in jedem Fall

$$\mathcal{T}\,z_n\,s\,z_1\,z$$

(im zweiten Fall per Symmetrie), im Widerspruch zu (II.55).

Fall $1 = j < i < n$: Dann folgt aus (II.53) $\mathcal{T}\,z_i\,z_n\,s\,z_j$, was zusammen mit (II.54) $\mathcal{T}_5\,z_i\,z_n\,s\,z_j\,z$ oder $\mathcal{T}\,z\,z_n\,s\,z_j$ oder $z = z_j$ impliziert, was wegen $j = 1$ jeweils (II.55) widerspricht.

Fall $1 < j < i = n$: Dann folgt aus (II.53) $\mathcal{T}\,z_i\,s\,z_1\,z_j$, was zusammen mit (II.54) $\mathcal{T}_5\,z_i\,s\,z_1\,z_j\,z$ oder $z = z_i$ oder $\mathcal{T}\,z_i\,s\,z_1\,z$ impliziert, was wegen $i = n$ jeweils (II.55) widerspricht. Im Fall $j = 1$ und $i = n$ schließlich widersprechen sich (II.54) und (II.55) direkt. ∎

131 Satz

Sei Z ein Zyklus. Dann bildet die Menge der offenen Intervalle mit Endpunkten in Z die Basis einer Topologie auf Z. Versehen mit dieser Toplogie ist Z ein Hausdorff-Raum.

Beweis: Wir zeigen zunächst das Basiskriterium (siehe Satz 168 im Anhang): Zu jedem Strahl $s \in Z$ gibt es nach Satz 61 von s und einander verschiedene Strahlen $u, v \in Z$, und es gilt $s \in (u\,{}_s\,v) \subseteq Z$ gemäß (II.50). Also bilden die offenen Intervalle mit Endpunkten in Z eine Überdeckung von Z. Es bleibt zu zeigen: Zu jedem Strahl $s \in Z$ und je zwei offenen Intervallen I_1, I_2 mit Endpunkten in Z und $s \in I_1 \cap I_2$ gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq I_1 \cap I_2$ mit $s \in I$. Seien dazu $u_i, v_i \in Z$ Endpunkte von I_i, sodass also $I_i = (u_i\,{}_s\,v_i)$ gemäß (II.51). Im Fall $\{u_1, v_1\} = \{u_2, v_2\}$ gilt $I_1 = I_2$ gemäß (II.52) und es kann $I = I_1$ gewählt werden. Aus Symmetriegründen können wir daher o.E. annehmen, dass $u_1 \neq u_2, v_2$. Nach Satz 113 gilt dann

$$\mathcal{T} s\, u_1\, u_2\, v_2 \quad \text{oder} \quad \mathcal{T} s\, u_2\, u_1\, v_2 \quad \text{oder} \quad \mathcal{T} s\, u_2\, v_2\, u_1$$

(beachte dass $s\, u_1\, u_2\, v_2$ als Strahlen von Z cozyklisch liegen). In jedem dieser Fälle folgt mit Satz 118 die Existenz von Strahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $\{z_1, \ldots, z_n\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ und

$$\mathcal{T}_{n+1}\, s\, z_1 \ldots z_n$$

(im Fall $v_1 = u_2$ oder $v_1 = v_2$ folgt dies direkt, andernfalls kann Satz 118 angewendet werden). Mit Satz 130 folgt

$$(z_n\,{}_s\,z_1) \subseteq (z_i\,{}_s\,z_j) \qquad \text{für alle } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } i \neq j.$$

Damit erfüllt $I = (z_n\,{}_s\,z_1)$ die Behauptung.

Zum zweiten Trennungsaxiom: Seien $s_1, s_2 \in Z$ distinkt. Wähle nacheinander mit Satz 129 Strahlen $u, v \in Z$ sodass $\mathcal{T} u\, s_1\, v\, s_2$. Dann ist $(u\,{}_{s_i}\,v)$ eine offene Umgebung von s_i und als komplementäre Intervalle sind $(u\,{}_{s_1}\,v)$ und $(u\,{}_{s_2}\,v)$ disjunkt. ■

Wir betrachten Zyklen von nun an als mit dieser Toplogie versehene Toplogische Räume.

132 Satz

Projektivitäten sind Homöomorphismen.

Beweis: Wir zeigen allgemeiner, dass jeder $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-Isomorphismus $\pi : Y \to Z$ zwischen Zyklen Y, Z ein Homöomorphismus ist (siehe Korollar 120). Sei dazu I ein offenes Intervall mit Endpunkten $u, v \in Y$, also $I = (u\,{}^s\,v)$ für einen gewissen Strahl $s \in \mathcal{L}^2(u\, v) = Y$. Dann gilt für $y \in Y$:

$$y \in I \;\Leftrightarrow\; \mathcal{T} u\, s\, v\, y \;\Leftrightarrow\; \mathcal{T} \pi(u)\, \pi(s)\, \pi(v)\, \pi(y) \;\Leftrightarrow\; \pi(y) \in (\pi(u)\,{}_{\pi(s)}\,\pi(y))$$

und somit

$$\pi\lceil I \rfloor \subseteq (\pi(u)\,{}_{\pi(s)}\,\pi(v)).$$

π bildet also offene Intervalle mit Endpunkten in Y in offene Intervalle mit Endpunkten in Z ab. Da erstere eine Basis der Topologie von Y bilden und letztere offene Teilmengen von Z sind, ist damit π offen. Aus dem selben Grund ist auch π^{-1} offen und damit π ein Homöomorphismus. ■

133 Lemma

Sei Z ein Zyklus und seien $u, v, z \in Z$ distinkte Strahlen. Sei ferner $A \subseteq Z$ derart, dass zu jedem Strahl s mit $\mathcal{T} u\, s\, z\, v$ ein Strahl $a \in A$ existiert mit $\mathcal{T} u\, s\, a\, z$. Dann ist z Häufungspunkt von A.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jedes offene Intervall $I = (x\,_z\,y)$ mit $x, y \in Z$ einen von z verschiedenen Strahl aus A enthält. Ist $\{x, y\} = \{u, v\}$, so ist $I = (u\,_z\,v)$ und die Behauptung folgt direkt aus der Voraussetzung: Wähle zunächst s mit $\mathcal{T}\,u\,s\,z\,v$ gemäß Satz 129 und dann $a \in A$ mit $\mathcal{T}\,u\,s\,a\,z$ und mithin $\mathcal{T}_5\,u\,s\,a\,z\,v$; dann ist $a \neq z$ und $a \in (u\,_z\,v) = I$ (siehe Satz 113).

Wir können also im Folgenden o.E. $x \notin \{u, v\}$ annehmen. Dann sind z, u, v, x distinkt und liegen cozyklisch (weil in Z) und nach Satz 113 gilt

$$\mathcal{T}\,z\,x\,u\,v \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}\,z\,u\,x\,v \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}\,z\,u\,v\,x.$$

In jedem dieser drei Fälle folgt mit Satz 118 die Existenz von Strahlen $z_1, \ldots, z_n$ sodass $\{z_1, \ldots, z_n\} = \{u, v, x, y\}$ und $\mathcal{T}_{n+1}\,z\,z_1 \ldots z_n$, wobei $i < j$ für i mit $z_i = u$ und j mit $z_j = v$ (in den Fällen $y = u$ oder $y = v$ ist dies klar; andernfalls sind $z\,u\,v\,x\,y$ distinkt und es kann Satz 118 angewendet werden). Sei nun s sodass

$$\mathcal{T}_{n+2}\,z\,s\,z_1 \ldots z_n \tag{II.56}$$

gemäß Satz 129. Dann ist $(z_n\,_z\,s) \subseteq (x\,_z\,y) = I$ gemäß Satz 130. Andererseits folgt aus (II.56) insbesondere $\mathcal{T}\,z\,s\,z_i\,z_j$ und mithin $\mathcal{T}\,z_i\,s\,z\,z_j$ per Symmetrie. Wegen $z_i = u$ und $z_j = v$ folgt die Existenz eines Strahls $a \in A$ mit $\mathcal{T}\,z_i\,s\,a\,z$ (siehe Voraussetzung) und damit auch $\mathcal{T}\,z\,a\,s\,z_i$, wiederum per Symmetrie, was zusammen mit (II.56) $\mathcal{T}_{n+3}\,z\,a\,s\,z_1 \ldots z_n$ impliziert, also insbesondere (per Symmetrie)

$$\mathcal{T}\,z_n\,z\,a\,s.$$

Damit ist $a \neq z$ und $a \in (z_n\,_z\,s) \subseteq I$. ■

Ein Strahlengebilde S heißt **harmonisch abgeschlossen**, falls

$$u, v, w \in S \,\wedge\, \mathcal{H}\,u\,v\,w\,x \quad \Rightarrow \quad x \in S.$$

134 Satz

Seien Z ein Zyklus und $A \subseteq Z$ eine harmonisch abgeschlossene Menge mit $|A| \geq 3$. Dann liegt A dicht in Z.

Beweis: Angenommen A liegt nicht dicht in Z. Dann gibt es ein zu A disjunktes offenes Intervall $I = (u_0\,_{z_0}\,v_0)$ mit Endpunkten $u_0, v_0 \in Z$. Es gilt also

$$\mathcal{T}\,u_0\,a\,v_0\,z_0, \qquad \forall a \in A \backslash u_0, v_0. \tag{II.57}$$

Wir zeigen, dass der Strahl v_0 in (II.57) aus $\bar{A}$ gewählt werden kann. Sei dazu o.E. $v_0 \notin \bar{A}$ angenommen. Dann ist v_0 kein Häufungspunkt von A und mit Lemma 133 folgt die Existenz eines Strahls s_0 sodass $\mathcal{T}\,u_0\,s_0\,v_0\,z_0$, aber $\neg\mathcal{T}\,u_0\,s_0\,a\,v_0$ für alle $a \in A$. Da für $a \in A$ auch $\neg\mathcal{T}\,u_0\,s_0\,v_0\,a$ (sonst wäre $a \in (u_0\,^{s_0}\,v_0) = (u_0\,_{z_0}\,v_0) = I$), bleibt für $a \in A\backslash u_0, s_0$ lediglich die Möglichkeit $\mathcal{T}\,u_0\,a\,s_0\,v_0$ (Satz 113; beachte $v_0 \notin A$). Wegen $\mathcal{T}\,u_0\,s_0\,v_0\,z_0$ folgt

$$\mathcal{T}_5\,u_0\,a\,s_0\,v_0\,z_0, \qquad \forall a \in A \backslash u_0, s_0.$$

Wählen wir s_1 mit $\mathcal{T}\,u_0\,s_0\,s_1\,v_0$ (gemäß Satz 129), so folgt $\mathcal{T}_6\,u_0\,a\,s_0\,s_1\,v_0\,z_0$ für alle $a \in A\backslash u_0, s_0$ und damit insbesondere

$$\mathcal{T}_5\,u_0\,a\,s_1\,v_0\,z_0, \qquad \forall a \in A \backslash u_0. \tag{II.58}$$

Der Strahl s_1 ist nicht der einzige mit der Eigenschaft (II.58), denn jeder Strahl s_2 mit $\mathcal{T}\,u_0\,s_1\,s_2\,v_0$ erfüllt sie offensichtlich ebenfalls. Das Strahlengebilde

$$B := \{b\,;\ \forall a \in A\backslash u_0 : \mathcal{T}_5\,u_0\,a\,b\,v_0\,z_0\}$$

enthält also mehr als einen Strahl. Es gilt

$$\mathcal{T} u_0\, a\, b\, v_0 \qquad \forall a \in A \backslash u_0,\ b \in B$$

und mit Axiom O4 folgt die Existenz eines Strahls v_1 sodass

$$\mathcal{T} u_0\, a\, v_1\, b \qquad \forall a \in A \backslash u_0, v_1,\ b \in B \backslash v_1. \tag{II.59}$$

Sei $b \in B\backslash v_1$ (beachte $|B| \geq 2$). Für $a \in A\backslash u_0, v_1$ gilt $\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, b\, v_0\, z_0$ (per Definition von B) und damit $\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, v_1\, b\, v_0\, z_0$ gemäß (II.59), also insbesondere

$$\mathcal{T} u_0\, v_1\, v_0\, z_0 \tag{II.60}$$

(beachte $|A| \geq 3$) und

$$\mathcal{T} u_0\, a\, v_1\, z_0, \qquad \forall a \in A \backslash u_0, v_1.$$

Der Strahl v_1 erfüllt also die selbe Eigenschaft (II.57) wie v_0. Wir zeigen noch $v_1 \in \bar{A}$. Angenommen $v_1 \notin \bar{A}$. Dann folgt wie oben für v_0 (siehe (II.58)) die Existenz eines Strahls s mit

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, s\, v_1\, z_0 \qquad \forall a \in A \backslash u_0.$$

Zusammen mit (II.60) impliziert dies $\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, s\, v_1\, v_0\, z_0$ für alle $a \in A\backslash u_0$, also insbesondere

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, s\, v_0\, z_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{T} u_0\, a\, s\, v_1, \quad \forall a \in A \backslash u_0.$$

Ersteres bedeutet aber $s \in B$, was wegen (II.59) einen Widerspruch zu Letzterem darstellt (beachte auch hier $|A| \geq 3$; ferner $s \neq v_1$ wegen $\mathcal{T} u_0\, a\, s\, v_1$).

Wir können also v_0 und symmetrisch analog auch u_0 aus $\bar{A}$ wählen, sodass (II.57).

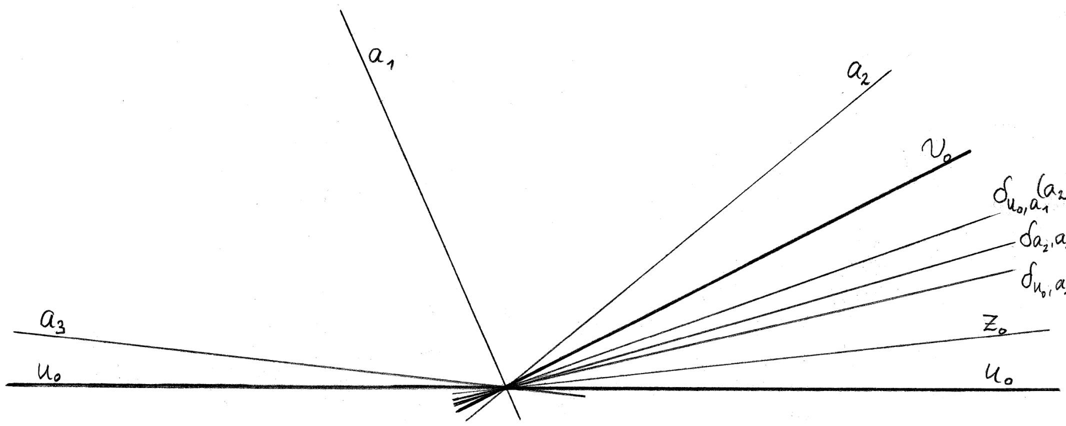


Abbildung II.26.

Sei nun $a_1 \in A$ von u_0, v_0 verschieden. Dann gilt

$$\delta_{u_0,a_1}(v_0) \in (u_0\, {}^{a_1}\, v_0) \overset{(II.57)}{=} (u_0\, {}_{z_0}\, v_0) = I,$$

denn per Definition gilt $\mathcal{H} u_0\, a_1\, v_0\, \delta_{u_0,a_1}(v_0)$ und mithin $\mathcal{T} u_0\, a_1\, v_0\, \delta_{u_0,a_1}(v_0)$ gemäß Korollar 127. Da δ_{u_0,a_1} stetig ist (siehe Satz 128 und Satz 132) gibt es somit eine Umgebung V von v_0 sodass

$$\delta_{u_0,a_1}\lceil V \rfloor \subseteq I.$$

Wegen $v_0 \in \bar{A}$ folgt die Existenz eines Strahls $a_2 \in V \cap A\backslash a_1, u_0$. Wegen $a_2 \in V$ folgt

$$\delta_{a_2,a_1}(u_0) = \delta_{u_0,a_1}(a_2) \in I$$

(beachte die Symmetrie $\mathcal{H}\, a_2\, a_1\, u_0\, d \Leftrightarrow \mathcal{H}\, u_0\, a_1\, a_2\, d$). Aufgrund der Stetigkeit von δ_{a_2,a_1} folgt die Existenz einer Umgebung U von u_0 sodass

$$\delta_{a_2,a_1}\lceil U \rfloor \subseteq I.$$

Wegen $u_0 \in \bar{A}$ ist $U \cap A \neq \emptyset$. Sei $a_3 \in U \cap A$. Dann folgt einerseits

$$\delta_{a_2,a_1}(a_3) \in I,$$

andererseits liegt mit a_1, a_2, a_3 auch $\delta_{a_2,a_1}(a_3)$ in A, da A harmonisch abgeschlossen ist. Dies steht im Widerspruch zu $A \cap I = \emptyset$. ■

Prinzipiell genügt die Relation $\mathfrak{T}$ des sich Treffens, um die Strahlenräume bis auf Isomorphismie eindeutig zu charakterisieren, denn die Trennungsbeziehung lässt sich mithilfe der Relation des Treffens definieren. Für den Beweis der letzteren Aussage ist das folgende Lemma entscheidend:

135 Lemma

Gilt $\mathcal{T}\, u_0\, v_0\, w_0\, x_0$, so gibt es Strahlen z_1, z_2 sodass $\mathcal{H}\, u_0\, z_1\, v_0\, z_2$ und $\mathcal{H}\, w_0\, z_1\, x_0\, z_2$.

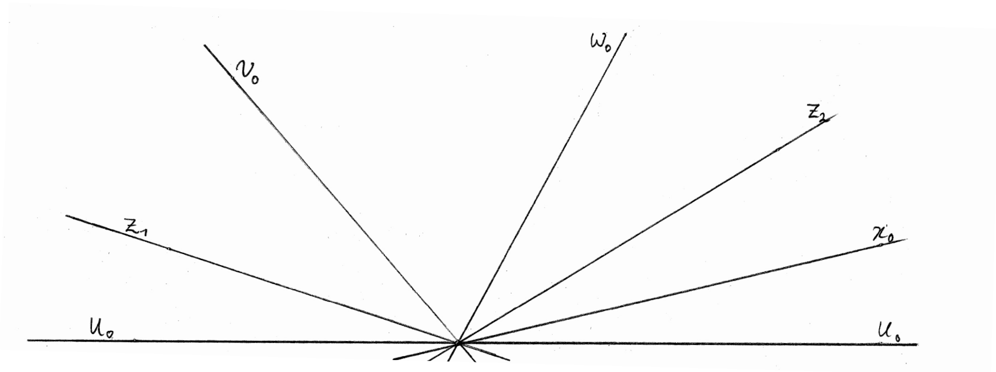


Abbildung II.27.

Beweis: Sei

$$A := \{a\,;\ \mathcal{T} u_0\, a\, v_0\, w_0 \wedge \mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, \sigma_{u_0,v_0}(a)\,\} \quad \text{und} \quad B := \{b\,;\ \forall a \in A : \mathcal{T} u_0\, a\, b\, v_0\}\,.$$

Dann gilt $\mathcal{T} u_0\, a\, b\, v_0$ für alle $a \in A, b \in B$ und mit Axiom O4 folgt die Existenz eines Strahls z_1 sodass

$$\mathcal{T} u_0\, a\, z_1\, b, \qquad \forall a \in A \backslash z_1,\ b \in B \backslash z_1. \tag{II.61}$$

Wir werden zeigen, dass z_1 zusammen mit $z_2 := \sigma_{u_0,v_0}(z_1)$ die Behauptung erfüllt.

Beachte zunächst, dass $u_0\, v_0\, w_0\, x_0$ distinkt sind und cozyklisch liegen und dass gemäß Korollar 127:

$$\mathcal{T} u_0\, z\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z), \quad \forall z \in \mathcal{L}^2(u_0\, v_0) \backslash u_0, v_0 \tag{II.62}$$

sowie (mit Rücksicht auf Symmetrie)

$$\mathcal{T} z\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z)\, x_0, \quad \forall z \in \mathcal{L}^2(w_0\, x_0) \backslash w_0, x_0. \tag{II.63}$$

Es gilt:

$$\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, v_0\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, \sigma_{u_0,v_0}(a), \qquad \forall a \in A, \tag{II.64}$$

denn aus $\mathcal{T} u_0\, v_0\, w_0\, x_0$ und $\mathcal{T} u_0\, a\, v_0\, w_0$ folgt $\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, v_0\, w_0\, x_0$ und zusammen mit $\mathcal{T} a\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, x_0$ (gemäß (II.63)) impliziert dies $\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, v_0\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, x_0$, also insbesondere $\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, v_0\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)$, woraus sich (II.64) wegen $\mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, \sigma_{u_0,v_0}(a)$ ergibt.

Wir zeigen nun

$$|A| \geq 2 \tag{II.65}$$

indem wir zeigen, dass für jeden Strahl s mit $\mathcal{T}_5\, u_0\, v_0\, w_0\, x_0\, s$ der Strahl $\sigma_{u_0,v_0}(s)$ in A liegt; daraus ergibt sich (II.65), da σ_{u_0,v_0} injektiv ist und es mehr als einen Strahl s mit $\mathcal{T} u_0\, v_0\, w_0\, x_0\, s$ gibt (wiederholtes Anwenden von Satz 129). Sei also ein solcher Strahl s gegeben und $z := \sigma_{u_0,v_0}(s)$. Dann gilt auch $\sigma_{u_0,v_0}(z) = s$ (Satz 126) und mithin $\mathcal{T}_6\, u_0\, z\, v_0\, w_0\, x_0\, s$ wegen (II.62); mit (II.63) folgt $\mathcal{T}_7\, u_0\, z\, v_0\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(s)\, x_0\, s$ und damit insbesondere

$$\mathcal{T} u_0\, z\, v_0\, w_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(s)\, \sigma_{u_0,v_0}(z),$$

womit $z \in A$ gezeigt ist.

Ähnlich zeigen wir

$$|B| \geq 2 \tag{II.66}$$

indem wir zeigen, dass $\sigma_{u_0,v_0}(s) \in B$ für jeden Strahl s mit $\mathcal{T} u_0\, v_0\, s\, w_0$. Sei also s ein solcher Strahl und $a \in A$ beliebig. Wegen (II.64) gilt dann $\mathcal{T}_7\, u_0\, a\, v_0\, s\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)\, \sigma_{u_0,v_0}(a)$, insbesondere

$$\mathcal{T} u_0\, v_0\, s\, \sigma_{u_0,v_0}(a).$$

Anwenden der Involution σ_{u_0,v_0} ergibt

$$\mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(s)\, a$$

(siehe Satz 128 und Korollar 120) und mithin $\mathcal{T} u_0\, a\, \sigma_{u_0,v_0}(s)\, v_0$ per Symmetrie. Da $a \in A$ beliebig war, ist damit $\sigma_{u_0,v_0}(s) \in B$ gezeigt.

Sind $a \in A \backslash z_1$ und $b \in B \backslash z_1$ beliebig, so gilt $\mathcal{T} u_0\, a\, v_0\, w_0$ und $\mathcal{T} u_0\, a\, b\, v_0$ und mithin $\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, b\, v_0\, w_0$; mit (II.61) folgt $\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, z_1\, b\, v_0\, w_0$ und wegen der Voraussetzung $\mathcal{T} u_0\, v_0\, w_0\, x_0$ schließlich

$$\mathcal{T}_7\, u_0\, a\, z_1\, b\, v_0\, w_0\, x_0.$$

Wegen (II.65) und (II.66) ergibt sich insbesondere

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, z_1\, v_0\, w_0\, x_0 \tag{II.67}$$

sowie

$$\mathcal{T} u_0\, a\, z_1\, v_0, \qquad \forall a \in A \backslash z_1 \tag{II.68}$$

und

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, z_1\, b\, v_0\, w_0, \qquad \forall b \in B \backslash z_1. \tag{II.69}$$

Wir zeigen nun mit Hilfe von Lemma 133, dass z_1 ein Häufungspunkt von B ist. Sei also s ein beliebiger Strahl sodass $\mathcal{T} v_0\, s\, z_1\, u_0$. Wähle b gemäß Korollar 129 sodass $\mathcal{T}_5\, v_0\, s\, b\, z_1\, u_0$. Dann gilt per Symmetrie auch $\mathcal{T}_5\, u_0\, z_1\, b\, s\, v_0$ und somit gemäß (II.68) $\mathcal{T}_6\, u_0\, a\, z_1\, b\, s\, v_0$ für alle $a \in A \backslash z_1$, insbesondere also

$$\mathcal{T} u_0\, a\, b\, v_0, \quad \forall a \in A.$$

Damit ist $b \in B$. Wegen $\mathcal{T} v_0\, s\, b\, z_1$ folgt mit Lemma 133, dass z_1 Häufungspunkt von B ist.

Wir zeigen nun $z_1 \in \bar{A}$. Sei $z_1 \notin \bar{A}$ angenommen. Dann ist z_1 auch kein Häufungspunkt von A und gemäß Lemma 133 folgt die Existenz eines Strahls s mit $\mathcal{T} u_0\, s\, z_1\, v_0$ sodass $\neg \mathcal{T} u_0\, s\, a\, z_1$ für alle $a \in A$. Gemäß Satz 113 gilt dann

$$a = s \quad \text{oder} \quad \mathcal{T} u_0\, a\, s\, z_1, \qquad \forall a \in A,$$

denn der Fall $\mathcal{T} u_0\, s\, z_1\, a$ ist wegen $\mathcal{T} u_0\, s\, z_1\, v_0$ und (II.68) nach Korollar 119 ausgeschlossen (beachte $u_0, z_1 \notin A$). Ist nun b mit $\mathcal{T}_5\, u_0\, s\, b\, z_1\, v_0$ gemäß Korollar 129, so folgt

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, a\, b\, z_1\, v_0, \qquad \forall a \in A,$$

also insbesondere $b \in B \backslash z_1$ und $\mathcal{T} u_0\, b\, z_1\, v_0$ (beachte $A \neq \emptyset$), im Widerspruch zu (II.69).

Wir zeigen nun $z_2 = \sigma_{u_0,v_0}(z_1) = \sigma_{w_0,x_0}(z_1)$, womit dann die gesuchten z_1, z_2 gefunden sind. Angenommen $\sigma_{u_0,v_0}(z_1) \neq \sigma_{w_0,x_0}(z_1)$. Gemäß (II.63) gilt $\mathcal{T} z_1\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, x_0$ (beachte $z_1 \neq w_0, x_0$ gemäß (II.67)) und zusammen mit (II.67) impliziert dies

$$\mathcal{T}_6\, u_0\, z_1\, v_0\, w_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, x_0.$$

Insbesondere gilt $\mathcal{T} u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)$ und da gemäß (II.62) auch $\mathcal{T} u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)$ (beachte $z_1 \neq u_0, v_0$ gemäß (II.67)), folgt mit Satz 117:

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1) \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_5\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1).$$

Wählen wir mit Satz 129 z_0 sodass $\mathcal{T} z_1\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)$ und mithin per Symmetrie auch $\mathcal{T} z_1\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)$, so folgt

$$\mathcal{T}_6\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1) \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_6\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1).$$

Wir zeigen, dass beide Fälle zu einem Widerspruch führen.

Fall $\mathcal{T}_6\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)$: Dann ist $\sigma_{u_0,v_0}(z_1) \in (v_0 {}^{u_0}\, z_0)$ und $\sigma_{w_0,x_0}(z_1) \in (u_0 {}^{v_0}\, z_0)$. Da σ_{u_0,v_0} und σ_{w_0,x_0} stetig sind (siehe Satz 132), gibt es somit Umgebungen U, U' von z_1 sodass

$$\sigma_{u_0,v_0}\lceil U \rfloor \subseteq (v_0 {}^{u_0}\, z_0) \quad \text{und} \quad \sigma_{w_0,x_0}\lceil U' \rfloor \subseteq (u_0 {}^{v_0}\, z_0).$$

Da auch $U \cap U'$ Umgebung von z_1 ist und $z_1 \in \bar{A}$, ist $A \cap U \cap U' \neq \emptyset$. Für $a \in A \cap U \cap U'$ gilt aber

$$\mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(a)\, z_0 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{T} u_0\, v_0\, z_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a)$$

und mithin

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, v_0\, \sigma_{u_0,v_0}(a)\, z_0\, \sigma_{w_0,x_0}(a),$$

im Widerspruch zur Definition von A.

Fall $\mathcal{T}_6\, u_0\, z_1\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(z_1)\, z_0\, \sigma_{u_0,v_0}(z_1)$: Dann ist $\sigma_{u_0,v_0}(z_1) \in (u_0 {}^{v_0}\, z_0)$ und $\sigma_{w_0,x_0}(z_1) \in (v_0 {}^{u_0}\, z_0)$ und analog wie oben folgt die Existenz von Umgebungen U, U' von z_1 mit

$$\sigma_{u_0,v_0}\lceil U \rfloor \subseteq (u_0 {}^{v_0}\, z_0) \quad \text{und} \quad \sigma_{w_0,x_0}\lceil U' \rfloor \subseteq (v_0 {}^{u_0}\, z_0).$$

Da z_1 Häufungspunkt von B ist, gibt es einen Strahl $b \in B \cap U \cap U'$. Für diesen gilt

$$\mathcal{T} u_0\, v_0\, z_0\, \sigma_{u_0,v_0}(b) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(b)\, z_0$$

und damit

$$\mathcal{T}_5\, u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(b)\, z_0\, \sigma_{u_0,v_0}(b).$$

Insbesondere gilt $\mathcal{T} u_0\, v_0\, \sigma_{w_0,x_0}(b)\, \sigma_{u_0,v_0}(b)$ und da nach (II.69) auch $\mathcal{T} u_0\, b\, v_0\, w_0$ (im Fall $b = z_1$ gilt dies nach (II.67)), folgt $b \in A$. Per Definition von B folgt $\mathcal{T} u_0\, b\, b\, v_0$, ein Widerspruch. ■

Es folgt die angekündigte Charakterisierung der Trennungsbeziehung:

136 Theorem

Es gilt $\mathcal{T}\, u\, v\, w\, x$ *gdw.* $u\, v\, w\, x$ *sind distinkt und liegen cozyklisch, und es gibt keine Strahlen* z_1, z_2 *sodass zugleich* $\mathcal{H}\, u\, z_1\, w\, z_2$ *und* $\mathcal{H}\, v\, z_1\, x\, z_2$*.*

Beweis: Zu „⇒": Es gelte $\mathcal{T}\, u\, v\, w\, x$. Dann ist klar, dass $u\, v\, w\, x$ distinkt sind und cozyklisch liegen. Angenommen es gibt Strahlen z_1, z_2 sodass $\mathcal{H}\, u\, z_1\, w\, z_2$ und $\mathcal{H}\, v\, z_1\, x\, z_2$, also per Symmetrie (Korollar 126) auch

$$\mathcal{H}\, z_1\, u\, z_2\, w \quad \text{und} \quad \mathcal{H}\, z_1\, v\, z_2\, x. \tag{II.70}$$

Mit Korollar 127 folgt

$$\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, w \quad \text{und} \quad \mathcal{T}\, z_1\, v\, z_2\, x.$$

Insbesondere liegen $u\, v\, w\, x\, z_1\, z_2$ cozyklisch (weil in $\mathcal{L}^2(z_1\, z_2)$) und sind distinkt. Mit Korollar 119 (und Symmetrie) folgt, dass entweder $\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, x$ oder $\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, v$ gelten muss. Aus Symmetriegründen können wir o.E. letzteres annehmen (wegen $\mathcal{H}\, v\, z_1\, x\, z_2 \Leftrightarrow \mathcal{H}\, x\, z_1\, v\, z_2$ können ansonsten v, x vertauscht werden), d.h.

$$\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, v.$$

Wegen $\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, w$ folgt

$$\mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, v\, w \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, w\, v$$

gemäß Satz 117. Wir zeigen, dass beide Fälle zu einem Widerspruch führen.

Fall $\mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, v\, w$: Dann gilt insbesondere

$$\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, v\, w.$$

Anwenden von σ_{z_1,z_2} ergibt wegen (II.70)

$$\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, x\, u$$

(siehe Korollar 120), also per Symmmetrie auch

$$\mathcal{T}\, z_1\, u\, x\, z_2.$$

Zusammen mit $\mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, v\, w$ impliziert dies $\mathcal{T}_6\, z_1\, u\, x\, z_2\, v\, w$, also insbesondere

$$\mathcal{T}\, u\, x\, v\, w,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathcal{T}\, u\, v\, w\, x$ (siehe Satz 113).

Fall $\mathcal{T}\, z_1\, u\, z_2\, w\, v$: Ähnlich wie eben ergibt Anwenden von σ_{z_1,z_2}

$$\mathcal{T}\, z_1\, z_2\, u\, x$$

und damit per Symmetrie

$$\mathcal{T}\, z_1\, x\, u\, z_2,$$

was zusammen mit $\mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, w\, v$

$$\mathcal{T}\, x\, u\, w\, v$$

impliziert, mithin per Symmetrie $\mathcal{T}\, u\, w\, v\, x$, im Widerspruch zu $\mathcal{T}\, u\, v\, w\, x$.

Zu „⇐": Nach Voraussetzung und Lemma 135 gilt weder

$$\mathcal{T}\, u\, w\, v\, x \quad \text{noch} \quad \mathcal{T}\, u\, w\, x\, v$$

(beachte im letzteren Fall die Symmetrie $\mathcal{T}\, x\, z_1\, v\, z_2 \Rightarrow \mathcal{T}\, v\, z_1\, x\, z_2$). Da $u\, v\, w\, x$ distinkt sind und cozyklisch liegen, folgt mit Satz 113:

$$\mathcal{T}\, u\, v\, w\, x.$$

■

II.8. Der Fundamentalsatz und die Körperstruktur des Zyklus

137 Metalemma

Seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ zwei Strahlenräume mit Trennungsbeziehungen $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{T}'$ und Harmonischen Relationen $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$. Seien ferner Z ein Zyklus in $\mathcal{R}$ und Z' ein Zyklus in $\mathcal{R}'$ und

$$\pi_1, \pi_2 : Z \to Z'$$

zwei $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismen, welche in drei distinkten Strahlen von Z übereinstimmen. Dann gilt $\pi_1 = \pi_2$.

Beweis: Das Strahlengebilde $D := \operatorname{dom}(\pi_1 \cap \pi_2)$ enthält nach Voraussetzung mindestens drei Strahlen und ist wegen der Eindeutigkeit des harmonisch Konjugierten (Satz 124) harmonisch abgeschlossen, liegt also nach Lemma 134 dicht in Z liegt. Angenommen $\pi_1 \neq \pi_2$. Da dann auch $\pi_1^{-1} \neq \pi_2^{-1}$, gibt es distinkte Strahlen $z_1, z_2 \in Z$ mit $\pi_1(z_1) = \pi_2(z_2)$. Sei $u \in D \backslash z_1, z_2$. Seien ferner $v \in (z_1 \,{}^u\, z_2) \cap D$ und $w \in (z_2 \,{}^u\, v) \cap D$ (existieren, da D dicht in Z). Dann gilt

$$\mathcal{T} z_1\, u\, z_2\, v \tag{II.71}$$

und

$$\mathcal{T} z_2\, u\, v\, w. \tag{II.72}$$

Als $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus ist $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ nach Theorem 136 auch ein $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-Isomorphismus. Anwenden desselben auf (II.72) ergibt wegen $u, v, w \in D$

$$\mathcal{T} z_1\, u\, v\, w$$

und zusammen mit (II.71) impliziert dies $\mathcal{T}_5\, z_1\, u\, z_2\, v\, w$, mithin per Symmetrie

$$\mathcal{T} z_2\, v\, w\, u.$$

Dies steht aber (nach Satz 113) im Widerspruch zu (II.72). ■

138 Korollar

Für eine Abbildung $\pi : Y \to Z$ zwischen zwei Zyklen Y und Z sind äquivalent:

1. *π ist Projektivität.*
2. *π ist $\mathcal{Q}$-$\mathcal{Q}$-Isomorphismus.*
3. *π ist $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus.*

Beweis: Die Implikation „1 $\Rightarrow$ 2“ ist die Aussage von Korollar 112 und die Implikation „2 $\Rightarrow$ 3“ ist trivial. Zu „3 $\Rightarrow$ 1“: Seien $u, v, w \in Y$ drei distinkte Strahlen und sei π' gemäß Theorem 102 mit

$$u\, v\, w \overset{\pi'}{\barwedge} \pi(u)\, \pi(v)\, \pi(w).$$

Gemäß der bereits bewiesenen Implikation „1 $\Rightarrow$ 3“ ist π' ein $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus. Mit Metalemma 137 folgt $\pi = \pi'$. ■

139 Korollar (Fundamentalsatz)

Seien u, v, w und u', v', w' jeweils drei distinkte cozyklische Strahlen. Dann gibt es genau eine Projektivität π sodass

$$u\,v\,w \overset{\pi}{\barwedge} u'\,v'\,w'.$$

Beweis: Die Existenz einer solchen Projektivität ist Gegenstand von Theorem 102. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus Korollar 138 und Metalemma 137. ■

140 Korollar

Seien u, v distinkte Strahlen eines Zyklus Z und sei π mit

$$u\,v \overset{\pi}{\barwedge} v\,u.$$

Dann ist $\pi : Z \to Z$ eine Involution.

Beweis: Sei $w \in Z$ beliebig und $x := \pi(w)$. Zu zeigen ist $\pi(x) = w$. In den Fällen $w = u$ oder $w = v$ (äquivalent: $x = v$ oder $x = u$) ist das Voraussetzung und auch der Fall $w = x$ ist trivial. Seien also u, v, w, x distinkt angenommen. Dann folgt mit Satz 101 die Existenz einer Projektivität π' mit

$$u\,v\,w\,x \overset{\pi'}{\barwedge} v\,u\,x\,w.$$

Gemäß Korollar 139 ergibt sich $\pi = \pi'$ und mithin $\pi(x) = w$. ■

Eine Projektivität $\pi : Z \to Z$ von einem Zyklus Z in sich heißt **parabolisch**, falls sie genau ein Fixelement hat.[11] Wir schreiben

$x_1 \dots x_n \overset{\pi}{\barwedge}_z y_1 \dots y_n$	für:	π ist parabolische Projektivität mit $z\,x_1 \dots x_n \overset{\pi}{\barwedge} z\,y_1 \dots y_n$

und

$x_1 \dots x_n \barwedge_z y_1 \dots y_n$	für:	es gibt eine parabolische Projektivität π mit $x_1 \dots x_n \overset{\pi}{\barwedge}_z y_1 \dots y_n$.

141 Satz

Seien $u_i\,v_1\,w_k$ distinkt für $i, k \in \{1, 2\}$. Dann gilt

1. $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_2\,v_2\,w_2} \Leftrightarrow u_1\,u_2\,v_1\,w_1 \barwedge u_1\,u_2\,w_2\,v_2,$ *falls* $u_1 \neq u_2$.
2. $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_1\,v_2\,w_2} \Leftrightarrow v_1\,w_1 \barwedge_{u_1} w_2\,v_2.$

Beweis: Wir zeigen beide Aussagen zugleich, indem wir zunächst $u_1 = u_2$ zulassen.

Zu „⇒“: Es gelte $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,w_1}_{u_2\,v_2\,w_2}$. Wähle mit Satz 105 Strahlen t, u, v, w sodass $u_1\,v_1\,w_1\,u_2\,v_2\,w_2$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Die beiden Zyklen $Y := \mathcal{L}^2(v_1\,w_1)$ und $Z := \mathcal{L}^2(v\,w)$ sind nach Satz 66 im Plexus $\mathcal{L}(t\,v\,w)$ enthalten und enthalten jeweils weder t noch u (siehe Satz 104). Mit Satz 94 folgt, dass die Abbildung $\pi_1 : Y \to Z$ mit Graph

$$\{\langle y, z\rangle \in Y \times Z\,;\ y\,t\,z \text{ liegen cozyklisch}\}$$

und die Abbildung $\pi_2 : Z \to Y$ mit Graph

$$\pi_2 := \{\langle z, y\rangle \in Z \times Y\,;\ z\,u\,y \text{ liegen cozyklisch}\}$$

[11]d.h. $\exists z_0 \in Z \forall z \in Z : \pi(z) = z \Leftrightarrow z = z_0$.

Projektivitäten sind. Sei $u' := \pi_1(u_1)$, sodass also $u_1\, t\, u'$ cozyklisch liegen. Mit $t\, u\, u_1$ liegen dann auch $u'\, u\, u_1$ cozyklisch, d.h. $\pi_2(u') = u_1$. Es folgt (siehe Abbildung II.28)

$$u_1\, u_2\, v_1\, w_1 \overset{\pi_1}{\barwedge} u'\, u_2\, v\, w \overset{\pi_2}{\barwedge} u_1\, u_2\, w_2\, v_2$$

und somit für $\pi := \pi_2 \circ \pi_1$

$$u_1\, u_2\, v_1\, w_1 \overset{\pi}{\barwedge} u_1\, u_2\, w_2\, v_2.$$

Wir zeigen noch, dass π im Fall $u_1 = u_2$ parabolisch ist, d.h. außer u_1 kein Fixelement hat. Sei dazu y ein Fixelement von π und sei $z := \pi_1(y)$, sodass also $y\, t\, z$ und $z\, u\, y$ cozyklisch liegen (letzteres wegen $\pi_2(z) = \pi(y) = y$). Angenommen $y \neq u_1$. Dann ist auch $y \neq z$, denn andernfalls wäre $Y = \mathcal{L}^2(y\, u_1) = \mathcal{L}^2(u_2\, z) = Z$ was unmöglich ist, da $v \notin Y$ nach Satz 104. Mit $y\, t\, z$ und $z\, u\, y$ und $t\, u\, u_1$ liegen daher auch $y\, z\, t\, u\, u_1$ cozyklisch, womit $u \in \mathcal{L}^2(y\, u_1) = Y$, ein Widerspruch.

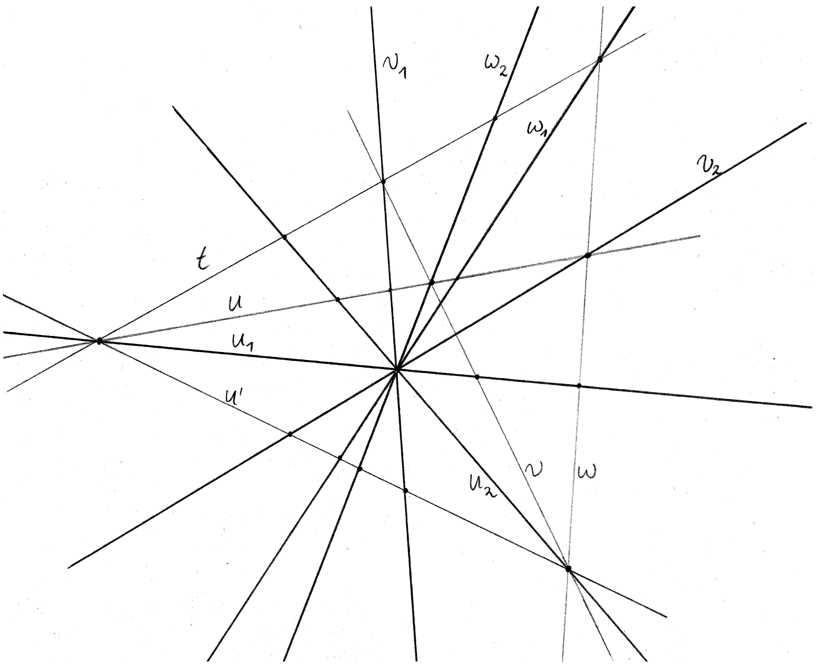


Abbildung II.28.

Zu „⇐“: Es gelte die Voraussetzung, d.h. es gebe eine (im Fall 2. parabolische) Projektivität π sodass

$$u_1\, u_2\, v_1\, w_1 \overset{\pi}{\barwedge} u_1\, u_2\, w_2\, v_2.$$

Wähle mit Lemma 106 Strahlen t, v, u, w und u_2' sodass $v_1\, u_1\, w_1\, v_2\, u_2'\, w_2$ mit $t\, v\, u\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden (die im Lemma vorausgesetzte Existenz der Strahlen t und u ist trivial). Gemäß Satz 109 gilt dann $\mathcal{Q}^{v_1\, u_1\, w_1}_{v_2\, u_2'\, w_2}$ und mithin per Symmetrie (Satz 108) auch

$$\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_1}_{u_2'\, v_2\, w_2}.$$

Wir zeigen $u_2 = u_2'$, womit dann die Behauptung gezeigt ist.

Gemäß der bereits gezeigten Implikation „⇒“ folgt die Existenz einer (im Fall $u_1 = u_2'$ parabolischen) Projektivität π' mit:

$$u_1\, u_2'\, v_1\, w_1 \overset{\pi'}{\barwedge} u_1\, u_2'\, w_2\, v_2.$$

Gemäß Korollar 139 folgt $\pi = \pi'$ (beachte, dass aufgrund der Injektivität von π mit $u_1\, v_2\, w_1$ auch $u_1\, w_2\, v_2$ distinkt sind) und mithin

$$u_1\, u_2\, u_2'\, v_1\, w_1 \overset{\pi}{\barwedge} u_1\, u_2\, u_2'\, w_2\, v_2.$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $u_1 \neq u_2$ gemäß 1. Ist auch $u_1 \neq u_2'$, so muss $u_2 = u_2'$ gelten, denn sonst wären u_1, u_2, u_2' drei distinkte Fixelemente von π und mithin π die Identität auf $\mathcal{L}^2(u_1\, v_1)$ gemäß Korollar 139, was wegen $\pi(v_1) = w_2 \neq v_1$ nicht der Fall ist. Aber auch im Fall $u_1 = u_2'$ ist $u_2' = u_2$, da $\pi = \pi'$ in diesem Fall parabolisch ist und u_2, u_2' als Fixelemente hat. Genauso folgt $u_2 = u_2'$ in 2., wo ja π als parabolisch vorausgesetzt wird. ■

142 Korollar

Seien u_1, v_1, w_1, u_2, w_2 cozyklische Strahlen sodass $u_i\, v_1\, w_j$ distinkt sind für $i, j \in \{1, 2\}$. Dann gibt es genau einen Srahl v_2 sodass $\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_1}_{u_2\, v_2\, w_2}$.

Beweis: Der Fall $u_1 = u_2$ wurde bereits in Satz 111 behandelt. Sei also $u_1 \neq u_2$ angenommen. Dann sind $u_1\, u_2\, v_1$ und $u_1\, u_2\, w_2$ jeweils distinkt und gemäß Korollar 139 gibt es genau eine Projektivität π mit

$$u_1\, u_2\, v_1 \overset{\pi}{\barwedge} u_1\, u_2\, w_1.$$

Also ist $v_2 := \pi(w_1)$ der einzige Strahl mit

$$u_1\, u_2\, v_1\, w_1 \barwedge u_1\, u_2\, w_2\, v_2.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit Satz 141.1. ■

143 Satz

Sind u, v, w distinkt und cozyklisch, so gibt es genau eine parabolische Projektivität π mit

$$v \overset{\pi}{\barwedge}_u w. \tag{II.73}$$

Beweis: Sei $x := \sigma_{u,w}(v)$. Dann gilt $\mathcal{Q}^{u\, v\, w}_{u\, x\, w}$ und mit Satz 141.2 folgt die Existenz einer parabolischen Projektivität π mit

$$u\, v\, w \overset{\pi}{\barwedge} u\, w\, x,$$

also insbesondere (II.73). Ist π' eine weitere parabolische Projektivität mit $v \overset{\pi'}{\barwedge}_u w$, so folgt für $x' := \pi'(w)$:

$$v\, w \overset{\pi'}{\barwedge}_u w\, x'$$

und mithin $\mathcal{Q}^{u\ v\ w}_{u\, x'\, w}$ gemäß Satz 141.2, also $x' = \sigma_{u,w}(v) = x$. Es gilt also auch

$$u\, v\, w \overset{\pi'}{\barwedge} u\, w\, x$$

und somit $\pi = \pi'$ gemäß Korollar 139. ■

Der folgende Satz bringt die Assoziativität von durch $\mathcal{Q}$ gegebenen Körperoperationen zum Ausdruck, wie sich in Theorem 145 zeigen wird:

144 Satz

$$\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, a}_{u_2\, x\, b} \wedge \mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, b}_{u_2\, y\, c} \wedge \mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, x}_{u_2\, z\, c} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = a & \textit{falls } v_1 = y \\ \mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, a}_{u_2\, z\, y} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $v_1 = y$: Aus der Voraussetzung $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,a}_{u_2\,x\,b}$ folgt per Symmetrie (Satz 108) $\mathcal{Q}^{u_1\,x\,b}_{u_2\,v_1\,a}$. Mit Satz 141 folgt

$$u_1\,u_2\,x\,b \;\barwedge\; u_1\,u_2\,a\,v_1, \quad \text{im Fall } u_1 = u_2 \text{ sogar:} \quad x\,b \;\barwedge_{u_1}\; a\,v_1 \tag{II.74}$$

(beachte, dass $u_i\,x\,b$ und $u_i\,x\,a$ für $i \in \{1,2\}$ distinkt sind). Ähnlich ergibt sich aus den Voraussetzungen $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,b}_{u_2\,v_1\,c}$ und $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,x}_{u_2\,z\,c}$

$$u_1\,u_2\,v_1\,b \;\barwedge\; u_1\,u_2\,c\,v_1 \quad \text{und} \quad u_1\,u_2\,v_1\,x \;\barwedge\; u_1\,u_2\,c\,z,$$

im Fall $u_1 = u_2$ sogar:

$$v_1\,b \;\barwedge_{u_1}\; c\,v_1 \quad \text{und} \quad v_1\,x \;\barwedge_{u_1}\; c\,z.$$

Gemäß Korollar 139 bzw. im Fall $u_1 = u_2$ gemäß Satz 143 müssen beide Projektivitäten übereinstimmen (beachte $v_1 \neq u_1, u_2$), sodass also insbesondere

$$u_1\,u_2\,x\,b \;\barwedge\; u_1\,u_2\,z\,v_1, \quad \text{bzw. im Fall } u_1 = u_2\text{:} \quad x\,b \;\barwedge_{u_1}\; z\,v_1.$$

Zusammen mit (II.74) impliziert dies $z = a$ (wiederum gemäß Korollar 139 bzw. Satz 143; beachte hier $b \neq u_1, u_2$).

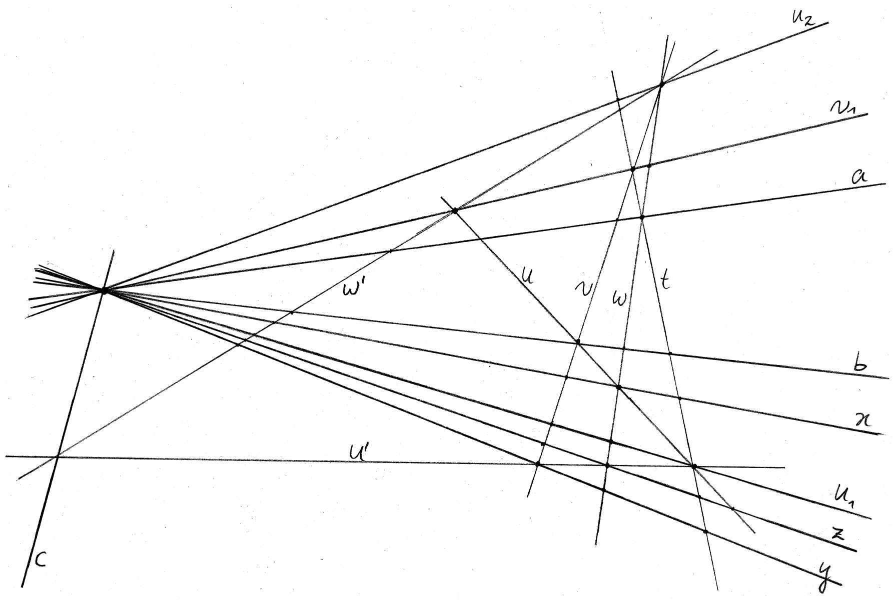


Abbildung II.29. Der Fall $v_1 \neq y$.

Nun zum Fall $v_1 \neq y$ (siehe Abbildung II.29): Wähle mit Satz 109 Strahlen t, u, v, w sodass $u_1\,v_1\,a\,u_2\,x\,b$ mit $t\,u\,v\,w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Dann liegen

$$\begin{matrix} t\,u\,u_1 & t\,v\,v_1 & t\,w\,a \\ v\,w\,u_2 & u\,w\,x & u\,v\,b \end{matrix} \quad \text{cozyklisch}$$

und neben $t\,u_1\,a$ liegen nach Satz 104 auch $u\,u_1\,v_1$ und $u\,u_1\,x$ cosimplizial und v ist von t, u, v_1, u_2, b verschieden. Aus der Voraussetzung $\mathcal{Q}^{u_1\,v_1\,b}_{u_2\,y\,c}$ folgt per Symmetrie

$$\mathcal{Q}^{u_1\,b\,v_1}_{u_2\,c\,y}. \tag{II.75}$$

Insbesondere sind $u_i\,b\,v_1$ und $u_i\,b\,y$ distinkt für $i \in \{1,2\}$ und mit Lemma 106 folgt die Existenz von Strahlen u', w' und c' sodass $u_1\,b\,v_1\,u_2\,c'\,y$ mit $u\,u'\,v\,w'$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration bilden. Dann liegen

$$\begin{matrix} u\,u'\,u_1 & u\,v\,b & u\,w'\,v_1 \\ v\,w'\,u_2 & u'\,w'\,c' & u'\,v\,y \end{matrix} \quad \text{cozyklisch}$$

und nach Satz 104 ist w' von u, v_1 verschieden. Andererseits folgt $\mathcal{Q}^{u_1\ b\ v_1}_{u_2\ c'\ y}$ mit Satz 109 und damit $c' = c$ wegen (II.75) gemäß Korollar 142.

Wähle nun mit Satz 70 einen Strahl z' sodass $u_1\, v_1\, z'$ und $u'\, w\, z'$ cozyklisch liegen. Dann liegen

$$\begin{matrix} u\, u'\, u_1 & u\, w'\, v_1 & u\, w\, x \\ w'\, w\, u_2 & u'\, w\, z' & u'\, w'\, c \end{matrix} \quad \text{cozyklisch}$$

(beachte $c' = c$ und dass wegen $v \neq u_2$ mit $v\, w\, u_2$ und $v\, w'\, u_2$ auch $w'\, w\, u_2$ cozyklisch liegen), d.h. $u_1\, v_1\, x\, u_2\, z'\, c$ erfüllen mit $u\, u'\, w'\, w$ Bedingung Q3$'$ von Lemma 105. Wegen $\mathcal{Q}^{u_1\ v_1\ x}_{u_2\ z\ c}$ sind $u_i\, v_1\, x$ und $u_i\, v_1\, c$ jeweils distinkt für $i = 1, 2$, womit auch Q1$'$ erfüllt ist. Bedingung Q2$'$ wurde bereits festgestellt: $u\, u_1\, x$ liegen cosimplizial und $u \neq w' \neq v_1$. Also bilden $u_1\, v_1\, x\, u_2\, z'\, c$ mit $u\, u'\, w'\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration, mit Satz 109 folgt $\mathcal{Q}^{u_1\ v_1\ x}_{u_2\ z'\ c}$ und mithin $z' = z$ gemäß Korollar 142. Es liegen

$$\begin{matrix} t\, u'\, u_1 & t\, v\, v_1 & t\, w\, a \\ v\, w\, u_2 & u'\, w\, z & u'\, v\, y \end{matrix} \quad \text{cozyklisch}$$

(beachte $z' = z$ und dass wegen $u \neq u_1$ mit $t\, u\, u_1$ und $u\, u'\, u_1$ auch $t\, u'\, u_1$ cozyklisch liegen), d.h. $u_1\, v_1\, a\, u_2\, z\, y$ erfüllen mit $t\, u'\, v\, w$ Bedingung Q3$'$ von Lemma 105. Wegen $\mathcal{Q}^{u_1\ v_1\ a}_{u_2\ x\ b}$ und $\mathcal{Q}^{u_1\ v_1\ b}_{u_2\ y\ c}$ und $v_1 \neq y$ sind $u_i\, v_1\, a$ und $u_i\, v_1\, y$ jeweils distinkt für $i = 1, 2$, womit auch Q1$'$ erfüllt ist. Bedingung Q2$'$ wurde bereits festgestellt: $t\, u_1\, a$ liegen cosimplizial und $t \neq v \neq v_1$. Also bilden $u_1\, v_1\, a\, u_2\, z\, y$ mit $t\, u'\, v\, w$ eine $\mathcal{Q}$-Konfiguration und mit Satz 109 folgt $\mathcal{Q}^{u_1\ v_1\ a}_{u_2\ z\ y}$. ∎

Seien Z ein Zyklus und $z_0, z_1, z_\infty \in Z$ distinkt. Für $z \in Z \backslash z_\infty$ bezeichne

$\alpha_z^{z_\infty, z_0}$ die eindeutig bestimmte parabolische Projektivität π mit $z_0 \overset{\pi}{\barwedge}_{z_\infty} z$ (Satz 143)

und für $z \in Z \backslash z_\infty, z_0$

$\mu_z^{z_\infty, z_0, z_1}$ die eindeutig bestimmte Projektivität π mit $z_\infty\, z_0\, z_1 \overset{\pi}{\barwedge} z_\infty\, z_0\, z$ (Korollar 139).

Ferner setzen wir

$$\mu_{z_0}^{z_\infty, z_0, z_1} : Z \to Z,\ z \mapsto z_0.$$

145 Theorem

Es seien z_0, z_1, z_∞ distinkte cozyklische Strahlen,

$$K := \mathcal{L}^2(z_0\, z_\infty) \backslash z_\infty,$$

$$+ : K \times K \to K,\ \langle a, b \rangle \mapsto \alpha_b^{z_\infty, z_0}(a) \quad \textit{und} \quad \cdot : K \times K \to K,\ \langle a, b \rangle \mapsto \mu_b^{z_\infty, z_0, z_1}(a).$$

Dann ist

$$\langle \langle K, +, \cdot, z_0, z_1 \rangle, (z_0\ {}_{z_1}\ z_\infty) \rangle$$

ein vollständig angeordneter Körper.[12] *Für $a, b \in K$ gilt dabei:*

$$a + b = \begin{cases} a & \textit{falls } b = z_0 \\ b & \textit{falls } a = z_0 \\ \iota s\, \mathcal{Q}^{z_\infty\ z_0\ a}_{z_\infty\ s\ b} & \textit{sonst} \end{cases} \tag{II.76}$$

und

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \textit{falls } b = z_1 \\ b & \textit{falls } a = z_1 \\ z_0 & \textit{falls } a = z_0 \textit{ oder } b = z_0 \\ \iota p\, \mathcal{Q}^{z_\infty\ z_1\ a}_{z_0\ p\ b} & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{II.77}$$

[12]Siehe Anhang.

Beweis:

1. Wir zeigen zunächst, dass $\langle K, +, \cdot, z_0, z_1 \rangle$ ein Körper ist. Seien dazu $a, b \in K$ beliebig. Dann gilt für $s := a + b$ und $p := a \cdot b$:

$$z_0\, a \;\overline{\wedge}_{z_\infty}\; b\, s \qquad \text{und im Fall } b \neq z_0\text{:} \qquad z_\infty\, z_0\, z_1\, a \;\overline{\wedge}\; z_\infty\, z_0\, b\, p. \tag{II.78}$$

Wegen $a \neq z_\infty$ ist auch $s \neq z_\infty$ und $p \neq z_\infty$, sodass also $a + b$ und $a \cdot b$ in K liegen. Es gilt $s = a$ im Fall $b = z_0$ bzw. $p = a$ im Fall $b = z_1$, denn nach Korollar 143 bzw. Korollar 139 sind die Projektivitäten in (II.78) in diesem Fall die Identität auf Z. Mit Satz 141 und Korollar 142 folgt (II.76) und (II.77).

An (II.76) und (II.77) lässt sich unmittelbar ablesen, dass z_0 neutrales Element bezüglich $+$ und z_1 neutrales Element bezüglich $\cdot$ ist. Die Kommutativität der beiden Operationen ergibt sich aus der Symmetrie

$$\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_1}_{u_2\, v_2\, w_2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_2}_{u_2\, v_2\, w_1}$$

(siehe Satz 108). Die Existenz von Rechtsinversen ergibt sich jeweils aus Korollar 142 unter Berücksichtigung der Symmetrie

$$\mathcal{Q}^{u_1\, v_1\, w_1}_{u_2\, v_2\, w_2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Q}^{u_1\, w_1\, v_1}_{u_2\, w_2\, v_2}.$$

Zur Assoziativität der Multiplikation: Seien $a, b, c \in K$ beliebig, $x := a \cdot b$ und $y := b \cdot c$. Dann ist zu zeigen

$$x \cdot c = a \cdot y. \tag{II.79}$$

In den Fällen $a = z_0$ oder $b = z_0$ oder $c = z_0$ reduziert sich (II.79) jeweils auf die triviale Gleichung $z_0 = z_0$ (Multiplikation mit z_0 ergibt stets z_0). Auch die Fälle $a = z_1$ oder $b = z_1$ oder $c = z_1$ sind trivial. Seien also a, b, c von z_0 und z_1 verschieden angenommen. Dann gilt nach (II.77)

$$\mathcal{Q}^{z_\infty\, z_1\, a}_{z_0\;\; x\;\, b} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^{z_\infty\, z_1\, b}_{z_0\;\; y\;\, c}.$$

Insbesondere sind auch x und y von z_0 verschieden. Im Fall $x = y$ ergibt sich aufgrund der Kommutativität der Multiplikation $a = c$ (durch Multiplikation mit dem multiplikativen Rechtsinversen von b) und damit (II.79). Wir können also o.E. $x \neq z_1$ annehmen (andernfalls können a, c und damit x, y vertauscht werden, wiederum aufgrund der Kommutativität). Dann gilt nach (II.77) für $z = x \cdot c$

$$\mathcal{Q}^{z_\infty\, z_1\, x}_{z_0\;\; z\;\, c}$$

und mit Satz 144 folgt $z = a$ im Fall $z_1 = y$ und $\mathcal{Q}^{z_\infty\, z_1\, a}_{z_0\;\; z\;\, y}$ sonst. In beiden Fällen ergibt sich $a \cdot y = z$ und damit (II.79).

Die Assoziativität der Addition ergibt sich völlig analog aus (II.76) und Satz 144, abgesehen von der vereinfachenden Tatsache, dass der Fall $z_1 \in \{a, b, c, x, y\}$ nicht besonders behandelt werden muss.

Zur Distributivität: Seien wieder $a, b, c \in K$ beliebig. Für $z := a + b$ ist dann zu zeigen:

$$z \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \tag{II.80}$$

Die Fälle $a = z_0$ oder $b = z_0$ oder $c = z_0$ sind trivial. Seien also a, b, c von z_0 verschieden angenommen. Dann gilt nach (II.76)

$$\mathcal{Q}^{z_\infty\, z_0\, a}_{z_\infty\;\, z\;\, b}.$$

Anwenden der Projektivität $\mu_c^{z_\infty, z_0, z_1}$ ergibt wegen $\mu_c^{z_\infty, z_0, z_1}(z_\infty) = z_\infty$ und $\mu_c^{z_\infty, z_0, z_1}(z_0) = z_0$:

$$\mathcal{Q}^{z_\infty\;\; z_0\;\; a \cdot c}_{z_\infty\; z \cdot c\; b \cdot c}$$

(siehe Satz 112). Insbesondere sind $a \cdot c$ und $b \cdot c$ von z_0 verschieden und mit (II.76) folgt (II.80).

2. Wir zeigen nun, dass $(z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ ein Positivitätsbereich für den Körper $\langle K, +, \cdot, z_0, z_1 \rangle$ ist. Es bezeichne $-z$ das additive Inverse eines Elements $z \in K$. Im Fall $z \neq z_0$ gilt $\mathcal{Q}^{z_\infty \, z_0 \; z}_{z_\infty \, z_0 \, -z}$ nach (II.76) und mithin $\mathcal{H} \, z_0 \, z \, z_\infty \, (-z)$ per Symmetrie (Satz 108). Mit Korollar 127 ergibt sich

$$\mathcal{T} z_0 \, z \, z_\infty \, (-z) \qquad \text{für } z \in K \backslash z_0. \tag{II.81}$$

Für $z \in K \backslash z_0$ liegt somit entweder z oder $-z$ in $(z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ (siehe Korollar 119).

Es ist $(z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation: Seien dazu $a, b \in (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ beliebig. Wegen (II.81) folgt mit Korollar 119

$$\mathcal{T} z_0 \, a \, z_\infty \, (-b).$$

Anwenden der Projektivität $\alpha_b^{z_\infty, z_0}$ ergibt gemäß Korollar 120:

$$\mathcal{T} b \, (a + b) \, z_\infty \, z_0$$

und damit $a + b \in (z_0 \, {}_b \, z_\infty) = (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$.

Nach Voraussetzung gilt

$$\neg \mathcal{T} z_0 \, z_1 \, z_\infty a.$$

Anwenden der Projektivität $\mu_b^{z_\infty, z_0, z_1}$ ergibt

$$\neg \mathcal{T} z_0 \, b \, z_\infty \, (a \cdot b)$$

und damit $a \cdot b \in (z_0 \, {}_b \, z_\infty) = (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$.

3. Zur Vollständigkeit: Wir zeigen, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $A \subseteq (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ in K ein Supremum besitzt. Für $a \in (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty)$ und $b \in K$ gilt

$$a < b \Leftrightarrow \mathcal{T} z_0 \, a \, b \, z_\infty, \tag{II.82}$$

denn es gilt

$$(-a) \, z_0 \, (b - a) \, z_\infty \overset{\alpha_a^{z_\infty, z_0}}{\barwedge} z_0 \, a \, b \, z_\infty$$

und somit wegen $(z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty) = (z_0 \, {}_a \, z_\infty) = (z_0 \, {}^{-a} \, z_\infty)$ (siehe (II.81)):

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad (b - a) \in (z_0 \, {}_{z_1} \, z_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}(-a) \, z_0 \, (b - a) \, z_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T} z_0 \, a \, b \, z_\infty.$$

Wir können o.E. annehmen, dass A kein maximales Element besitzt, sodass also

$$B := \{b \, ; \, \forall a \in A : a < b\}$$

die Menge der oberen Schranken von A ist. Nach (II.82) gilt

$$\mathcal{T} z_0 \, a \, b \, z_\infty, \qquad \forall a \in A, b \in B. \tag{II.83}$$

Mit Axiom O4 folgt die Existenz eines Strahls s sodass

$$\mathcal{T} z_0 \, a \, s \, b, \qquad \forall a \in A \backslash s, \; b \in B \backslash s.$$

Zusammen mit (II.83) impliziert dies

$$\mathcal{T}_5 \, z_0 \, a \, s \, b \, z_\infty, \qquad \forall a \in A \backslash s, \; b \in B \backslash s. \tag{II.84}$$

Im Fall $B = \{s\}$ ist s die einzige obere Schranke von A und damit ein Supremum. Wir können also o.E. $B\backslash s \neq \emptyset$ annehmen (beachte, dass A nach Voraussetzung eine obere Schranke besitzt). Ferner ist auch $A\backslash s \neq \emptyset$, da sonst s maximales Element von A wäre. Somit folgt aus (II.84) mit (A.7) einerseits

$$a < s, \qquad \forall a \in A\backslash s,$$

d.h. s ist obere Schranke von A, andererseits

$$s < b, \qquad \forall b \in B\backslash s,$$

d.h. s ist kleinste obere Schranke von A, also ein Supremum. ∎

Das folgende Metatheorem ist wesentlich für den Beweis der Kategorizität des Axiomensystem der Strahlengeometrie.

146 Metatheorem

Seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ zwei Strahlenräume mit harmonischen Relationen $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$. Seien ferner Z ein Zyklus in $\mathcal{R}$ und Z' ein Zyklus in $\mathcal{R}'$ und $z_\infty, z_0, z_1 \in Z$ bzw. $z'_\infty, z'_0, z'_1 \in Z'$ jeweils drei distinkte Strahlen. Dann gibt es genau einen $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismus

$$\pi : Z \to Z' \qquad \textit{mit} \qquad \pi(z_\infty) = z'_\infty, \quad \pi(z_0) = z'_0, \quad \pi(z_1) = z'_1. \tag{II.85}$$

Beweis: Nach Metalemma 137 bleibt lediglich die Existenz eines sochen $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismus zu zeigen. Gemäß Theorem 145 lassen sich Strukturen

$$\langle\langle Z\backslash z_\infty, +, \cdot, z_0, z_1\rangle, (z_0 \,{}_{z_1}\, z_\infty)\rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle\langle Z'\backslash z'_\infty, +', \cdot', z'_0, z'_1\rangle, (z'_0 \,{}_{z'_1}\, z'_\infty)\rangle$$

von vollständig angeordneten Körpern definieren. Sei $\pi_0 : Z\backslash z_\infty \to Z'\backslash z'_\infty$ ein Körperisomorphismus gemäß Theorem 169 (im Anhang). Sei $\pi : Z \to Z$ die bijektive Fortsetzung von π_0 mit $\pi(z_\infty) = z'_\infty$, sodass also (II.85) erfüllt ist. Wir zeigen, dass $\pi : Z \to Z$ ein $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismus ist und damit die Behauptung erfüllt. Seien dazu $u, v, w, x \in Z$ beliebig. Zu zeigen ist

$$\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}'\, \pi(u)\, \pi(v)\, \pi(w)\, \pi(x). \tag{II.86}$$

Dazu können offensichtlich u, v, w, x distinkt angenommen werden (siehe Satz 123). Wir betrachten zunächst den Fall $z_\infty \in \{u, v, w, x\}$. Aus Symmetriegründen kann o.E. $z_\infty = u$ angenommen werden (Korollar 126). Dann sind $v - w$ und $x - w$ definiert[13] und liegen in $Z\backslash z_\infty, z_0$ und (II.86) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\, z_\infty\, v\, w\, x &\Leftrightarrow \mathcal{Q}^{z_\infty\, w\, v}_{z_\infty\, w\, x} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{Q}^{z_\infty\, z_0\, (v-w)}_{z_\infty\, z_0\, (x-w)} \\
&\Leftrightarrow (v - w) + (x - w) = z_0 \\
&\Leftrightarrow (\pi(v) -' \pi(w)) +' (\pi(x) -' \pi(w)) = z'_0 \\
&\dots \\
&\Leftrightarrow \mathcal{H}'\, z'_\infty\, \pi(v)\, \pi(w)\, \pi(x).
\end{aligned}$$

[13] Für $a, b \in Z\backslash z_\infty$ ist $a - b$ natürlich eine Abkürzung für $a + (-b)$, wobei $-b$ wieder das additive Inverse von b bezeichne; in $Z'\backslash z'_\infty$ verwenden wir analoge Schreibweisen.

Dabei ergibt sich die erste Äquivalenz per Symmetrie (Satz 108), die zweite aus der $\mathcal{Q}$-Invarianz der Projektivität $\alpha_{-w}^{z_\infty,z_0}$ (siehe Theorem 112), die dritte aus (II.76) und die vierte daraus, dass π_0 ein Körperisomorphismus ist.

Nun zum Fall $z_\infty \notin \{u,v,w,x\}$: Beachte zunächst, dass die Projektivität η gegeben durch

$$z_\infty\, z_0\, z_1 \overset{\eta}{\barwedge} z_0\, z_\infty\, z_1$$

Elemente $z \in Z\backslash z_\infty, z_0$ auf ihr multiplikatives Inverses z^{-1} abbildet, denn $z_1 = \eta(z_1)$ ist selbstinvers und für $z \neq z_1$ gilt

$$z_\infty\, z_0\, z_1\, z \barwedge z_0\, z_\infty\, z_1\, \eta(z) \barwedge z_\infty\, z_0\, \eta(z)\, z_1$$

gemäß Satz 101 und damit $z \cdot \eta(z) = \mu_{\eta(z)}^{z_\infty,z_0,z_1}(z) = z_1$.

Da u,v,w,x,z_∞ distinkt angenommen wurden, sind $v-u$ und $w-u$ und $x-u$ definiert und liegen in $Z\backslash z_\infty, z_0$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\, u\, v\, w\, x &\Leftrightarrow \mathcal{H}\, z_0\, (v-u)\, (w-u)\, (x-u)\\
&\Leftrightarrow \mathcal{H}\, z_\infty\, (v-u)^{-1}\, (w-u)^{-1}\, (x-u)^{-1}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{H}'\, \pi(z_\infty)\, \pi((v-u)^{-1})\, \pi((w-u)^{-1})\, \pi((x-u)^{-1})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{H}'\, z'_\infty\, (\pi(v) -' \pi(u))^{-'1}\, (\pi(w) -' \pi(u))^{-'1}\, (\pi(x) -' \pi(u))^{-'1}\\
&\dots\\
&\Leftrightarrow \mathcal{H}'\, \pi(u)\, \pi(v)\, \pi(w)\, \pi(x).
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Äquivalenzen ergeben sich aus der $\mathcal{Q}$-Invarianz der Projektivitäten $\alpha_{-u}^{z_\infty,z_0,z_1}$ bzw. η, die dritte wurde in obigem Spezialfall behandelt. Die vierte Äquivalenz folgt aus der Invarianz von π_0 unter Addition sowie additiver und multiplikativer Inversenbildung. ■

II.9. Regelscharen

Ein Strahlengebilde R heißt **Regelschar**, falls $R = \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$ für paarweise windschiefe Strahlen s_1, s_2, s_3. Wir zeigen zunächst die Existenz von Regelscharen:

147 Satz

Es gibt drei paarweise windschiefe Strahlen.

Beweis: Sei a ein beliebiger Strahl und seien p,q gemäß Axiom S5 zwei a treffende, zueinander windschiefe Strahlen. Wähle jeweils mit Satz 72 Plexi P_1, P_2 sowie Q_1, Q_2 mit

$$P_1 \cap P_2 = \mathcal{L}^2(a\,p) \text{ und } P_1 \cup P_2 = \mathcal{L}(a\,p) \quad \text{bzw.} \quad Q_1 \cap Q_2 = \mathcal{L}^2(a\,q) \text{ und } Q_1 \cup Q_2 = \mathcal{L}(a\,q). \tag{II.87}$$

Dann gilt $P_1 \not\sim P_2$ und $Q_1 \not\sim Q_2$ und wir können nach Korollar 79 o.E. annehmen, dass $P_1 \sim P_2$ und $Q_1 \sim Q_2$. Wähle nun für $i = 1,2$ mit Satz 81 einen Plexus O_i mit

$$O_i \cap P_i = O_i \cap Q_i = \{a\} \tag{II.88}$$

Dann inzidieren O_1, O_2, denn sie sind ungleichartig und haben den Strahl a gemein. Sei r ein von a verschiedener Strahl im Zyklus $O_1 \cap O_2$. Gemäß (II.88) liegt dann der Strahl r in keinem der Plexi P_1, P_2, Q_1, Q_2 und mit (II.87) folgt, dass er weder in $\mathcal{L}(a\,p)$ noch in $\mathcal{L}(a\,q)$ liegt. Also trifft r weder p noch q. Damit sind p,q,r drei paarweise windschiefe Strahlen. ■

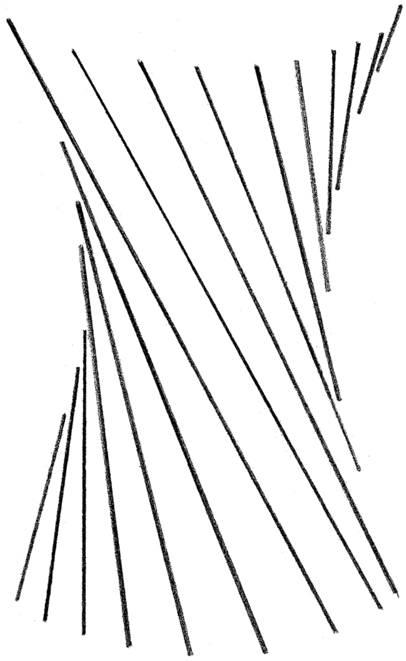


Abbildung II.30. Strahlen einer Regelschar.

148 Satz

Die Strahlen einer Regelschar liegen paarweise windschief.

Beweis: Seien s_1, s_2, s_3 paarweise windschiefe Strahlen und angenommen die Regelschar $\mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$ enthält zwei distinkte sich treffende Strahlen a und b. Dann liegt s_3 in $\mathcal{L}(a\, b) = \mathcal{L}(a\, b\, s_1) \cup \mathcal{L}(a\, b\, s_2)$ (siehe Satz 49), trifft also s_1 oder s_2, ein Widerspruch. ■

149 Satz

Eine Regelschar enthält mindestens vier Strahlen.

Beweis: Seien s_1, s_2, s_3 paarweise windschiefe Strahlen. Seien P_1, P_2, P_3, P_4 gemäß Satz 81 vier distinkte gleichartige Plexi, welche s_1 enthalten. Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei dann $r_i \in P_i \cap \mathcal{L}(s_2\, s_3)$ gemäß Lemma 68. Dann trifft r_i auch s_1 (weil $s_1 \in P_i$) und ist für $j \neq i$ von r_j verschieden, da sonst $r_i \in P_i \cap P_j = \{s_1\}$, im Widerspruch dazu, dass $s_1\, s_2$ im Gegensatz zu $r_i\, s_2$ windschief liegen. Es sind also r_1, r_2, r_3, r_4 vier distinkte Strahlen der Regelschar $\mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$. ■

150 Theorem

Ist R eine Regelschar, so ist auch $\mathcal{L}(R)$ eine Regelschar und es gilt $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ für je drei distinkte Strahlen $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Beweis: Seien $r_1, r_2, r_3 \in R$ drei beliebige distinkte Strahlen (Satz 149). Dann liegen r_1, r_2, r_3 gemäß Satz 148 paarweise windschief und $\mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ ist eine Regelschar. Nach Satz 48.1 gilt $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$. Es genügt also $\mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3) \subseteq \mathcal{L}(R)$ zu zeigen, d.h. dass jeder beliebige Strahl $s_4 \in \mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ jeden beliebigen Strahl $r_4 \in R$ trifft. Dabei kann natürlich r_4 von den Strahlen r_1, r_2, r_3 verschieden und damit nach Satz 148 zu ihnen windschief angenommen werden, sodass also r_1, r_2, r_3, r_4 paarweise windschief liegen. Seien nun s_1, s_2, s_3 paarweise windschiefe Strahlen mit $R = \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$. Da r_4 die Strahlen s_1, s_2, s_3 trifft, können wir annehmen, dass s_4 von diesen verschieden ist. Als distinkte Strahlen der Regelschar $\mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ liegen auch s_1, s_2, s_3, s_4 paarweise windschief. Beachte im Folgenden, dass für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Strahlen r_i, s_j distinkt sind (denn $s_j \notin \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3) = R$) und sich, abgesehen vom Fall $i = j = 4$, treffen; dass letzteres auch für den Fall $i = j = 4$ gilt soll nun gezeigt werden.

Sei P_i für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ein r_1, s_i enthaltender Plexus, und zwar derart, dass $P_1 \sim P_3$ und $P_2 \sim P_4$, aber $P_1 \not\sim P_2$ (siehe Satz 78). Dann gilt für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$s_j \notin P_i, \quad \text{falls } i \neq j,$$

da $s_j\, s_i$ windschief liegen. Insbesondere gilt $P_1 \neq P_3$ und damit wegen $P_1 \sim P_3$

$$P_1 \cap P_3 = \{r_1\}.$$

Nach Satz 67 ist

$$P_i \cap \mathcal{L}(r_k) \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ und } k \in \{2, 3, 4\} \text{ ein Zyklus,}$$

denn es ist $r_k \notin P_i$, da $r_k\, r_1$ windschief liegen. Ferner ist auch

$$Z_{i,j} := P_i \cap P_j \quad \text{für } i \in \{1, 3\} \text{ und } j \in \{2, 4\} \text{ ein Zyklus,}$$

da die beiden Plexi P_i, P_j ungleichartig sind und den Strahl r_1 gemein haben und somit nach Korollar 76 inzidieren. Es gibt also nach Satz 60 Strahlen

$$z_k^{i,j} \in Z_{i,j} \cap \mathcal{L}(r_k) \;\text{ für }\; i \in \{1, 3\},\; j \in \{2, 4\},\; k \in \{2, 3, 4\}.$$

Für $i \in \{1, 3\}$ und $k \in \{2, 3, 4\}$ liegen $z_k^{i,4}\, s_i\, z_k^{i,2}$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $P_i \cap \mathcal{L}(r_k)$. Es gilt also

$$r_1\, z_2^{i,4}\, z_3^{i,4}\, z_4^{i,4} \overset{s_i}{\barwedge} r_1\, z_2^{i,2}\, z_3^{i,2}\, z_4^{i,2} \qquad \text{für } i \in \{1, 3\}$$

und damit

$$r_1\, z_2^{i,4}\, z_3^{i,4}\, z_4^{i,4} \barwedge r_1\, z_2^{i,2}\, z_3^{i,2}\, z_4^{i,2} \qquad \text{für } i \in \{1, 3\}$$

gemäß Satz 100 angewendet auf die Zyklen $Z_{i,4}$ und $Z_{i,2}$ (beachte $s_i \notin P_4 \cup P_2 \supseteq Z_{i,4} \cup Z_{i,2}$).

Für $k \in \{2, 3, 4\}$ liegen $z_k^{1,2}\, s_2\, z_k^{3,2}$ cozyklisch, denn sie liegen im Zyklus $P_2 \cap \mathcal{L}(r_k)$. Es gilt also

$$r_1\, z_2^{1,2}\, z_3^{1,2}\, z_4^{1,2} \overset{s_2}{\barwedge} r_1\, z_2^{3,2}\, z_3^{3,2}\, z_4^{3,2}$$

und damit

$$r_1\, z_2^{1,2}\, z_3^{1,2}\, z_4^{1,2} \barwedge r_1\, z_2^{3,2}\, z_3^{3,2}\, z_4^{3,2},$$

wiederum gemäß Satz 100 (beachte $s_2 \notin P_1 \cup P_3 \supseteq Z_{1,2} \cup Z_{3,2}$).

Wir haben also

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4}\, z_4^{1,4} \barwedge r_1\, z_2^{1,2}\, z_3^{1,2}\, z_4^{1,2} \barwedge r_1\, z_2^{3,2}\, z_3^{3,2}\, z_4^{3,2} \barwedge r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z_4^{3,4}$$

und mithin eine Projektivität π mit

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4}\, z_4^{1,4} \overset{\pi}{\barwedge} r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z_4^{3,4} \tag{II.89}$$

gemäß Satz 97.

Sei $i \in \{1, 3\}$. Der Strahl r_1 ist von den Strahlen $z_2^{i,4}$ und $z_3^{i,4}$ verschieden, da er im Gegensatz zu ihnen zu r_2, r_3 windschief liegt. Ferner ist auch $z_2^{i,4}$ von $z_3^{i,4}$ verschieden, denn andernfalls läge neben s_i auch $z_2^{i,4}$ in der Regelschar $\mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ was nach Satz 148 unmöglich ist, da $s_i\, z_2^{i,4}$ sich treffen und distinkt sind (letzteres, weil $s_i\, s_4$ im Gegensatz zu $z_2^{i,4}\, s_4$ windschief liegen). Es sind also

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4} \quad \text{und} \quad r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4} \quad \text{jeweils distinkt.} \tag{II.90}$$

Mit Korollar 139 folgt, dass die Projektivität π in (II.89) durch

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4} \overset{\pi}{\barwedge} r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}$$

eindeutig bestimmt ist.

Sei nun z so gewählt, dass $z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z$ und $z_4^{1,4}\, s_4\, z$ cozyklisch liegen (Satz 70; als Strahlen von P_4 liegen $z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z_4^{1,4}\, s_4$ coplektisch). Da $z_k^{1,4}\, s_4\, z_k^{3,4}$ für $k \in \{2, 3\}$ cozyklisch liegen (denn sie liegen im Zyklus $P_4 \cap \mathcal{L}(r_k)$), gilt dann

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4}\, z_4^{1,4} \overset{s_4}{\barwedge} r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z$$

und damit

$$r_1\, z_2^{1,4}\, z_3^{1,4}\, z_4^{1,4} \barwedge r_1\, z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}\, z$$

gemäß Satz 100 (beachte $s_4 \notin P_1 \cup P_3 \supseteq Z_{1,4} \cup Z_{3,4}$ und $z \in \mathcal{L}^2(z_2^{3,4}\, z_3^{3,4}) = Z_{3,4}$ gemäß (II.90)). Wegen der Eindeutigkeit von π in (II.89) folgt $z = \pi(z_4^{1,4}) = z_4^{3,4}$. Somit liegen $z_4^{1,4}\, s_4\, z_4^{3,4}$ cozyklisch und der Strahl r_4 trifft mit $z_4^{1,4}$ und $z_4^{3,4}$ auch s_4 (beachte $z_4^{1,4} \neq z_4^{3,4}$, da $P_1 \cap P_3 = \{r_1\}$ und $r_1\, r_4$ windschief liegen). ■

Ist R eine Regelschar, so nennen wir $S := \mathcal{L}(R)$ die zu R **konjugierte** Regelschar. Diese Bezeichnung ist nach Theorem 150 gerechtfertigt. Umgekehrt ist auch R zu S konjugiert, denn für Strahlen s_1, s_2, s_3 mit $R = \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$ gilt $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}^3(s_1\, s_2\, s_3) = \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3) = R$ (Satz 48.5). Wir sprechen daher auch von **konjugierten Regelscharen** und meinen damit Regelscharen R und S mit $R = \mathcal{L}(S)$ und $S = \mathcal{L}(R)$.

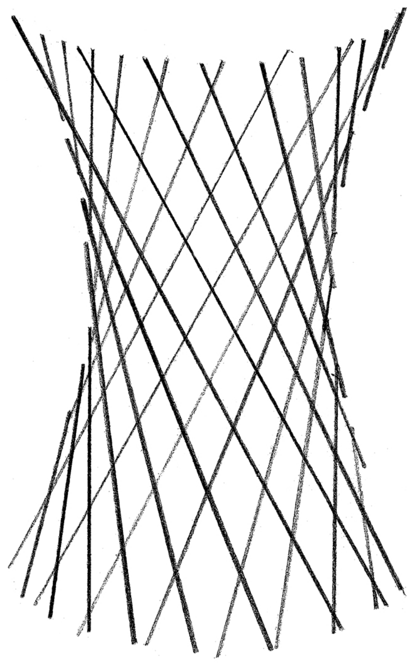


Abbildung II.31. Zwei konjugierte Regelscharen.

151 Satz

Trifft ein Strahl einen Strahl einer Regelschar R, so trifft er auch einen Strahl der konjugierten Regelschar S.

Beweis: Sei a ein Strahl, welcher einen Strahl $r_1 \in R$ trifft. Seien ferner $r_2, r_3 \in R$ von r_1 und einander verschiedene Strahlen (siehe Satz 149) und sei $s \in \mathcal{L}(a\, r_1) \cap \mathcal{L}(r_2\, r_3)$ gemäß Korollar 69. Dann ist s ein a treffender Strahl und liegt in $\mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3) = S$ gemäß Theorem 150. ■

Ein Zyklus heißt **Tangentialzyklus** einer Regelschar R, falls er einen Strahl von R sowie einen Leitstrahl von R enthält.

152 Satz

Ein Zyklus Z ist genau dann Tangentialzyklus einer Regelschar R, wenn er Tangentialzyklus der konjugierten Regelschar S ist. In diesem Fall enthält Z je genau einen Strahl r von R und s von S und es gilt $Z = \mathcal{L}^2(r\, s)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition und der Tatsache, dass die Strahlen einer Regelschar paarweise windschief liegen (Satz 148), während Zyklen plektisch sind. ■

Sei R eine Regelschar. Ein Strahl heißt **Tangente** von R, falls er in einem Tangentialzyklus von R liegt. Eine **echte Tangente** von R ist eine Tangente von R, welche nicht Leitstrahl von R ist.

153 Satz

Seien R und S konjugierte Regelscharen. Dann gilt:

1. *Ein Strahl ist genau dann Tangente von R, wenn er Tangente von S ist.*
2. *Ein Strahl t ist genau dann Tangente von R, wenn es Strahlen $r \in R$ und $s \in S$ gibt, sodass $r\, s\, t$ cozyklisch liegen.*
3. *Ein Strahl t ist genau dann echte Tangente von R, wenn er einen und nur einen Strahl von R trifft.*
4. *Sind $r \in R$ und $s \in S$ und ist t eine r und s treffende Tangente von R, so liegen $r\, s\, t$ cozyklisch.*

Beweis: Aussagen 1 und 2 ergeben sich unmittelbar aus Satz 152.

Zu 3: Sei t eine echte Tangente von R; nach 2 gibt es Strahlen $r \in R$ und $s \in S$ sodass $r\, s\, t$ cozyklisch liegen; als echte Tangente ist t von s verschieden; ist also $r' \in R$ ein t treffender Strahl, so trifft r' mit t und s auch r und es folgt $r' = r$, da die Strahlen von R paarweise windschief liegen (Satz 148). Sei t nun umgekehrt ein Strahl, welcher genau einen Strahl r_1 von R trifft. Nach Satz 151 trifft dann t auch einen Strahl s_1 von S. Da t nicht Leitstrahl von R ist (denn R enthält mehr als einen Strahl), genügt es nach 2. zu zeigen, dass $r_1\, s_1\, t$ cozyklisch liegen. Angenommen nicht. Dann liegen $s_1\, t\, r_1$ cosimplizial und mit Satz 62.4 folgt die Existenz eines zu r_1 windschiefen Strahls a, sodass $s_1\, t\, a$ cosimplizial liegen. Seien $s_2, s_3 \in S$ zwei von s_1 und einander verschiedene Strahlen (Satz 149) und sei $r_2 \in \mathcal{L}(s_1\, t\, a) \cap \mathcal{L}(s_2\, s_3)$ gemäß Lemma 68. Dann ist $r_2 \in \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3) = R$ (Theorem 150) ein t treffender und von r_1 verschiedener Strahl (da $r_1\, a$ im Gegensatz zu $r_2\, a$ windschief liegen), im Widerspruch zur Voraussetzung an t.

Zu 4: Ist $t \in R$ oder $t \in S$, so folgt $t = r$ bzw. $t = s$, da die Strahlen von R bzw. S paarweise windschief liegen (Satz 148) und die Behauptung ist trivial; andernfalls ist t echte Tangente von S und echte Tangente von R, trifft also nach 3 außer s keinen weiteren Strahl von S und außer r keinen weiteren Strahl von R; mit 2 folgt nun die Behauptung. ■

Ein Strahl heißt **Sekante** einer Regelschar, falls er einen ihrer Strahlen trifft, aber keine Tangente von ihr ist.

154 Satz

Seien R und S konjugierte Regelscharen und a ein Strahl. Dann sind äquivalent:

1. *a ist Sekante von R.*
2. *a ist Sekante von S.*
3. *a trifft genau zwei Strahlen von R.*
4. *a trifft mehr als einen Strahl von R und mehr als einen Strahl von S.*
5. *Es gibt Strahlen $r \in R$ und $s \in S$ sodass $r\,s\,a$ cosimplizial liegen.*

Beweis: Wir zeigen $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$. Die Äquivalenz „$1 \Leftrightarrow 2$“ ergibt sich aus der Äquivalenz „$1 \Leftrightarrow 5$“.

Zu „$1 \Rightarrow 3$“: Der Strahl a trifft nicht mehr als zwei Strahlen von R, denn sonst wäre er nach Theorem 150 Leitstrahl und damit (offensichtlich) Tangente von R; er trifft aber auch nicht genau einen Strahl von R, denn sonst wäre er nach Satz 153.3 eine (echte) Tangente von R; also trifft a genau zwei Strahlen von R, denn als Sekante trifft er mindestens einen.

Zu „$3 \Rightarrow 4$“: Nach Voraussetzung trifft a mehr als einen Strahl von R und nach Satz 151 trifft a auch mindestens einen Strahl von S; träfe a nicht noch einen zweiten Strahl von S, so wäre er nach Satz 153.3 eine (echte) Tangente von S und damit auch eine Tangente von R (Satz 153.1), was unmöglich ist, da a weder Leitstrahl noch echte Tangente von R ist (im ersteren Fall träfe er alle, im letzteren nur einen Strahl von R; beachte Satz 149).

Zu „$4 \Rightarrow 5$“: Seien $r \in R$ und $s \in S$ zwei a treffende Strahlen; es ist $r \neq a$, da a im Gegensatz zu r noch einen von r verschiedenen Strahl von R trifft; lägen $r\,s\,a$ cozyklisch so träfe daher jeder a treffende Strahl von S mit r und a auch s, was unmöglich ist, da es noch einen von s verschiedenen und damit zu s windschiefen, a treffenden Strahl in S gibt; also liegen $r\,s\,a$ cosimplizial.

Zu „$5 \Rightarrow 1$“: Dies folgt aus Satz 153.4. ■

155 Satz

Enthält ein Plexus einen Strahl einer Regelschar R, so enthält er auch einen Strahl der konjugierten Regelschar S.

Beweis: Sei P ein Plexus, welcher einen Strahl $r \in R$ enthält. Sei $a \in P$ ein von r verschieder Strahl. Dann trifft a den Strahl r und mithin gemäß Satz 151 auch einen Strahl $s \in S$. Liegen $r\,s\,a$ cozyklisch, so liegt mit r und a auch s in P (Satz 66) und erfüllt damit die Behauptung. Sei also o.E. angenommen, dass $r\,s\,a$ cosimplizial liegen. Nach Satz 154 ist dann a Sekante von R und trifft einen zweiten, von s verschiedenen Strahl $s' \in S$. Da $s\,s'$ windschief liegen, sind $\mathcal{L}(r\,a\,s)$ und $\mathcal{L}(r\,a\,s')$ distinkte Plexi (siehe Satz 62.2), welche die beiden Strahlen r und a gemein haben. Da auch P diese beiden Strahlen enthält, folgt $P = \mathcal{L}(r\,a\,s)$ oder $P = \mathcal{L}(r\,a\,s')$ gemäß Satz 72. Im ersteren Fall erfüllt s, im letzteren s' die Behauptung. ■

156 Lemma

Seien R eine Regelschar, $r \in R$ und P ein Plexus mit $r \notin P$. Dann enthält P genau eine r treffende Tangente.

Beweis: Nach Satz 67 ist $P \cap \mathcal{L}(r)$ ein Zyklus, d.h. $P \cap \mathcal{L}(r) = \mathcal{L}^2(u\,v)$ für gewisse distinkte sich treffende Strahlen u, v. Sei Q gemäß Satz 72 ein Plexus sodass $P \cap Q = \mathcal{L}^2(u\,v)$ und $P \cup Q = \mathcal{L}(u\,v)$. Wegen $r \in \mathcal{L}(u\,v) \backslash P$ impliziert Letzteres $r \in Q$, und mit Satz 155 folgt hieraus, dass Q auch einen Strahl s der zu R konjugierten Regelschar $S := \mathcal{L}(R)$ enthält. Als Strahlen von Q liegen $u\,v\,r\,s$ coplektisch. Mit Satz 70 folgt die Existenz eines Strahls t sodass $u\,v\,t$ und $r\,s\,t$ cozyklisch liegen. Letzteres bedeutet nach Satz 153.2, dass t eine r treffende Tangente von R ist und Ersteres impliziert, dass mit u und v auch t in P liegt (Satz 66).

Angenommen nun, P enthält eine zweite, von t verschiedene und r treffende Tangente t' von R. Da $r\,s\,t$ cozyklisch liegen und t' auch t trifft (denn $t, t' \in P$), trifft t' auch s (beachte dass $r \neq t$, da $r \notin P$). Mit Satz 153.4 folgt, dass $r\,s\,t'$ cozyklisch liegen. Da der Zyklus $\mathcal{L}^2(r\,s)$ somit die zwei distinkten Strahlen t und t' mit P gemein hat, folgt $\mathcal{L}^2(r\,s) \subseteq P$ gemäß Satz 66, im Widerspruch zu $r \notin P$. ∎

157 Lemma

Seien R und S konjugierte Regelscharen und $r_1, r_2, r_3 \in R$ sowie $s_1, s_2, s_3 \in S$ jeweils distinkt. Dann gibt es echte Tangenten $t_1, t_2, t_3, t'_1, t'_2, t'_3$ von R mit folgenden Eigenschaften:

1. *$t_1\,t_2\,t_3$ und $t'_1\,t'_2\,t'_3$ liegen cosimplizial und $\mathcal{L}(t_1\,t_2\,t_3) \cap \mathcal{L}(t'_1\,t'_2\,t'_3) = \emptyset$.*
2. *Für $k \in \{1,2,3\}$ liegen $r_k\,s_k\,t_k$ und $r_k\,s_k\,t'_k$ cozyklisch.*
3. *Sind t''_1, t''_2, t''_3 coplektische Strahlen sodass $r_k\,s_k\,t''_k$ für $k \in \{1,2,3\}$ cozyklisch liegen, so gilt*
$$\{t''_1, t''_2, t''_3\} = \{t_1, t_2, t_3\} \quad \textit{oder} \quad \{t''_1, t''_2, t''_3\} = \{t'_1, t'_2, t'_3\}$$

Beweis: Für $i \in \{1,2,3\}$ seien P_i, P'_i zwei miteinander inzidierende, die Strahlen r_i, s_i enthaltende Plexi, und zwar so, dass $P_1 \sim P_2 \sim P_3$ und $P'_1 \sim P'_2 \sim P'_3$ (siehe Satz 78 und Korollar 76). Da $r_1\,r_2\,r_3$ und $s_1\,s_2\,s_3$ jeweils paarweise windschief liegen (Satz 148), liegen die Strahlen r_j und s_j für $j \neq i$ weder in P_i noch in P'_i. Insbesondere sind P_1, P_2, P_3 und P'_1, P'_2, P'_3 jeweils distinkt. Für $k \in \{1,2,3\}$ gibt es somit Strahlen p_k, p'_k sodass $P_i \cap P_j = \{p_k\}$ bzw. $P'_i \cap P'_j = \{p'_k\}$ für i, j mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ (siehe Abbildung II.32); dann liegen p_k, p'_k in $\mathcal{L}(r_i\,s_i\,r_j\,s_j)$ und sind damit Sekanten von R und S gemäß Satz 154; ebenfalls gemäß Satz 154 liegen somit

$$p_k\,r_k \quad p_k\,s_k \quad p'_k\,r_k \quad p'_k\,s_k \quad \text{jeweils windschief für } k \in \{1,2,3\}. \tag{II.91}$$

Es ist $p_k \neq p'_k$, denn sonst wäre $P_i = \mathcal{L}(r_i\,s_i\,p_k) = P'_i$ (Satz 65; es liegen $r_i\,s_i\,p_k$ nicht cozyklisch, weil p_k keine Tangente von R ist), im Widerspruch zur Wahl von P_i, P'_i als inzidierende Plexi. Mit Lemma 86 angewendet auf $r_i\,s_i\,r_j\,s_j$ folgt, dass $r_i\,s_i\,p_k\,r_j\,s_j\,p'_k$ und mithin per Symmetrie auch

$$r_i\,p_k\,s_i\,r_j\,p'_k\,s_j \quad \text{für } i,j,k \text{ mit } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \text{ ein Tetraeder bilden.} \tag{II.92}$$

Es liegen $p_1\,p_2\,p_3$ coplektisch (da $p_i, p_j \in P_k$ für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$) aber nicht cozyklisch, da sonst etwa r_3 mit p_1 und p_2 auch p_3 träfe (beachte $p_1 \neq p_2$, da $p_1\,r_1$ im Gegensatz zu $p_2\,r_1$ windschief liegen, siehe (II.91)). Somit liegen $p_1\,p_2\,p_3$ cosimplizial und analog folgt, dass auch $p'_1\,p'_2\,p'_3$ cosimplizial liegen. Wir haben also zwei Plexi $P := \mathcal{L}(p_1\,p_2\,p_3)$ und $P' := \mathcal{L}(p'_1\,p'_2\,p'_3)$.

Seien nun für $k \in \{1,2,3\}$ jeweils mit Satz 70 Strahlen t_k, t'_k so gewählt, dass $r_k\,s_k\,t_k$ und $p_i\,p_j\,t_k$ bzw. $r_k\,s_k\,t'_k$ und $p'_i\,p'_j\,t'_k$ für i, j mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ cozyklisch liegen (es liegen $r_k\,s_k\,p_i\,p_j$ in P_k

bzw. $r_k\, s_k\, p'_i\, p'_j$ in P'_k und damit jeweils coplektisch). Nach Satz 66 liegt mit p_i und p_j auch t_k in P; insbesondere trifft t_k den Strahl p_k und ist somit nach (II.91) von r_k und s_k verschieden; wir fassen zusammen:

$$t_k \in P \quad \text{und} \quad r_k\, s_k\, t_k \;\; \text{sind distinkt und liegen cozyklisch für } k \in \{1,2,3\}. \tag{II.93}$$

Analog folgt:

$$t'_k \in P' \quad \text{und} \quad r_k\, s_k\, t'_k \;\; \text{sind distinkt und liegen cozyklisch für } k \in \{1,2,3\}. \tag{II.94}$$

Insbesondere liegen damit auch $s_k\, t_k\, r_k\, s_k\, t'_k\, r_k$ cozyklisch (Satz 54) und mit Lemma 98 ergibt sich wegen (II.91)

$$r_i\, p_k\, s_i\, r_j\, p'_k\, s_j \;\overline{\wedge}\; s_k\, t_k\, r_k\, s_k\, t'_k\, r_k \qquad \text{für } i,j,k \text{ mit } \{i,j,k\} = \{1,2,3\}. \tag{II.95}$$

Wegen (II.92) folgt hieraus

$$\mathcal{Q}^{s_k\, t_k\, r_k}_{s_k\, t'_k\, r_k} \qquad \text{d.h.} \qquad \mathcal{H}\, s_k\, t_k\, r_k\, t'_k \qquad \text{für } k \in \{1,2,3\}.$$

Insbesondere sind $t_k\, t'_k$ distinkt (Satz 123), sodass wegen (II.95)

$$p_k\, t'_k \quad \text{und} \quad p'_k\, t_k \qquad \text{windschief liegen für } k \in \{1,2,3\}.$$

Andererseits trifft p_k für $k \neq i$ mit r_i und s_i auch t'_i (siehe (II.94)) und es liegen $p_1\, p_2\, p_3$ als Strahlen von P sowie $t'_1\, t'_2\, t'_3$ als Strahlen von P' jeweils coplektisch. Also bilden

$$p_1\, p_2\, p_3\, t'_1\, t'_2\, t'_3 \qquad \text{ein Tetraeder}$$

und analog folgt, dass auch

$$p'_1\, p'_2\, p'_3\, t_1\, t_2\, t_3 \qquad \text{ein Tetraeder bilden.}$$

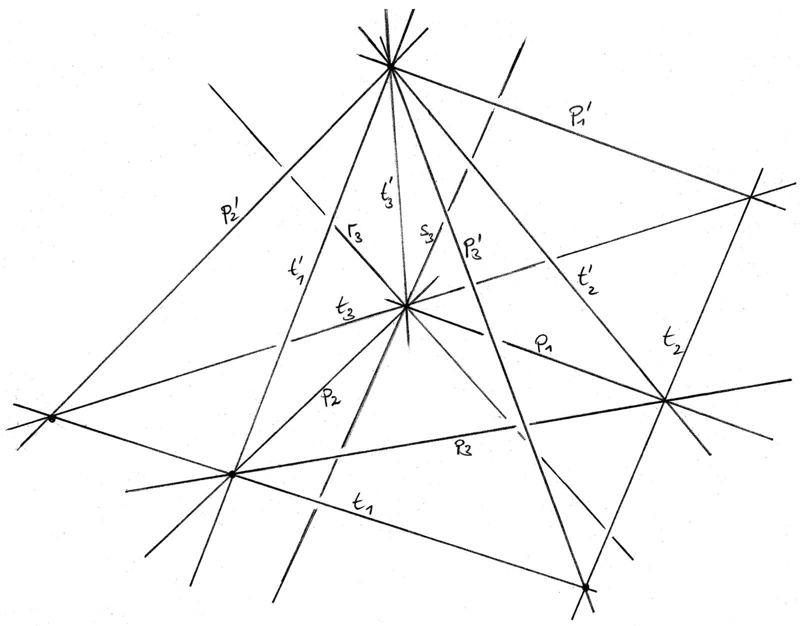


Abbildung II.32.

Mit Satz 85 folgt, dass $t_1\, t_2\, t_3$ und $t'_1\, t'_2\, t'_3$ jeweils cosimplizial liegen, sodass also $P = \mathcal{L}(t_1\, t_2\, t_3)$ und $P' = \mathcal{L}(t'_1\, t'_2\, t'_3)$ gemäß Korollar 65. Nach Korollar 87 angewendet auf das Tetraeder $p'_1\, p'_2\, p'_3\, t_1\, t_2\, t_3$

ist $P' = \mathcal{L}(p_1' \, p_2' \, p_3')$ zum Plexus $P = \mathcal{L}(t_1 \, t_2 \, t_3)$ disjunkt. Damit erfüllen die Strahlen $t_1, t_2, t_3, t_1', t_2', t_3'$ die Eigenschaften 1. und 2. Ferner handelt es sich nach (II.93) und (II.94) tatsächlich um echte Tangenten von R und S (beachte Satz 153.2), sodass also lediglich Eigenschaft 3. zu zeigen bleibt.

Seien dazu Tangenten t_1'', t_2'', t_3'' gemäß 3. gegeben (siehe Satz 153.2). Für $k \in \{1,2,3\}$ ist $t_k'' \neq r_k$, denn für i, j mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ träfen sich sonst neben $t_i'' \, r_i$ und $t_j'' \, r_j$ auch $t_i'' \, r_k$ und $t_j'' \, r_k$ und damit wäre $t_i'' = s_i$ und $t_j'' = s_j$ gemäß Satz 153.3, was unmöglich ist, da $s_i \, s_j$ windschief liegen. Es folgt, dass t_1'', t_2'', t_3'' echte Tangenten von S und damit nach Satz 153.3 distinkt sind, denn sie treffen respektive die distinkten Strahlen s_1, s_2, s_3. Sei nun $P'' \supseteq \{t_1'', t_2'', t_3''\}$ ein Plexus gemäß Satz 63. Wegen $P \not\sim P'$ können wir aus Symmetriegründen o.E. annehmen, dass $P'' \sim P$ (andernfalls vertausche $p_1, p_2, p_3, t_1, t_2, t_3, P$ respektive mit $p_1', p_2', p_3', t_1', t_2', t_3', P'$). Wir zeigen, dass sogar $P'' = P$; daraus folgt dann $t_k'' = t_k$ für $k \in \{1,2,3\}$ mit Lemma 156.

Sei also $P'' \neq P$ angenommen. Dann haben P'' und P genau einen Strahl z gemein. Die Strahlen

$$p_i \, t_k'' \quad \text{treffen sich für } i, k \in \{1,2,3\} \text{ mit } i \neq k, \tag{II.96}$$

da $p_i \in \mathcal{L}(r_k \, s_k) = \mathcal{L}(r_k \, s_k \, t_k'')$ gemäß Satz 50. Seien i, j, k mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ so gewählt, dass z von t_i'' und t_j'' verschieden ist, sodass also t_i'' und t_j'' nicht in P liegen (denn sie liegen in P''). Dann liegen $p_i \, t_i''$ und $p_j \, t_j''$ windschief (wegen (II.96) und $P = \mathcal{L}(p_1 \, p_2 \, p_3)$) und es folgt $\mathcal{L}^2(p_j \, p_k) = \mathcal{L}(p_j \, p_k \, p_i \, t_i'')$ und $\mathcal{L}^2(p_i \, p_k) = \mathcal{L}(p_i \, p_k \, p_j \, t_j'')$ mit Satz 59. Es folgt $\mathcal{L}(p_i \, p_j \, p_k \, t_i'' \, t_j'') = \mathcal{L}(p_j \, p_k \, p_i \, t_i'') \cap \mathcal{L}(p_i \, p_k \, p_j \, t_j'') = \mathcal{L}^2(p_j \, p_k) \cap \mathcal{L}^2(p_i \, p_k) = \{p_k\}$ (Korollar 58) und mithin $z = p_k$ nach Wahl von z. Mit (II.96) ergibt sich $t_k'' \in \mathcal{L}(p_i \, p_j \, z) = \mathcal{L}(p_i \, p_j \, p_k) = P$ und mithin $t_k'' = z = p_k$, da auch $t_k'' \in P''$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass p_k Sekante von R ist. ■

158 Satz

Sei R eine Regelschar und Z ein zu R disjunkter Zyklus. Dann enthält Z eine Sekante von R.

Beweis: Falls Z einen Strahl $s \in S := \mathcal{L}(R)$ entält, wähle einen von s verschiedenen Strahl $s' \in S$ und mit Satz 60 einen s' treffenden Strahl $z \in Z$; dann trifft z neben den beiden Strahlen s und s' keinen dritten Strahl s'' von S, denn sonst wäre $z \in \mathcal{L}(s \, s' \, s'') = \mathcal{L}(S) = R$ (Theorem 150), im Widerspruch zu $Z \cap R = \emptyset$; also trifft z genau zwei Strahlen von S und ist damit nach Satz 154 Sekante von R.

Sei also $Z \cap S = \emptyset$ angenommen. Seien $r_1, r_2, r_3 \in R$ drei distinkte Strahlen und sei $z_i \in Z$ ein r_i treffender Strahl für $i \in \{1,2,3\}$ (Satz 60). Angenommen keiner der Strahlen z_1, z_2, z_3 ist Sekante von R. Dann sind z_1, z_2, z_3 echte Tangenten von R, da $Z \cap S = \emptyset$. Für $i \in \{1,2,3\}$ gibt es daher einen Strahl $s_i \in S$, $s_i \neq z_i$, sodass $r_i \, s_i \, z_i$ cozyklisch liegen (siehe Aussagen 2. und 4. von Satz 153). Es sind $s_1 \, s_2 \, s_3$ distinkt, denn wäre $s_i = s_j$ für distinkte $i, j \in \{1,2,3\}$, so träfe z_j neben z_i auch s_i und mithin r_i, was nicht möglich ist, da z_j als echte Tangente von R neben r_j keinen weiteren Strahl von R trifft (Satz 153.3). Mit Lemma 157 folgt, dass $z_1 \, z_2 \, z_3$ cosimplizial liegen, im Widerspruch zu $\{z_1, z_2, z_3\} \subseteq Z$. ■

159 Satz

Ein Zyklus Z ist genau dann Tangentialzyklus einer Regelschar R, wenn er mehr als zwei Tangenten von R enthält.

Beweis: Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist trivial. Zu “$\Leftarrow$“: Seien $t_1, t_2, t_3 \in Z$ drei distinkte Tangenten von R. Für $i = 1, 2, 3$ gibt es dann Strahlen $r_i \in R$ und $s_i \in S$ sodass $r_i\, s_i\, t_i$ cozyklisch liegen (Satz 153.2). Wären r_1, r_2, r_3 und s_1, s_2, s_3 jeweils distinkt, so lägen $t_1\, t_2\, t_3$ cosimplizial gemäß Lemma 157, was wegen $\{t_1, t_2, t_3\} \subseteq Z$ unmöglich ist. Aus Symmetriegründen (siehe Satz 152 und Satz 153.1) können wir daher o.E. annehmen, dass $r_1 = r_2$. Wegen $t_1 \neq t_2$ können wir ferner o.E. annehmen, dass $r_1 \neq t_1$. Dann trifft t_2 mit r_1 und t_1 auch s_1 und mit Satz 153.4 folgt, dass $r_1\, s_1\, t_2$ cozyklisch liegen. Damit ist $Z = \mathcal{L}^2(t_1\, t_2) = \mathcal{L}^2(r_1\, s_1)$ Tangentialzyklus von R. ■

II.10. Morphismen zwischen Regelscharen

Ein Zyklus Z liegt **quasiperspektiv** zu einer Regelschar R, falls $Z = P \cap \mathcal{L}(s)$ für einen Plexus P und einen Strahl $s \in \mathcal{L}(R)$. In diesem Fall gilt natürlich $s \notin P$, denn sonst wäre $P \subseteq P \cap \mathcal{L}(s) = Z$ zyklisch. Aussage 3 des folgenden Satzes erklärt die Bezeichnung *quasiperspektiv*:

160 Satz

Sei R eine Regelschar und sei Z ein zu R quasiperspektiver Zyklus. Dann gilt:

1. *Z enthält genau eine echte Tangente t_0 von R.*
2. *R enthält genau einen Leitstrahl r_0 von Z.*
3. *$R \backslash r_0 \;\overline{\wedge}\; Z \backslash t_0$.*
4. *Es gibt genau eine Bijektion $\pi : R \to Z$ mit der Eigenschaft, dass $r\, \pi(r)$ sich treffen für alle $r \in R$. Für diese gilt $\pi(r_0) = t_0$.*

Beweis: Seien gemäß Voraussetzung P ein Plexus und $s_0 \in S := \mathcal{L}(R)$ sodass $Z = P \cap \mathcal{L}(s_0)$. Wegen $s_0 \notin P$ enthält P gemäß Lemma 156 genau eine s_0 treffende Tangente von S, d.h. Z enthält genau eine Tangente t_0 von S. Nach Satz 153.1 ist t_0 auch einzige Tangente von R, womit 1. gezeigt ist.

Zu 2: Sei Q ein Plexus mit $Z \subseteq Q$ und $s_0 \in Q$ (ein solcher existiert nach Satz 63, da $Z \cup \{s_0\}$ plektisch ist). Nach Satz 155 enthält Q auch einen Strahl r_0 von R und dieser ist offensichtlich Leitstrahl von Z. Für distinkte Strahlen $z_1, z_2 \in Z$ liegen $s_0\, z_1\, z_2$ coplektisch (weil in Q) aber nicht cozyklisch (da sonst mit z_1 und z_2 auch s_0 in P läge), d.h. es gilt $Q = \mathcal{L}(s_0\, z_1\, z_2)$. Ist $r \in R$ von r_0 verschieden, so liegt r nicht in Q (weil windschief zu $r_0 \in Q$), muss also zu z_1 oder z_2 windschief liegen. Damit ist r_0 der einzige Leitstrahl von Z in R.

Zu 3: Die Strahlen $t_0\, s_0$ treffen sich, sind aber wegen $s_0 \notin P$ distinkt. Da die Strahlen von S paarweise windschief liegen, folgt $t_0 \notin S$, d.h. t_0 ist echte Tangente von R und trifft somit nach Satz 153.3 neben r_0 keinen weiteren Strahl von R. Nach Satz 60 trifft jeder Strahl $r \in R \backslash r_0$ einen Strahl von Z, und zwar nach dem soeben Gezeigten einen von t_0 verschiedenen, andererseits nach 2. nicht mehr als einen (denn sonst wäre er nach Satz 53 Leitstrahl von Z). Damit ist $R \backslash r_0 \;\overline{\wedge}\; Z \backslash t_0$ gezeigt.

Zu 4: Die Strahlen von $Z \backslash t_0$ sind Sekanten von R, denn sie sind nach 1. keine Tangenten von R und treffen nach 2. den Strahl $r_0 \in R$. Sie treffen somit nach Satz 154 neben r_0 jeweils noch genau einen Strahl von R. Also ist die Perspektivität $\pi_0 : R \backslash r_0 \to Z \backslash t_0$ aus 3. bijektiv. Da $r_0\, t_0$ sich treffen, folgt die Behauptung. ■

Ist R eine Regelschar und Z ein zu R quasiperspektiver Zyklus, so bezeichnen wir mit

$$\pi_Z^R$$

die in Satz 160.4 beschriebene Bijektion $R \to Z$.

161 Lemma

Sei R eine Regelschar und seien Z_1 und Z_2 zwei zu R quasiperspektive Zyklen. Dann ist

$$\pi_{Z_2}^R \circ (\pi_{Z_1}^R)^{-1} : Z_1 \to Z_2$$

eine Projektivität.

Beweis: Für $i \in \{1,2\}$ seien gemäß Voraussetzung P_i ein Plexus und $s_i \in S := \mathcal{L}(R)$ mit $Z_i = P_i \cap \mathcal{L}(s_i)$. Beachte im Folgenden wieder $s_i \notin P_i \supseteq Z_i$.

1. Fall $Z_1 \cup Z_2$ ist plektisch und $s_1 = s_2$: Sei $s_0 := s_1 = s_2$. Offensichtlich ist auch $Z_1 \cup Z_2 \cup \{s_0\}$ plektisch, d.h. es gibt einen Plexus Q_0 mit $Z_1 \cup Z_2 \subseteq Q_0$ und $s_0 \in Q_0$ (Satz 63). Für $i = 1, 2$ sei t_i die einzige Tangente von R in Z_i gemäß Satz 160.1 und $r_i \in R \cap \mathcal{L}(Z_i)$ gemäß Satz 160.2. Dann ist $r_i \in Q_0$, denn andernfalls wäre $Q_0 \cap \mathcal{L}(r_i)$ ein Zyklus (Satz 67) und mithin $Z_i = Q_0 \cap \mathcal{L}(r_i)$ (da $Z_i \subseteq Q_0 \cap \mathcal{L}(r_i)$), im Widerspruch zu $s_i \notin Z_i$. Also treffen sich $r_1\, r_2$ und sind damit identisch (Satz 148). Sei $r_0 := r_1 = r_2$. Wegen $t_i \in Z_i$ treffen sich $s_0\, t_i$, sodass mit Satz 153.4 folgt, dass $r_0\, s_0\, t_i$ und cozyklisch liegen. Damit liegen auch $t_1\, s_0\, t_2$ cozyklisch. Wir zeigen allgemeiner, dass für $r \in R$ und $z_i := \pi_{Z_i}^R(r)$ die Strahlen $z_1\, s_0\, z_2$ cozyklisch liegen. Daraus folgt dann wegen $s_0 \notin Z_1 \cup Z_2$ mit Satz 94 die Behauptung (im hier betrachteten Fall). Der Fall $r = r_0$ wurde soeben gezeigt, denn in diesem Fall ist $z_i = t_i$. Sei also $r \neq r_0$. Dann ist $r \notin Q_0$ (denn $r_0 \in Q_0$) und somit $Q_0 \cap \mathcal{L}(r)$ ein Zyklus. Als Strahlen dieses Zyklus liegen $z_1\, s_0\, z_2$ cozyklisch.

2. Fall $P_1 \not\sim P_2$ und $s_1 \neq s_2$: Sei P_0 ein Plexus mit $Z_1 \subseteq P_0$ und $s_1 \in P_0$ (existiert, da $Z_1 \cup \{s_1\}$ plektisch). Wegen $s_1 \notin P_1$ sind P_1, P_0 distinkt und müssen daher inzidieren, denn sie haben den Zyklus Z_1 gemein (siehe Korollar 73). Sei nun Q_0 gemäß Satz 80 ein s_2 enthaltender Plexus, welcher mit P_0 inzidiert, d.h. sodass $Z_0 := Q_0 \cap P_0$ ein Zyklus ist. Da P_1, Q_0 beide mit P_0 inzidieren, sind sie nach Korollar 75 gleichartig, sodass wegen $P_1 \not\sim P_2$:

$$P_2 \not\sim Q_0. \tag{II.97}$$

Da $s_1\, s_2$ windschief liegen, folgt aus $s_1 \in P_0$ bzw. $s_2 \in Q_0$:

$$s_2 \notin P_0 \quad \text{und} \quad s_1 \notin Q_0$$

Letzteres bedeutet, dass $Q_0 \cap \mathcal{L}(s_1)$ ein Zyklus ist, sodass wegen $Z_0 = Q_0 \cap P_0 = Q_0 \cap \mathcal{L}(P_0) \subseteq Q_0 \cap \mathcal{L}(s_1)$:

$$Z_0 = Q_0 \cap \mathcal{L}(s_1).$$

Analog ergibt sich aus Ersterem

$$Z_0 = P_0 \cap \mathcal{L}(s_2).$$

Insbesondere ist $Z_0 \subseteq P_0$ und damit $Z_1 \cup Z_0$ plektisch, sodass mit 1. folgt, dass

$$\pi_{Z_0}^R \circ (\pi_{Z_1}^R)^{-1} : Z_1 \to Z_0$$

eine Projektivität ist. Wir zeigen, dass auch

$$\pi_{Z_2}^R \circ (\pi_{Z_0}^R)^{-1} : Z_0 \to Z_2 \tag{II.98}$$

eine Projektivität ist, womit dann die Behauptung (im hier betrachteten Fall) gezeigt ist.

Wegen (II.97) müssen P_2, Q_0 entweder inzidieren oder disjunkt sein (Korollar 76). Wir betrachten zunächst den ersteren Fall, d.h. dass $P_2 \cap Q_0$ ein Zyklus ist. Wegen $P_2 \cap Q_0 \subseteq P_2 \cap \mathcal{L}(s_2) = Z_2$ ist dann $P_2 \cap Q_0 = Z_2$. Insbesondere ist $Z_2 \subseteq Q_0$, sodass also $Z_0 \cup Z_2$ plektisch ist. Wegen $Z_0 = P_0 \cap \mathcal{L}(s_2)$ folgt in diesem Fall auch (II.98) aus 1.

Sei also $P_2 \cap Q_0 = \emptyset$ angenommen. Insbesondere trifft dann kein Strahl von $Z_2 = P_2 \cap \mathcal{L}(s_2)$ zwei distinkte Strahlen $u, v \in Z_0$, denn sonst läge er in $\mathcal{L}(u\,v\,s_2) = Q_0$ (es liegen $u\,v\,s_2$ cosimplizial, da $s_1, s_2 \in \mathcal{L}(u\,v)$ windschief liegen). Es gilt also $Z_2 \cap \mathcal{L}(Z_0) = \emptyset$ und mithin $Z_0 \;\overline{\wedge}\; Z_2$ gemäß Satz 92. Wir zeigen nun, dass es sich bei der Abbildung in (II.98) um die Perspektivität $Z_0 \to Z_2$ handelt, indem wir zeigen, dass sich, für $r \in R$ beliebig, die Strahlen $z_0 := \pi^R_{Z_0}(r)$ und $z_2 := \pi^R_{Z_2}(r)$ treffen. Beachte dazu im Folgenden, dass sich $r\,z_0$ und $r\,z_2$ nach Satz 160.4 treffen.

Für $i = 1, 2$ sei r_i mit $R \cap \mathcal{L}(Z_i) = \{r_i\}$ gemäß Satz 160.2. Es ist $r_1 \in P_0 \cap \mathcal{L}(s_2) = Z_0$, denn wäre $r_1 \notin P_0$, so wäre $P_0 \cap \mathcal{L}(r_1)$ ein Zyklus und damit $Z_1 = P_0 \cap \mathcal{L}(r_1)$ (da $Z_1 \subseteq P_0 \cap \mathcal{L}(r_1)$), im Widerspruch zu $s_1 \notin Z_1$. Nach Satz 160.1 ist damit r_1 die einzige in Z_0 enthaltene Tangente von R. Im Fall $r = r_1$ ist also $z_0 = r_1 = r$ (siehe Satz 160.4) und $z_0\,z_2$ treffen sich deshalb. Im Fall $r = r_2$ ist z_2 Tangente von R, sodass also $r_2\,s_2\,z_2$ cozyklisch liegen (Satz 153.4) und z_0 trifft deshalb mit $r = r_2$ und s_2 auch z_2. Sei nun r von den Strahlen r_1 und r_2 verschieden angenommen. Für $i = 0, 2$ ist dann z_i keine Tangente von R, sodass also $r\,s_2\,z_i$ cosimplizial liegen (Satz 153.2). Der Plexus $\mathcal{L}(r\,s_2\,z_0)$ inzidiert mit Q_0, denn er ist von ihm verschieden (da $r\,r_1$ windschief liegen und $r_1 \in Q_0$), hat aber zwei Strahlen s_2 und z_0 mit ihm gemein (Korollar 73). Angenommen $z_0\,z_2$ liegen windschief. Dann inzidieren auch $\mathcal{L}(r\,s_2\,z_0), \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2)$ (wiederum Korollar 73) und mit Korollar 75 folgt $Q_0 \sim \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2)$, mithin $P_2 \not\sim \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2)$ gemäß (II.97). Somit ist $P_2 \cap \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2)$ ein Zyklus (denn $z_2 \in P_2 \cap \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2)$) und wegen $P_2 \cap \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2) \subseteq P_2 \cap \mathcal{L}(s_2) = Z_2$ folgt $P_2 \cap \mathcal{L}(r\,s_2\,z_2) = Z_2$, also insbesondere $r \in \mathcal{L}(Z_2)$, im Widerspruch zu $r \neq r_2$ und $R \cap \mathcal{L}(Z_2) = \{r_2\}$. Also treffen sich $z_0\,z_2$.

3. Fall $P_1 \sim P_2$: Sei $s_0 \in S$ ein von s_1 und s_2 verschiedener Strahl (Satz 149) und sei P_0 ein Plexus mit $s_1 \in P_0$ und $P_0 \not\sim P_1$ (Satz 81) und mithin $P_0 \not\sim P_2$. Dann glit $s_0 \notin P_0$ (da $s_0\,s_1$ windschief liegen), sodass also $Z_0 := P_0 \cap \mathcal{L}(s_0)$ ein zu R quasiperspektiver Zyklus ist. Nach 2. sind
$$\pi^R_{Z_0} \circ (\pi^R_{Z_1})^{-1} : Z_1 \to Z_0 \quad \text{und} \quad \pi^R_{Z_2} \circ (\pi^R_{Z_0})^{-1} : Z_0 \to Z_2$$
Projektivitäten, also auch deren Kompositum $\pi^R_{Z_2} \circ (\pi^R_{Z_1})^{-1}$.

4. Für den Fall $s_1 \neq s_2$ ist die Behauptung nun gezeigt. Der Fall $s_1 = s_2$ lässt sich darauf leicht zurückführen: Sei $s_0 \in S$ von $s_1 = s_2$ verschieden und sei P_0 ein beliebiger Plexus mit $s_1 \in P_0$ und mithin $s_0 \notin P_0$. Dann ist $Z_0 := P_0 \cap \mathcal{L}(s_0)$ ein zu R quasiperspektiver Zyklus und wegen $s_0 \neq s_1$ bzw. $s_0 \neq s_2$ erhalten wir Projektivitäten
$$\pi^R_{Z_0} \circ (\pi^R_{Z_1})^{-1} : Z_1 \to Z_0 \quad \text{und} \quad \pi^R_{Z_2} \circ (\pi^R_{Z_0})^{-1} : Z_0 \to Z_2$$
und damit die Behauptung. ■

Ist R eine Regelschar, so bezeichne $\mathcal{H}_R$ die vierstellige Relation auf R gegeben durch

$\mathcal{H}_R\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4$:gdw. Es gibt einen zu R quasiperspektiven Zyklus Z sodass $\mathcal{H}\, \pi^R_Z(r_1)\, \pi^R_Z(r_2)\, \pi^R_Z(r_3)\, \pi^R_Z(r_4)$.

162 Satz

Seien R eine Regelschar und Z ein zu R quasiperspektiver Zyklus. Dann ist $\pi_R^Z : R \to Z$ ein $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus.

Beweis: Nach Satz 160 ist $\pi_R^Z : R \to Z$ bijektiv. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{H}_R\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}\, \pi_Z^R(r_1)\, \pi_Z^R(r_2)\, \pi_Z^R(r_3)\, \pi_Z^R(r_4), \qquad \forall r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$$

Die Implikation „$\Rightarrow$“ folgt aus Lemma 161 und der Tatsache, dass Projektivitäten zwischen Zyklen $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}$-Isomorphismen sind (Korollar 138). Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist trivial. ∎

Die Aussage von Metatheorem 146 über $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismen zwischen Zyklen lässt sich auf $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_{R'}$-Isomorphismen zwischen Regelscharen R und R' übertragen:

163 Metatheorem

Seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ zwei Strahlenräume. Seien R eine Regelschar in $\mathcal{R}$ und R' eine Regelschar in $\mathcal{R}'$ und $r_1, r_2, r_3 \in R$ sowie $r_1', r_2', r_3' \in R'$ jeweils drei distinkte Strahlen. Dann gibt es genau einen $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_{R'}$-Isomorphismus $\pi : R \to R'$ mit

$$\pi(r_1) = r_1' \quad \pi(r_2) = r_2' \quad \pi(r_3) = r_3'.$$

Beweis: Zur Existenz: Seien Z ein zu R sowie Z' ein zu R' quasiperspektiver Zyklus (die Existenz solcher Zyklen ist klar). Für $i = 1, 2, 3$ sei $z_i := \pi_Z^R(r_i)$ und $z_i' := \pi_{Z'}^{R'}(r_i')$. Da $\pi_Z^R : R \to Z$ und $\pi_{Z'}^{R'} : R' \to Z'$ bijektiv sind, sind $z_1, z_2, z_3 \in Z$ sowie $z_1', z_2', z_3' \in Z'$ jeweils drei distinkte Strahlen. Gemäß Theorem 146 gibt es genau einen $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismus[14] $\pi_0 : Z \to Z'$ mit

$$\pi_0(z_i) = z_i', \qquad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{II.99}$$

Die Abbildung $\pi := (\pi_{Z'}^{R'})^{-1} \circ \pi_0 \circ \pi_Z^R : R \to R'$ erfüllt die Bedingung $\pi(r_i) = r_i'$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und ist nach Satz 162 ein $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_{R'}$-Isomorphismus.

Zur Eindeutigkeit: Ist $\pi' : R \to R'$ ein beliebiger weiterer solcher $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_{R'}$-Isomorphismus, also mit $\pi'(r_i) = r_i'$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, so ist $\pi_0' := \pi_{Z'}^{R'} \circ \pi' \circ (\pi_Z^R)^{-1}$ ein $\mathcal{H}$-$\mathcal{H}'$-Isomorphismus mit $\pi_0'(z_i) = z_i'$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und mithin $\pi_0' = \pi_0$ wegen der Eindeutigkeit von π_0 in (II.99). Daraus folgt $\pi' = \pi$. ∎

164 Satz

Seien R, S konjugierte Regelscharen und P ein zu R disjunkter Plexus. Dann ist

$$\{\langle r, s\rangle \in R \times S\, ;\ P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)\}$$

der Graph eines $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_S$-Isomorphismus $\pi : R \to S$. Für $r \in R$ und $s \in S$ gilt

$$\pi(r) = s \quad \textit{gdw. es einen Strahl } t \in P \textit{ gibt, sodass } r\, s\, t \textit{ cozyklisch liegen.}$$

[14] Es bezeichne $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$ die Harmonische Relation auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{R}'$.

Beweis: Beachte im Folgenden, dass P nach Satz 155 auch zu S disjunkt ist. Wir zeigen zunächst, dass für $r \in R$ und $s \in S$:

$$P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in P : r\,s\,t \text{ liegen cozyklisch.} \tag{II.100}$$

Zu „$\Rightarrow$“: Sei $t \in P$ eine r treffende Tangente von R (Satz 156); dann ist $t \in P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)$, d.h. t trifft auch s; nach Satz 153.4 liegen $r\,s\,t$ cozyklisch. Zu „$\Leftarrow$“: Sei $t \in P$ sodass $r\,s\,t$ cozyklisch liegen; es ist t von r, s verschieden, da $P \cap R = P \cap S = \emptyset$; es folgt $\mathcal{L}(r\,t) = \mathcal{L}(r\,s\,t) = \mathcal{L}(s\,t)$ (Satz 50) und mithin $P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(r\,t) = P \cap \mathcal{L}(s\,t) = P \cap \mathcal{L}(s)$ (die erste und letzte Gleichheit gilt wegen $t \in P$).

Wir zeigen nun, dass $G := \{\langle r, s\rangle \in R \times S\,;\ P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)\}$ eine eineindeutige Korrespondenz zwischen R und S ist. Sei dazu $r \in R$ beliebig. Nach Satz 156 enthält P eine r treffende Tangente t von R; es gibt also einen Strahl $s \in S$, sodass $r\,s\,t$ cozyklisch liegen, mithin $P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)$ gemäß (II.100). Da t echte Tangente von S ist (denn $P \cap R = \emptyset$), trifft t außer s keinen weiteren Strahl s' von S (Satz 153.3), d.h. es gilt $t \notin P \cap \mathcal{L}(s')$ und damit $P \cap \mathcal{L}(r) \neq P \cap \mathcal{L}(s')$ für $s' \in S$ mit $s' \neq s$. Also ist G eine eindeutige Korrespondenz von R nach S. Symmetrisch analog folgt, dass G^{-1} eine eindeutige Korrespondenz von S nach R ist. Damit ist G der Graph einer Bijektion $\pi : R \to S$.

Sei nun $r_0 \in R$ und $s_0 := \pi(r_0)$. Dann ist $Z := P \cap \mathcal{L}(r_0) = P \cap \mathcal{L}(s_0)$ ein zu R und zu S quasiperspektiver Zyklus. Nach Satz 162 ist $\pi^R_Z : R \to Z$ ein $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus und $\pi^S_Z : S \to Z$ ein $\mathcal{H}_S$-$\mathcal{H}$-Isomorphismus. Wir zeigen $\pi = (\pi^S_Z)^{-1} \circ \pi^R_Z$, womit dann π ein $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_S$-Isomorphismus ist. Sei dazu $r \in R \backslash r_0$ beliebig und sei $s := \pi(r)$. Wegen der Injektivität von π ist $s \neq s_0$. Der Strahl $z := \pi^R_Z(r)$ trifft r und liegt in $Z \subseteq P$; es folgt $z \in P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)$, d.h. z trifft auch s; per Definition von π^S_Z folgt $\pi^S_Z(s) = z$ (siehe Satz 160.4 und beachte $s \neq s_0$) und somit $(\pi^S_Z)^{-1}(\pi^R_Z(r)) = (\pi^S_Z)^{-1}(z) = s = \pi(r)$. Also stimmen π und $(\pi^S_Z)^{-1} \circ \pi^R_Z$ auf $R \backslash r_0$ überein und da beide Abbildung Bijektionen $R \to S$ sind, folgt $\pi = (\pi^S_Z)^{-1} \circ \pi^R_Z$. ■

Sind R, S konjugierte Regelscharen und P ein zu R disjunkter Plexus, so bezeichne

$$\pi^R_P$$

den in Satz 164 beschriebenen $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_S$-Isomorphismus $R \to S$. Der Plexus P ist ein **Projektionsplexus** für π^R_P.

165 Satz

Sei $\pi : R \to S$ ein $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_S$-Isomorphismus zwischen konjugierten Regelscharen R und S. Dann gibt es genau zwei Projektionsplexi für π, und diese sind zueinander disjunkt.

Beweis: Seien $r_1, r_2, r_3 \in R$ drei distinkte Strahlen und sei $s_i := \pi(r_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann sind auch s_1, s_2, s_3 distinkt und mit Lemma 157 folgt die Existenz von echten Tangente $t_1, t_2, t_3, t'_1, t'_2, t'_3$ von R, sodass $t_1\,t_2\,t_3$ und $t'_1\,t'_2\,t'_3$ jeweils cosimplizial liegen, die Plexi $P := \mathcal{L}(t_1\,t_2\,t_3)$ und $P' := \mathcal{L}(t'_1\,t'_2\,t'_r)$ disjunkt sind, und $r_i\,s_i\,t_i$ sowie $r_i\,s_i\,t'_i$ cozyklisch liegen für $i \in \{1, 2, 3\}$. Der Plexus P enthält keinen Strahl r von R, denn für $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $r_i \neq r$ wäre sonst r ein zweiter t_i treffender Strahl von R, aber t_i trifft als echte Tangente von R nur einen Strahl von R (Satz 153.3). Also ist P zu R und mithin zu S disjunkt (Satz 155). Analog folgt, dass auch P' zu R und S disjunkt ist. Mit Satz 164 folgt

$$\pi^R_P(r_i) = s_i \quad \text{und} \quad \pi^R_{P'}(r_i) = s_i \qquad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}$$

und somit $\pi^R_P = \pi^R_{P'} = \pi$ gemäß Theorem 163. Also sind P und P' Projektionsplexi für π.

Sei nun Q ein beliebiger Projektionsplexus für π, sodass also insbesondere

$$\pi_Q^R(r_i) = s_i \qquad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Dann gibt es nach Satz 164 Strahlen $t_1'', t_2'', t_3'' \in Q$, sodass $r_i\, s_i\, t_i''$ cozyklisch liegen für $i = 1, 2, 3$. Gemäß Lemma 157 folgt $\{t_1'', t_2'', t_3''\} = \{t_1, t_2, t_3\}$ oder $\{t_1'', t_2'', t_3''\} = \{t_1', t_2', t_3'\}$ (beachte, dass $t_1''\, t_2''\, t_3''$ als Strahlen von Q coplektisch liegen) und somit $Q = \mathcal{L}(t_1\, t_2\, t_3) = P$ oder $Q = \mathcal{L}(t_1'\, t_2'\, t_3') = P'$. Also sind P und P' die einzigen Projektionsplexi für π. ■

II.11. Der Kategorizitätsbeweis

166 Satz

Seien R und S konjugierte Regelscharen und seien P, Q zwei Plexi mit $P \not\sim Q$.

1. *Gibt es Strahlen $r \in P \cap R$ und $s \in P \cap S$, sowie $r' \in Q \cap R$ und $s' \in Q \cap S$, so gilt:*

$$P, Q \ \textit{inzidieren} \qquad \textit{gdw.} \qquad r = r' \ \textit{oder} \ s = s'.$$

2. *Ist $P \cap R = \emptyset$ und gibt es Strahlen $r \in Q \cap R$ und $s \in Q \cap S$, so gilt:*

$$P, Q \ \textit{inzidieren} \qquad \textit{gdw.} \qquad \pi_P^R(r) = s.$$

3. *Ist $P \cap R = \emptyset$ und $Q \cap R = \emptyset$, so gilt:*

$$P, Q \ \textit{inzidieren} \qquad \textit{gdw.} \qquad (\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R : R \to R \ \textit{ist eine Involution.}$$

Beweis: Nach Korollar 76 genügt es wegen $P \not\sim Q$ für die Implikationen „$\Leftarrow$" jeweils zu zeigen, dass $P \cap Q \neq \emptyset$.

1. Zu „$\Rightarrow$": Es ist $P \cap Q \subseteq \mathcal{L}(r\, s) \cap \mathcal{L}(r'\, s') = \mathcal{L}(r\, s\, r'\, s')$, d.h. $\mathcal{L}(r\, s\, r'\, s')$ enthält einen Zyklus (da P, Q nach Voraussetzung inzidieren). Wäre $r \neq r'$ und $s \neq s'$, so lägen $r\, r'$ und $s\, s'$ windschief und $\mathcal{L}(r\, s\, r'\, s')$ enthielte gemäß Lemma 86 nur zwei Strahlen, was unmöglich ist, da Zyklen stets mehr als zwei Strahlen enthalten. Die Implikation „$\Leftarrow$" ist trivial, da $r \in P \cap Q$ oder $s \in P \cap Q$.

2. Zu „$\Rightarrow$": Sei $P \cap Q$ ein Zyklus. Wegen $P \cap Q \subseteq P \cap \mathcal{L}(r)$ und $P \cap Q \subseteq P \cap \mathcal{L}(s)$ folgt $P \cap \mathcal{L}(r) = P \cap \mathcal{L}(s)$ (denn wegen $P \cap R = P \cap S = \emptyset$ sind auch $P \cap \mathcal{L}(r)$ und $P \cap \mathcal{L}(s)$ Zyklen; beachte Satz 155), also $\pi_P^R(r) = s \in Q$. Zu „$\Leftarrow$": Sei gemäß Satz 164 $t \in P$ sodass $r\, s\, t$ cozyklisch liegen. Dann liegt mit r und s auch t in Q, d.h. $t \in P \cap Q$.

3. Zu „$\Rightarrow$": Sei gemäß Voraussetzung $Z := P \cap Q$ ein Zyklus. Mit P ist auch Z zu R disjunkt. Sei $z \in Z$ eine Sekante von R gemäß Satz 158. Dann trifft z zwei distinkte Strahlen $r_1, r_2 \in R$ und zwei distinkte Strahlen $s_1, s_2 \in S$ (Satz 154). Da z Sekante von R ist, liegen $r_i\, z\, s_j$ cosimplizial für $i, j \in \{1, 2\}$ (Satz 153.2). Es gilt $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_1) \not\sim \mathcal{L}(r_1\, z\, s_2)$ denn die beiden Plexi haben zwei Strahlen gemein (nämlich r_1 und z) und sind distinkt (da $s_1\, s_2$ windschief); analog folgt $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \not\sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_2)$ und $\mathcal{L}(r_2\, z\, s_2) \not\sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_1)$, d.h. wir haben zwei Plexi $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_1) \sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_2)$ der einen Art und zwei Plexi $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_1)$ der anderen Art. Wegen $P \not\sim Q$ können wir aus Symmetriegründen o.E. annehmen, dass

$$\mathcal{L}(r_1\, z\, s_1) \not\sim P \not\sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \not\sim Q \not\sim \mathcal{L}(r_2\, z\, s_1)$$

(andernfalls vertausche P, Q). Für $i \in \{1,2\}$ inzidieren $P, \mathcal{L}(r_i\, z\, s_i)$ (denn sie sind ungleichartig und haben den Strahl z gemein). Gemäß 2. (angewendet auf die Plexi P und $\mathcal{L}(r_i\, z\, s_i)$) folgt $\pi_P^R(r_i) = s_i$. Für i, j mit $\{i,j\} = \{1,2\}$ folgt analog, dass $Q, \mathcal{L}(r_i\, z\, s_j)$ inzidieren und mithin $\pi_Q^R(r_i) = s_j$. Also gilt

$$(\pi_Q^R)^{-1}(\pi_P^R(r_1)) = (\pi_Q^R)^{-1}(s_1) = r_2 \quad \text{und} \quad (\pi_Q^R){-}1(\pi_P^R(r_2)) = (\pi_Q^R)^{-1}(s_2) = r_1.$$

Sei Z ein zu R quasiperspektiver Zyklus und $z_i := \pi_Z^R(r_i)$ für $i = 1, 2$. Dann gilt für $\pi := \pi_Z^R \circ (\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R \circ (\pi_Z^R)^{-1}$

$$z_1\, z_2 \overset{\pi}{\barwedge} z_2\, z_1$$

und mit Korollar 140 folgt, dass $\pi : Z \to Z$ eine Involution ist. Daraus ergibt sich leicht, dass auch $(\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R : R \to R$ eine Involution ist.

Zu „$\Leftarrow$“: Seien $r_1, r_2 \in R$ distinkte Strahen mit $((\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R)(r_1) = r_2$ und mithin $((\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R)(r_2) = r_1$. Für $s_1 := \pi_P^R(r_1)$ und $s_2 := \pi_P^R(r_2)$ gilt dann $(\pi_Q^R)^{-1}(s_1) = r_2$ und $(\pi_Q^R)^{-1}(s_2) = r_1$, d.h.

$$Q \cap \mathcal{L}(r_2) = Q \cap \mathcal{L}(s_1) \quad \text{und} \quad Q \cap \mathcal{L}(r_1) = Q \cap \mathcal{L}(s_2).$$

Sei $z \in Q \cap \mathcal{L}(r_1\, r_2)$ gemäß Lemma 68. Dann ist $z \in Q \cap \mathcal{L}(r_2) = Q \cap \mathcal{L}(s_1)$ und $z \in Q \cap \mathcal{L}(r_1) = Q \cap \mathcal{L}(s_2)$, d.h. z trifft neben r_1 und r_2 auch s_1 und s_2. Wegen $Q \cap \mathcal{L}(r_1) = Q \cap \mathcal{L}(s_2)$ und $z \in Q$ trifft jeder Strahl von $Q \cap \mathcal{L}(r_1)$ auch s_2 und z, d.h. es gilt $Q \cap \mathcal{L}(r_1) = Q \cap \mathcal{L}(r_1\, z\, s_2)$. Es folgt

$$Q \not\sim \mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \tag{II.101}$$

(es liegen $r_1\, z\, s_2$ cosimplizial, da $s_1, s_2 \in \mathcal{L}(r_1\, z)$ windschief liegen). Für $i = 1, 2$ sei nun $t_i \in P$ sodass $r_i\, s_i\, t_i$ cozyklisch liegen (existiert nach Satz 164). Dann trifft z mit r_i und s_i auch t_i. Es ist t_i echte Tangente von R und von S (da $Q \cap S = Q \cap R = \emptyset$), trifft also neben r_i keinen weiteren Strahl von R und neben s_i keinen weiteren Strahl von S (Satz 153.3). Insbesondere gilt $t_1 \neq t_2$ und es liegen $t_1\, s_2$ sowie $t_2\, r_1$ windschief. Es folgt $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \not\sim \mathcal{L}(r_1\, z\, t_1) \not\sim \mathcal{L}(t_2\, z\, t_1)$, also $\mathcal{L}(r_1\, z\, s_2) \sim \mathcal{L}(t_2\, z\, t_1)$ und mithin $Q \not\sim \mathcal{L}(t_2\, z\, t_1)$ gemäß (II.101). Da nach Voraussetzung $P \not\sim Q$, folgt $P \sim \mathcal{L}(t_2\, z\, t_1)$ und mithin $P = \mathcal{L}(t_2\, z\, t_1)$, da $t_1, t_2 \in P$. Insbesondere ist $z \in P$, und somit $z \in P \cap Q$. ∎

167 Metatheorem (Kategorizität)

Das Axiomensystem S *ist kategorisch.*

Beweis: Die Existenz eines Modells $\langle X^*, \mathfrak{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle$ von S wurde in Kapitel I gezeigt. Es folgt der Beweis der Eindeutigkeitsaussage.

1. Seien zwei beliebige Modelle $\mathcal{R} := \langle X, \mathfrak{T}, \mathcal{T} \rangle$ und $\mathcal{R}' := \langle X', \mathfrak{T}', \mathcal{T}' \rangle$ von S gegeben. Seien $s_1, s_2, s_3 \in X$ gemäß Satz 147 drei paarweise windschiefe Strahlen und $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$ drei distinkte Strahlen, sodass also $R := \mathcal{L}(s_1\, s_2\, s_3)$ und $S := \mathcal{L}(r_1\, r_2\, r_3)$ konjugierte Regelscharen bilden (Theorem 150). Seien analog $s_1', s_2', s_3' \in X'$ drei paarweise windschiefe Strahlen und $r_1', r_2', r_3' \in \mathcal{L}(s_1'\, s_2'\, s_3')$ drei distinkte Strahlen, und seien $R' := \mathcal{L}(s_1'\, s_2'\, s_3')$ und $S' := \mathcal{L}(r_1'\, r_2'\, r_3')$ die entsprechenden konjugierten Regelscharen. Wähle jeweils mit Metatheorem 163 einen $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_{R'}$-Isomorphismus $\varphi_R : R \to R'$ und einen $\mathcal{H}_S$-$\mathcal{H}_{S'}$-Isomorphismus $\varphi_S : S \to S'$ mit

$$\varphi_R(r_i) = r_i' \quad \text{und} \quad \varphi_S(s_i) = s_i' \qquad \text{für } i \in \{1,2,3\}.$$

Wir werden φ_R und φ_S zu einem $\mathfrak{T}$-$\mathfrak{T}'$-Isomorphismus $\varphi : X \to X'$ fortsetzen. Gemäß Theorem 136 ist dann φ ein Isomorphismus zwischen den Strukturen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$.

2. Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der Plexi von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{P}'$ die Menge der Plexi von $\mathcal{R}'$. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, mit der Eigenschaft dass

$$P \sim Q \Leftrightarrow P \sim_{\mathcal{R}} Q \text{ für } P, Q \in \mathcal{P} \quad \text{und} \quad P' \sim Q' \Leftrightarrow P' \sim_{\mathcal{R}'} Q' \text{ für } P', Q' \in \mathcal{P}',$$

wobei $\sim_{\mathcal{R}}$ bzw. $\sim_{\mathcal{R}'}$ die Äquivalenzrelation der Gleichartigkeit von Plexi in $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{R}'$ bezeichnet (es gibt offensichtlich genau zwei Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ mit dieser Eigenschaft).

Wir zeigen nun, dass durch

$$P \mapsto \ \iota P' \in \mathcal{P}' : \, P' \sim P \wedge \begin{cases} P' \cap R' = \emptyset \ \wedge \ \pi^{R'}_{P'} = \varphi_S \circ \pi^R_P \circ (\varphi_R)^{-1}, & \text{falls } P \cap R = \emptyset \\ \exists r \in R, s \in S : r, s \in P \wedge \varphi_R(r), \varphi_S(s) \in P', & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Bijektion $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ gegeben ist.

Zur Wohldefiniertheit: Sei $P \in \mathcal{P}$ beliebig. Ist $P \cap R = \emptyset$, so ist $\varphi_S \circ \pi^R_P \circ (\varphi_R)^{-1} : R' \to S'$ ein $\mathcal{H}_{R'}$-$\mathcal{H}_{S'}$-Isomorphismus und nach Satz 165 hat dieser in $\mathcal{R}'$ von jeder Art genau einen Projektionsplexus P', d.h. es gibt genau einen zu R' disjunkten Plexus $P' \in \mathcal{P}'$ mit $P' \sim P$ und $\pi^{R'}_{P'} = \varphi_S \circ \pi^R_P \circ (\varphi_R)^{-1}$. Ist hingegen $P \cap R \neq \emptyset$, so enthält P genau einen Strahl r von R und nach Satz 155 auch genau einen Strahl s von S und nach Satz 78 (und Definition von $\sim$) gibt es genau einen Plexus $P' \in \mathcal{P}'$ mit $P' \sim P$ und $\varphi_R(r), \varphi_S(s) \in P'$. Also ist $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ eine wohldefinierte Abbildung. Per Definition gilt:

$$P \sim \Phi(P) \quad \text{und} \quad P \cap R = \emptyset \Leftrightarrow \Phi(P) \cap R' = \emptyset, \qquad \forall P \in \mathcal{P}. \tag{II.102}$$

Zur Injektivität: Seien $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ beliebig und angenommen $\Phi(P_1) = \Phi(P_2) =: P'$. Dann gilt $P_1 \sim P' \sim P_2$. Ist $P' \cap R' = \emptyset$, so gilt nach (II.102) auch $P_1 \cap R = P_2 \cap R = \emptyset$ und wir haben

$$\varphi_S \circ \pi^R_{P_1} \circ (\varphi_R)^{-1} = \pi^{R'}_{P'} = \varphi_S \circ \pi^R_{P_2} \circ (\varphi_R)^{-1}.$$

Wegen der Bijektivität von φ_R und φ_S folgt $\pi^R_{P_1} = \pi^R_{P_2}$ und mithin $P_1 = P_2$ gemäß Satz 165, da $P_1 \sim P_2$. Ist $P' \cap R' \neq \emptyset$, so gilt für $i \in \{1, 2\}$ auch $P_i \cap R \neq \emptyset$, d.h. es gibt Strahlen $\hat{r}_i \in R$ und $\hat{s}_i \in S$ mit $\hat{r}_i, \hat{s}_i \in P_i$ und $\varphi_R(\hat{r}_i), \varphi_S(\hat{s}_i) \in P'$; es folgt $\varphi_R(\hat{r}_1) = \varphi_R(\hat{r}_2)$ sowie $\varphi_S(\hat{s}_1) = \varphi_S(\hat{s}_2)$ (da die Strahlen von R' bzw. S' nach Satz 148 paarweise windschief liegen), mithin $\hat{r}_1 = r_2$ sowie $\hat{s}_1 = \hat{s}_2$, und damit $P_1 = P_2$, da $P_1 \sim P_2$.

Zur Surjektivität: Sei $P' \in \mathcal{P}'$ beliebig. Ist $P' \cap R' = \emptyset$, so haben wir einen $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_S$-Isomorphismus $(\varphi_S)^{-1} \circ \pi^{R'}_{P'} \circ \varphi_R : R \to S$ in $\mathcal{R}$ und dieser hat nach Satz 165 einen zu P' „gleichartigen" Projektionsplexus P, d.h. eines Plexus $P \in \mathcal{P}$ mit $P \sim P'$ und $\pi^R_P = (\varphi_S)^{-1} \circ \pi^{R'}_{P'} \circ \varphi_R$. Dann gilt offensichtlich $\Phi(P) = P'$. Ist $P' \cap R' \neq \emptyset$, so gibt es Strahlen $r' \in R'$ und $s' \in S'$ mit $r', s' \in P'$. Sei $P \in \mathcal{P}$ gemäß Satz 78 ein Plexus mit $P \sim P'$ und $(\varphi_R)^{-1}(r'), (\varphi_S)^{-1}(s') \in P$. Dann gilt offensichtlich $\Phi(P) = P'$.

3. Wir zeigen nun, dass für Plexi $P, Q \in \mathcal{P}$:

$$P, Q \text{ inzidieren} \qquad \text{gdw.} \qquad \Phi(P), \, \Phi(Q) \text{ inzidieren.} \tag{II.103}$$

Im Fall $P \sim Q$ gilt nach (II.102) auch $\Phi(P) \sim \Phi(Q)$, d.h. beide Seiten der Äquivalenz sind falsch. Wir können also annehmen, dass $P \not\sim Q$ und mithin auch $\Phi(P) \not\sim \Phi(Q)$ (wiederum nach (II.102)).

Fall $P \cap R \neq \emptyset$ und $Q \cap R \neq \emptyset$: Nach Satz 155 gilt dann auch $P \cap S \neq \emptyset$ und $Q \cap S \neq \emptyset$. Es gibt also Strahlen $\hat{r}_1, \hat{r}_2 \in R$ und $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in S$ mit $\hat{r}_1, \hat{s}_1 \in P$ und $\hat{r}_2, \hat{s}_2 \in Q$. Mit Satz 166.1

folgt

$$\begin{aligned} P,Q \text{ inzidieren } &\text{ gdw. } \hat{r}_1 = \hat{r}_2 \text{ oder } \hat{s}_1 = \hat{s}_2 \\ &\text{ gdw. } \varphi_R(\hat{r}_1) = \varphi_R(\hat{r}_2) \text{ oder } \varphi_S(\hat{s}_1) = \varphi_S(\hat{s}_2) \\ &\text{ gdw. } \Phi(P), \Phi(Q) \text{ inzidieren.} \end{aligned}$$

Fall $P \cap R = \emptyset$ und $Q \cap R \neq \emptyset$: Sei $r \in Q \cap R$ und sei $s \in Q \cap S$ gemäß Satz 155. Nach (II.102) gilt $\Phi(P) \cap R' = \emptyset$, und wegen

$$\varphi_S \circ \pi_P^R = \pi_{\Phi(P)}^{R'} \circ \varphi_R$$

folgt mit Satz 166.2:

$$\begin{aligned} P,Q \text{ inzidieren } &\text{ gdw. } \pi_P^R(r) = s \\ &\text{ gdw. } \varphi_S(\pi_P^R(r)) = \varphi_S(s) \\ &\text{ gdw. } \pi_{\Phi(P)}^{R'}(\varphi_R(r)) = \varphi_S(s) \\ &\text{ gdw. } \Phi(P), \Phi(Q) \text{ inzidieren.} \end{aligned}$$

Der Fall $P \cap R \neq \emptyset$ und $Q \cap R = \emptyset$ folgt symmetrisch analog (vertausche P, Q).

Fall $P \cap R = Q \cap R = \emptyset$: Dann gilt nach (II.102) auch $\Phi(P) \cap R' = \Phi(Q) \cap R' = \emptyset$ und wegen

$$\varphi_R \circ (\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R \circ (\varphi_R)^{-1} = (\varphi_S \circ (\pi_Q^R) \circ (\varphi_R)^{-1})^{-1} \circ \varphi_S \circ \pi_P^R \circ (\varphi_R)^{-1} = (\pi_{\Phi(Q)}^{R'})^{-1} \circ \pi_{\Phi(P)}^{R'}$$

folgt mit Satz 166.3:

$$\begin{aligned} P,Q \text{ inzidieren } &\text{ gdw. } (\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R : R \to R \text{ ist Involution} \\ &\text{ gdw. } \varphi_R \circ (\pi_Q^R)^{-1} \circ \pi_P^R \circ (\varphi_R)^{-1} : R' \to R' \text{ ist Involution} \\ &\text{ gdw. } (\pi_{\Phi(Q)}^{R'})^{-1} \circ \pi_{\Phi(P)}^{R'} : R' \to R' \text{ ist Involution} \\ &\text{ gdw. } \Phi(P), \Phi(Q) \text{ inzidieren.} \end{aligned}$$

4. Wir zeigen nun, dass durch

$$x \mapsto \iota x' : \forall P \in \mathcal{P}(x \in P \Rightarrow x' \in \Phi(P))$$

eine wohldefinierte Abbildung $\varphi : X \to X'$ gegeben ist.

Sei dazu $x \in X$ beliebig. Nach Satz 81 gibt es zwei distinkte gleichartige Plexi $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, welche x enthalten. Dann sind $\Phi(P_1)$ und $\Phi(P_2)$ distinkte gleichartige Plexi in $\mathcal{R}'$, d.h. es gibt einen Strahl $x' \in X'$ mit $\Phi(P_1) \cap \Phi(P_2) = \{x'\}$. Es ist zu zeigen, dass für $P \in \mathcal{P}$ beliebig:

$$x \in P \Rightarrow x' \in \Phi(P).$$

Fall $P \not\sim P_1$ und mithin $P \not\sim P_2$: Für $i = 1, 2$ inzidieren dann P, P_i (denn $x \in P \cap P_i$) und somit nach (II.103) auch $\Phi(P), \Phi(P_i)$; wegen $\Phi(P_1) \cap \Phi(P_2) = \{x'\}$ folgt $x' \in \Phi(P)$ gemäß Satz 74.

Fall $P \sim P_1$ und somit $P \sim P_2$: Seien Q_1, Q_2 zwei distinkte Plexi, mit $Q_i \not\sim P$ und $x \in Q_i$ für $i = 1, 2$ (Satz 81). Dann gilt auch $Q_i \not\sim P_1$ und somit $x' \in \Phi(Q_i)$ gemäß dem soeben gezeigten Fall. Ferner inzidieren P, Q_i (da $x \in P \cap Q_i$) und somit nach (II.103) auch $\Phi(P), \Phi(Q_i)$. Mit Satz 74 folgt $x' \in \Phi(P)$.

5. Wir zeigen schließlich, dass $\varphi : X \to X'$ ein $\mathfrak{T}$-$\mathfrak{T}'$-Isomorphismus ist. Zunächst:

$$x \in P \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \in \Phi(P), \qquad \forall x \in X, P \in \mathcal{P}. \tag{II.104}$$

Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist trivial. Zu „$\Leftarrow$“: Sei $x \notin P$. Seien Q_1, Q_2 zwei distinkte Plexi mit $Q_i \not\sim P$ und $x \in Q_i$ (Satz 81). Dann gilt $Q_1 \sim Q_2$ und mithin $Q_1 \cap Q_2 = \{x\}$. Nach Satz 74 inzidiert dann einer der beiden Plexi Q_1 oder Q_2 nicht mit P, o.E. etwa Q_1. Es sind also P, Q_1 ungleichartig und inzidieren nicht. Nach (II.102) und (II.103) sind somit auch $\Phi(P), \Phi(Q_1)$ ungleichartig und inzidieren nicht, d.h. $\Phi(P) \cap \Phi(Q_1) = \emptyset$. Wegen $\varphi(x) \in \Phi(Q_1)$ folgt $\varphi(x) \notin \Phi(P)$.

Zur Injektivität: Seien $x, y \in X$ zwei distinkte Strahlen. Sei P ein Plexus mit $x \in P$ und $y \notin P$ (existiert nach Satz 81 und Satz 78). Wegen (II.104) folgt $\varphi(x) \in \Phi(P)$ und $\varphi(y) \notin \Phi(P)$, also insbesondere $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Zur Surjektivität: Sei $x' \in X'$ beliebig. Seien $P_1', P_2' \in \mathcal{P}'$ sodass $P_1' \cap P_2' = \{x'\}$ (Satz 81). Dann sind $P_1 := \Phi^{-1}(P_1')$ und $P_2 := \Phi^{-1}(P_2')$ zwei distinkte gleichartige Plexi, d.h. es gibt einen Strahl x mit $P_1 \cap P_2 = \{x\}$. Mit (II.104) folgt $\varphi(x) \in \Phi(P_1) \cap \Phi(P_2) = P_1' \cap P_2' = \{x'\}$, also $\varphi(x) = x'$.

Zur Isomorphie: Für $x, y \in X$ gilt nach Satz 63 und wegen (II.104):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}\, x\, y \;\; &\text{gdw. } \exists P \in \mathcal{P} : x, y \in P \\
&\text{gdw. } \exists P \in \mathcal{P} : \varphi(x), \varphi(y) \in \Phi(P) \\
&\text{gdw. } \exists P' \in \mathcal{P}' : \varphi(x), \varphi(y) \in P' \\
&\text{gdw. } \mathfrak{T}'\, \varphi(x)\, \varphi(y).
\end{aligned}$$

■

Anhang

168 Satz (Basiskriterium)

Eine Menge $\mathcal{M}$ von Teilmengen einer Menge X ist Basis einer Topologie auf X, falls sie eine Überdeckung von X bildet und es zu je zwei $A, B \in \mathcal{M}$ und jedem $x \in A \cap B$ ein $C \in \mathcal{M}$ gibt mit $x \in C$ und $C \subseteq A \cap B$.

Für den Beweis, siehe Theorem IX.1.12 in [16].

Ein **angeordneter Körper** ist ein Paar $\langle \mathcal{K}, P \rangle$, wobei $\mathcal{K} = \langle K, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ein Körper ist und P ein **Positivitätsbereich** für $\mathcal{K}$, d.h. eine Teilmenge P von $K \backslash \mathbf{0}$ mit folgenden Eigenschaften[1]:

1. Für alle $a \in K \backslash \mathbf{0}$ liegt entweder a oder $-a$ in P.
2. Für alle $a, b \in P$ liegen $a + b$ und $a \cdot b$ in P.

Wie man leicht überprüft, wird dann auf K durch

$$a < b \quad \text{:gdw.} \quad (-a) + b \in P \tag{A.1}$$

eine strenge Totalordnung definiert. Ferner gilt offensichtlich stets

$$\mathbf{1} \in P \qquad \text{und damit} \qquad a \in P \Rightarrow a^{-1} \in P, \tag{A.2}$$

sowie für $a, b, c \in K$:

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c \quad \text{und} \\ a < b \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \qquad \text{falls } c \in P. \end{aligned}$$

Ein angeordneter Körper $\langle \langle K, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle, P \rangle$ ist **vollständig angeordnet**, falls (bezüglich der durch (A.1) gegebenen Ordnung) jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von P ein Supremum in K besitzt.

169 Theorem

Je zwei vollständig angeordnete Körper sind isomorph.

Beweis:

1. Sei zunächst $\langle \mathcal{K}, P \rangle$ ein beliebiger vollständig angeordneter Körper, $\mathcal{K} = \langle K, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$. Sei

   $$N := \bigcap \{X \,;\; X \subseteq K \wedge \mathbf{1} \in X \wedge \forall x \in X : x + \mathbf{1} \in X\}$$

   die „kleinste induktive Teilmenge“ von K. Wegen (A.2) ist P induktiv und damit

   $$N \subseteq P. \tag{A.3}$$

[1] Hier und im Folgenden bezeichne $-a$ das additive und (im Fall $a \neq \mathbf{0}$) a^{-1} das multiplikative Inverse für $a \in K$.

Insbesondere ist $\mathbf{0} \notin N$, woraus ersichtlich ist, dass $\langle N, \mathbf{1}, \sigma \rangle$ mit $\sigma : N \to N, n \mapsto n + \mathbf{1}$ eine Peanostruktur ist. Per Induktion ergibt sich, dass N unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, und dass

$$\mathbf{1} \leq n \qquad \text{sowie} \qquad m < n \;\Rightarrow\; m + \mathbf{1} \leq n, \qquad \forall m, n \in N, \tag{A.4}$$

wobei $<$ die durch (A.1) gegebene Ordnung auf K bezeichne und $\leq$ die entsprechende schwache Ordnung. Es besitzt N keine obere Schranke in K, denn mit jeder oberen Schranke s wäre $s + (-\mathbf{1})$ eine kleinere obere Schranke, d.h. N wäre eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von P ohne Supremum. Es folgt, dass jede nichtleere Teilmenge T von N ein kleinstes Element besitzt, denn nach (A.4) wäre sonst die Menge $\{m \in N\,;\ \forall n \in T : m \leq n\}$ induktiv und damit eine Obermenge von N, was unmöglich ist, da sie nach oben beschränkt ist. Also ist die Ordnung $<$ wohlfundiert auf N.

Mit N ist auch die Menge

$$Q := \left\{ m \cdot n^{-1}\,;\ m, n \in N \right\}$$

abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Aus (A.3) und (A.2) folgt

$$N \subseteq Q \subseteq P. \tag{A.5}$$

Wir zeigen, dass Q dicht in P liegt, d.h.

$$a < b \;\Rightarrow\; \exists q \in Q : a < q < b, \qquad \forall a, b \in P. \tag{A.6}$$

Nach Voraussetzung ist $(-a) + b \in P$, also gemäß (A.2) auch $((-a) + b)^{-1} \in P$. Da N nach oben unbeschränkt ist, gibt es ein $n \in N$ mit $((-a)+b)^{-1} < n$ und damit $n^{-1} < ((-a)+b)$. Da N obendrein wohlfundiert ist, gibt es ein kleinstes $m \in N$ sodass $a \cdot n < m$. Es folgt einerseits $a < m \cdot n^{-1}$, wegen der Minimalität von m andererseits $m + (-\mathbf{1}) \leq a \cdot n$ (bzw. im Fall $m + (-\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ gilt dies trivialerweise) und damit $m \cdot n^{-1} \leq a + n^{-1} < a + ((-a)+b) = b$. Also erfüllt $q := m \cdot n^{-1}$ die Behauptung.

2. Sei nun $\langle \mathcal{K}', P' \rangle$ ein beliebiger weiterer vollständig angeordneter Körper. Da $\langle \mathcal{K}, P \rangle$ beliebig gewählt war, gelten alle in 1. gezeigten Eigenschaften entsprechend auch für $\langle \mathcal{K}', P' \rangle$. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus 1. für diesen Körper mit Strich $'$, also $+'$, $\mathbf{1}'$, $<'$, N', etc. Wir definieren nun zunächst induktiv

$$\pi_1 : N \to N', \quad \mathbf{1} \mapsto \mathbf{1}', \quad n + \mathbf{1} \mapsto \pi_1(n) +' \mathbf{1}'.$$

Offensichtlich ist π_1 wohldefiniert (d.h. $\pi_1\lceil N \rfloor \subseteq N'$) und surjektiv. Für $m, n \in N$ ergibt sich per Induktion über n:

$$\pi_1(m + n) = \pi_1(m) +' \pi_1(n) \quad \text{und} \quad \pi_1(m \cdot n) = \pi_1(m) \cdot' \pi_1(n), \tag{A.7}$$

sowie wegen (A.4):

$$m < n \quad \Rightarrow \quad \pi_1(m) <' \pi_1(n). \tag{A.8}$$

Letzteres impliziert insbesondere die Injektivität und damit Bijektivität von π_1.

3. Wegen

$$m \cdot n^{-1} = k \cdot l^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot l = k \cdot n, \qquad \forall m, n, k, l \in N$$

und einer entsprechenden Äquivalenz in N', gibt es nach (A.7) eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_2 : Q \to Q' \quad \text{mit} \quad \pi_2(m \cdot n^{-1}) = \pi_1(m) \cdot' \pi_1(n)^{-1}, \qquad \forall m, n \in N.$$

Mit π_1 ist auch π_2 surjektiv. Wegen

$$m \cdot n^{-1} < k \cdot l^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot l < k \cdot n, \qquad \forall m, n, k, l \in N$$

und einer entsprechenden Äquivalenz in N', folgt aus (A.8):

$$r < s \quad \Rightarrow \quad \pi_2(r) <' \pi_2(s), \qquad \forall r, s \in Q. \tag{A.9}$$

Wie für π_1 ergibt sich daraus die Bijektivität von π_2. Aus (A.7) folgt ferner

$$\pi_2(r+s) = \pi_2(r) +' \pi_2(s) \quad \text{und} \quad \pi_2(r \cdot s) = \pi_2(r) \cdot' \pi_2(s), \qquad \forall r, s \in Q. \tag{A.10}$$

4. Da N in K keine obere Schranke besitzt, gibt es zu jedem $a \in P$ ein $n \in N$ mit $a, a^{-1} < n$ und damit $n^{-1} < a < n$, d.h. die Menge

$$Q_a := \{q \in Q\,;\ q < a\}$$

ist nicht leer und hat eine obere Schranke in Q. Demnach ist $\pi_2\lceil Q_a \rfloor$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von P' (beachte (A.9) und (A.5)), besitzt also ein Supremum in K'. Wir haben somit eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_3 : P \to P', \quad a \mapsto \sup \pi_2\lceil Q_a \rfloor.$$

Analog folgt, dass für $a' \in P'$ die Menge $\pi_2^{-1}\lceil\{q' \in Q'\,;\ q' <' a'\}\rfloor$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von Q ist (beachte $r' <' s' \Rightarrow \pi_2^{-1}(r') < \pi_2^{-1}(s')$ für $r', s' \in Q'$, nach (A.9) und da π_2 bijektiv) und somit ein Supremum $a \in P$ in K besitzt. Wir zeigen $\pi_3(a) = a'$, womit dann die Surjektivität von π_3 gezeigt ist. Zunächst:

$$q' <' a' \quad \Leftrightarrow \quad \pi_2^{-1}(q') < a, \qquad \forall q' \in Q'.$$

Zu „$\Rightarrow$“: Gelte $q' <' a'$. Da Q' dicht in P' liegt, gibt es ein $q'' \in Q'$ mit $q' <' q'' <' a'$ und mithin $\pi_2^{-1}(q') < \pi_2^{-1}(q'') \leq \sup \left\{\pi_2^{-1}(q'')\,;\ q'' \in Q' \wedge q'' <' a'\right\} = a$. Zu „$\Leftarrow$“: Es gelte $a' \leq' q'$. Dann gilt $\pi_2^{-1}(q'') < \pi_2^{-1}(q')$ für alle $q'' \in Q'$ mit $q'' <' a'$, d.h. $\pi_2^{-1}(q')$ ist obere Schranke der Menge $\pi_2^{-1}\lceil\{q'' \in Q'\,;\ q'' < a'\}\rfloor$, mithin $a \leq \pi_2^{-1}(q')$. Damit ergibt sich die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\pi_3(a) &= \sup \pi_2\lceil Q_a \rfloor \\
&= \sup \{\pi_2(q)\,;\ q \in Q \wedge q < a\} \\
&= \sup \left\{q' \in Q'\,;\ \pi_2^{-1}(q') < a\right\} \\
&= \sup \left\{q' \in Q'\,;\ q' <' a'\right\} \\
&= a'
\end{aligned}$$

(die letzte Gleichheit benutzt wiederum, dass Q' dicht in P' liegt). Also ist π_3 surjektiv.

Es gilt

$$a < b \quad \Rightarrow \quad \pi_3(a) < \pi_3(b), \qquad \forall a, b \in P, \tag{A.11}$$

denn da Q dicht in P liegt, gibt es $q_1, q_2 \in Q$ mit $a < q_1 < q_2 < b$ und damit $\sup \pi_2\lceil Q_a \rfloor \leq' \pi_2(q_1) < \pi_2(q_2) \leq' \sup \pi_2\lceil Q_b \rfloor$. Wie für π_1 ergibt sich hieraus die Bijektivität von π_3.

Wir zeigen nun

$$\pi_3(a+b) = \pi_3(a) +' \pi_3(b) \quad \text{und} \quad \pi_3(a \cdot b) = \pi_3(a) \cdot' \pi_3(b), \qquad \forall a, b \in P. \tag{A.12}$$

Wir führen den Beweis für die Addition, der Beweis für die Multiplikation kann parallel gelesen werden. Sei zunächst $q \in Q_{a+b}$ beliebig. Da dann $q + (-b) < a$ (beachte $b^{-1} \in P$ beim Beweis für die Multiplikation), gibt es ein $q_a \in Q$ sodass $q + (-b) < q_a < a$. Dann ist $q_a \in Q_a$ und $q + (-q_a) < b$. Sei $q_b \in Q$ mit $q + (-q_a) < q_b < b$. Dann ist $q_b \in Q_b$ und es gilt $q < q_a + q_b$. Mit (A.9) und (A.10) folgt

$$\pi_2(q) < \pi_2(q_a + q_b) = \pi_2(q_a) +' \pi_2(q_b) \leq' \pi_3(a) +' \pi_3(b).$$

Da $q \in Q_{a+b}$ beliebig war, ist damit

$$\pi_3(a + b) \leq' \pi_3(a) +' \pi_3(b)$$

gezeigt. Seien nun $q_a \in Q_a$ und $q_b \in Q_b$ beliebig. Dann ist $q_a + q_b \in Q_{a+b}$ und damit $\pi_2(q_a) +' \pi_2(q_b) = \pi_2(q_a + q_b) \leq' \pi_3(a + b)$ gemäß (A.10). Da $q_a \in Q_a$ beliebig war, folgt $\pi_3(a) +' \pi_2(q_b) \leq' \pi_3(a + b)$. Da auch $q_b \in Q_b$ beliebig war, folgt

$$\pi_3(a) +' \pi_3(b) \ \leq' \pi_3(a + b).$$

5. Wir zeigen nun, dass die Abbildung

$$\pi : K \to K', \quad a \mapsto \begin{cases} \pi_3(a), & \text{falls } a \in P, \\ \mathbf{0}', & \text{falls } a = \mathbf{0}, \\ -'\pi_3(-a) & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Körperisomorphismus $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ ist, womit dann das Theorem gezeigt ist. Die Bijektivität von π ergibt sich aus derjenigen von π_3. Per Definition gilt $\pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ und man erkennt auch leicht $\pi(\mathbf{1}) = \pi_3(\mathbf{1}) = \pi_2(\mathbf{1}) = \pi_1(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'$. Wir zeigen

$$\pi(a + b) = \pi(a) +' \pi(b), \qquad \forall a, b \in K$$

durch Fallunterscheidung: Im Fall $a, b \in P$ folgt dies aus (A.12), die Fälle $a = \mathbf{0}$ oder $b = \mathbf{0}$ oder $a + b = \mathbf{0}$ sind trivial. Sei also o.E. $-a \in P$ und $a + b \neq \mathbf{0}$ angenommen. Im Fall $-b \in P$ ist dann $-(a + b) = (-a) + (-b) \in P$ und es folgt

$$\pi(a + b) = -'\pi_3(-(a + b)) = (-'\pi_3(-a)) +' (-'\pi_3(-b) = \pi(a) +' \pi(b).$$

Im Fall $b \in P$ und $a + b \in P$ gilt

$$\pi(a + b) = (-'\pi_3(-a)) +' \pi_3(-a) +' \pi_3(a + b) = \pi(a) +' \pi_3((-a) + a + b) = \pi(a) +' \pi(b).$$

Im Fall $b \in P$ und $-(a + b) \in P$ schließlich gilt

$$\pi(a{+}b) = (-'\pi_3(-(a{+}b))){+}'(-'\pi_3(b)){+}'\pi_3(b) = (-'(\pi_3(-(a{+}b){+}b))){+}'\pi(b) = \pi(a){+}'\pi(b).$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\pi(a \cdot b) = \pi(a) \cdot' \pi(b), \qquad \forall a, b \in K.$$

Auch hier können wir o.E. $-a \in P$ und $b \neq \mathbf{0}$ annehmen. Im Fall $-b \in P$ ist $a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \in P$ und es folgt

$$\pi(a \cdot b) = \pi_3((-a) \cdot (-b)) = \pi_3(-a) \cdot' \pi_3(-b) = (-'\pi(a)) \cdot' (-'\pi(b)) = \pi(a) \cdot' \pi(b).$$

Im Fall $b \in P$ ist $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b \in P$ und es folgt

$$\pi(a \cdot b) = -'\pi_3((-a) \cdot b)) = -'(\pi_3(-a) \cdot' \pi_3(b)) = \pi(a) \cdot' \pi(b).$$

■

Literaturverzeichnis

[1] E. R. Hedrick, L. Ingold. *A set of axioms for line geometry.* Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), 205-214.

[2] O. Veblen, J. W. Young. *Projective Geometry, I & II.* Ginn and Company, Boston, 1910, 2. Auflage 1916.

[3] K. Borsuk, W. Szmielew. *Foundations of geometry.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

[4] A. Heyting. *Axiomatic projective geometry.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, 2. Auflage 1980.

[5] Th. Reye. *Die Geometrie der Lage, I–III.* Alfred Kröner, Leipzig, 1866, 6. Auflage 1923.

[6] L. Edwards. *Projective Geometry.* Floris Books, Pennsylvania, 1985, 2. Auflage 2003.

[7] G. Adams. *Strahlende Weltgestaltung. Synthetische Geometrie in geisteswissenschaftlicher Beleuchtung.* Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach, 1933, 2. Auflage 1965.

[8] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* B.G. Teubner, Leipzig, 1899, 14. Auflage 1999.

[9] A. N. Whitehead. *The axioms of projective geometry.* University Press, Cambridge, 1906.

[10] V. Pambuccian. *The axiomantics of ordered geometry.* Expositiones Mathematicae 29 (2011), 24-66.

[11] V. Pambuccian. *Elementary axiomatizations of projective space and of its associated Grassman space.* Note di Matematica 24, n. 1, 2004/2005, 129-141.

[12] H.-J. Stoß. *Treffgeraden und Nullinvarianz. Beiträge zur Liniengeometrie.* Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach, 1995.

[13] M. Pieri. *Sui Principi che regono la geometria delle rette.* Atti Accad. Torino 36 (1901), 335-350.

[14] S. Trott. *An axiomatic line geometry.* Canad. J. Math. 20 (1968), 939-952.

[15] E. Kozniewski. *An axiom system for the line geometry.* Demonstratio Math. 21 (1988), 1071-1087.

[16] H. Amann, J. Escher. *Analysis, I–III.* Birkhäuser, Basel, 2001, 2. Auflage 2008.

[17] M. Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Houston, 1967, 3. Auflage 1994.

Index

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Leipzig, 3.12.2018